

Стохастический резонанс в сверхпроводящих контурах с контактами Джозефсона. Численный эксперимент

А.М. Глухов, О.Г. Турутанов, В.И. Шнырков, А.Н. Омелянчук

*Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Ленина, 47, г. Харьков, 61103, Украина*

E-mail: turutano@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 21 февраля 2006 г.

Проведено численное моделирование стохастического резонанса в адиабатическом приближении в передемпфированных системах, построенных на основе сверхпроводящих контуров, замкнутых слабой связью. Рассматриваемые системы включали одиночное кольцо ВЧ СКВИДа, два кольца, связанных общим магнитным потоком, и кольцо, замкнутое 4-терминальным джозефсоновским контактом. Показано, что связывание одиночных колец СКВИДа приводит к увеличению коэффициента усиления и отношения сигнал/шум. Эти эффекты могут быть использованы при создании новых стохастических антенн СКВИДов для измерений гармонических и квазигармонических сигналов. Стохастический резонанс в 4-терминальных СКВИДах существует и при значениях безразмерной индуктивности $l < 1$.

Проведено чисельне моделювання стохастичного резонансу в адиабатичному наближенні у передемпфованих системах, що побудовані на основі надпровідних контурів, які замкнуті слабким зв'язком. Серед систем, що розглядалися, були одиночне кільце ВЧ СКВИДу, два кільця, які зв'язані спільним магнітним потоком, та кільце, що замкнуте 4-термінальним джозефсонівським контактом. Показано, що зв'язування одиночних кілець СКВИДу призводить до збільшення коефіцієнта підсилення та відношення сигнал/шум. Ці ефекти можуть бути використовані при побудові нових стохастичних антен СКВИДів для вимірювання гармонічних і квазігармонічних сигналів. Стохастичний резонанс у 4-термінальних СКВИДах існує й при значеннях безрозмірної індуктивності $l < 1$.

PACS: 02.50.Ey, 02.60.Cb, 05.45.Tr, 85.25.Dq

Ключевые слова: стохастический резонанс, СКВИД, контакт Джозефсона, численное моделирование.

Введение

Понятие «стохастический резонанс» (СР) впервые введено в работах [1–3]. Явление СР проявляется в увеличении отклика детерминированной динамической системы на слабый периодический сигнал и отношения сигнал/шум при внесении в систему дополнительного шума некоторой оптимальной интенсивности. Эффект возникает из-за перекачки энергии стохастического процесса (шума) в энергию детерминированного процесса (сигнала) и приводит к кажущемуся нарушению термодинамического запрета на понижение энтропии. Парадокс исчезает, если учесть наличие в системе входных и

выходных параметров, которые автоматически делают ее открытой [4,5]. Эффект СР первоначально был объяснен для бистабильных систем в предположении их адиабатичности (частота периодического сигнала значительно меньше обратных времен релаксации системы) в терминах модели двух состояний [6]. Позже он был обнаружен и теоретически исследован с помощью более общего подхода теории линейного отклика [7,8] в системах с одним устойчивым состоянием при высоких частотах сигнала [9]. Стохастический резонанс наблюдается также в пороговых системах [10]. Таким образом, система не обязательно должна быть динамической [11],

достаточно лишь нелинейности ее «передаточной функции». Эффект СР наблюдался также в джозефсоновской перколяционной среде [12].

Как показано в работах [13,14], условия, необходимые для возникновения СР, легко выполняются в сверхпроводящих квантовых интерференционных детекторах (СКВИДах), которые обычно используют для регистрации широкополосных низкочастотных сигналов. В режиме широкополосного детектирования значения чувствительности ПТ и ВЧ СКВИДОВ очень высоки и практически приближаются к квантовому пределу. Успехи в технологии изготовления высококачественных джозефсоновских контактов малой площади, улучшение параметров транзисторов и усовершенствование электрических схем регистрации позволили получать рекордные значения чувствительности при создании различных приборов, в том числе многоканальных приемных устройств измерения биоманнитных полей, восприимчивости, низкочастотных радаров, геофизической аппаратуры и т.д.

Совершенно очевидно, что некоторые практические приложения (магнитоэнцефалография, геофизические исследования) не требуют широкополосного приема, поскольку регистрируемый информационный сигнал лежит в узком диапазоне частот. Например, в системах неразрушающего контроля [15], низкочастотных радаров [16] и при измерении магнитной восприимчивости биологических объектов [17] измеряемый сигнал сосредоточен на одной частоте и широкополосная входная антенна является препятствием для реализации предельной чувствительности СКВИДов. В таких измерениях эффект стохастического резонанса может оказаться чрезвычайно полезным как для сужения входной полосы антенны, так и для улучшения отношения сигнал/шум за счет стохастического усиления слабых сигналов. Можно ожидать [18], что при заполнении площади приемной антенны связанными между собой стохастическими осцилляторами [19] (например, на основе сверхпроводящего квантового интерферометра с одним джозефсоновским контактом) СР приведет к увеличению отклика на слабый измеряемый сигнал. Однако поведение такой динамической системы в целом зависит от многих параметров, и экспериментальный поиск оптимальной стратегии весьма затруднителен. Поэтому существенный интерес представляет теоретическое нахождение оптимальных характеристик как автономного СР осциллятора, так и связанных динамических систем.

Настоящая работа посвящена численному моделированию СР в системе связанных колец ВЧ СКВИДа, а также в сверхпроводящем кольце, замкнутом 4-терминальной слабой связью [20].

Учитывая интересы практических приложений, в работе исследован отклик колец ВЧ СКВИДа на слабый гармонический сигнал очень низкой частоты (~ 1 Гц). В то же время известно, что для типичного кольца СКВИДа характерное время релаксации потока $\tau_L = L/R_J \sim (10^{-9}-10^{-11})$ с (L – индуктивность кольца, R_J – нормальное сопротивление слабой связи). Такое большое различие характерных времен сигнала и системы позволяет использовать адиабатическое приближение и отказаться от непосредственного решения уравнений движения. Подход, развиваемый в данной работе, предполагает построение потенциальной поверхности, зависящей от периодического и случайного воздействий, и отслеживание эволюции ее топологии и формы под действием этих внешних сигналов. Форма потенциальной поверхности в каждый момент времени (с учетом предыстории) однозначно определяет состояние системы. Таким образом строится временная последовательность состояний системы, которая и подвергается дальнейшему анализу.

Модель СР в одиночном кольце ВЧ СКВИДа

Эффект СР наиболее полно исследован в системе, обладающей двумя устойчивыми состояниями, разделенными потенциальным барьером. Для проверки работоспособности предлагаемой методики расчета проведем численное моделирование такой системы, попутно поясняя механизм СР. Рассмотрим сверхпроводящий контур, содержащий слабую джозефсоновскую связь, который далее будем называть кольцом ВЧ СКВИДа (вставка на рис. 1).

Считая, что при конечных температурах через джозефсоновский переход протекает как сверхток, так и ток квазичастиц, т.е. используя широко известную модель шунтированного сопротивлением джозефсоновского перехода (модель RSJ), можно записать уравнение для магнитного потока Φ внутри кольца [21]:

$$\left(LC \frac{d^2}{dt^2} + \tau_L \frac{d}{dt} + 1 \right) \frac{\Phi(t)}{\Phi_0} + \frac{\beta}{2\pi} \sin \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} = \frac{\Phi_e(t)}{\Phi_0}, \quad (1)$$

где C – емкость кольца (сосредоточенная в джозефсоновском переходе), $\tau_L = L/R_J$ – время магнитной релаксации кольца, I_c – критический ток джозефсоновского перехода, $\beta = 2\pi LI_c/\Phi_0$ – параметр гистерезиса (при $\beta > 1$ на кривой $\Phi(\Phi_e)$ наблюдается гистерезис), Φ_0 – квант магнитного потока.

Если в качестве джозефсоновского контакта используется микромостик или точечный контакт, то его емкость исчезающе мала ($C \sim 10^{-15}$ Ф), а его сопротивление в нормальном состоянии $R_N \sim 1$ Ом.

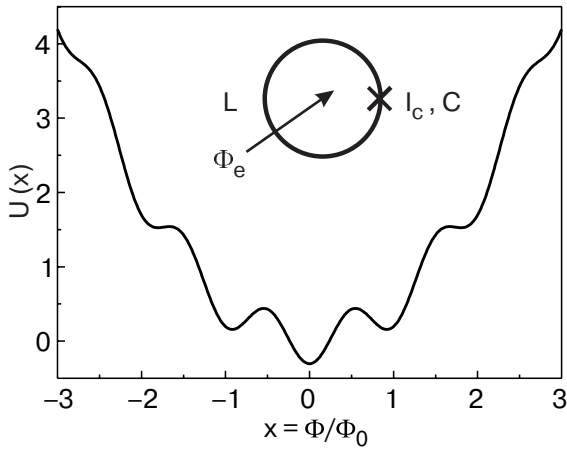


Рис. 1. Потенциальная функция сверхпроводящего контура с джозефсоновским контактом. Параметр гистерезиса $\beta = 12$, внешний магнитный поток $x_{dc} = 0$. На вставке: схема кольца ВЧ СКВИДа; L — индуктивность кольца, Φ — магнитный поток через кольцо, I_c и C — критический ток и емкость контакта Джозефсона соответственно.

При использовании туннельного контакта его шунтируют малым сопротивлением, чтобы уменьшить влияние емкости перехода и сократить тем самым время переходного процесса в кольце. Таким образом, учитывая, что индуктивность кольца L обычно лежит в пределах 10^{-9} – 10^{-11} Гн, оказывается, что в (1) член со второй производной намного меньше остальных, и им можно пренебречь.

Во внешнем потоке $\Phi_e(t)$ будем выделять постоянную составляющую Φ_{dc} , периодический переменный сигнал Φ_{ac} с амплитудой a и частотой f_s и стохастическую добавку Φ_N :

$$\Phi_e(t) = \Phi_{dc} + \Phi_{ac} + \Phi_N(t); \quad \Phi_{ac} = a\Phi_0 \sin(2\pi f_s t), \quad (2)$$

где в качестве $\Phi_N(t)$ используется гауссов случайный процесс с нулевым средним значением и дисперсией D :

$$\Phi_N(t) = \Phi_0 \xi(t), \quad \langle \xi(t) \xi(t') \rangle = 2D \delta(t - t').$$

Детали численной реализации периодического сигнала и шумовой компоненты будут рассмотрены ниже.

Нормируя магнитный поток на квант потока Φ_0 и вводя обозначение

$$x_\alpha = \Phi_\alpha / \Phi_0, \quad (3)$$

где α — любой индекс, запишем уравнение движения системы:

$$\tau_L \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

Зависимость потенциала системы от времени определяется временной эволюцией внешнего потока (2), нормированного согласно (3):

$$U(x,t) = \frac{1}{2}(x - x_e(t))^2 - \frac{\beta}{4\pi^2} \cos 2\pi x, \quad (5)$$

где нормированный внешний поток

$$x_e(t) = x_{dc} + a \cos(2\pi f_s t) + \xi(t). \quad (6)$$

Заметим, что перенос всей временной зависимости на потенциал возможен вследствие выполнения условия адиабатичности $f_s \ll 1/\tau_L$. Как уже упоминалось выше, в реальных приложениях СКВИДа для частот сигналов в интервале 1–1000 Гц это условие выполняется с большой точностью. При этом, конечно, накладывается ограничение и на полосу шума, верхняя частотная граница которого также должна быть много меньше τ_L .

Форма потенциала кольца СКВИДа $U(x)$ в случае $\beta > 1$ и в отсутствие дополнительного внешнего потока ($x_e = 0$) приведена на рис. 1. Локальные минимумы потенциала соответствуют устойчивым состояниям кольца, разделенным энергетическими барьерами.

Положение и количество экстремумов потенциала определяется из условия

$$\frac{dU(x)}{dx} = 0, \quad (7)$$

$$x - x_{dc} + \frac{\beta}{2\pi} \sin 2\pi x = 0. \quad (8)$$

Для получения двухъямного потенциала, симметричного по отношению к изменению внешнего магнитного потока, следует положить $x_{dc} = 1/2$, тогда положения экстремумов будут решениями трансцендентного уравнения

$$x_m = \frac{1}{2} - \frac{\beta}{2\pi} \sin 2\pi x_m. \quad (9)$$

Из уравнения (9) следует, что потенциал содержит не более двух минимумов при значениях β в интервале от 1 до $\sim 7,7$ (рис. 2, а), а система обладает двумя устойчивыми состояниями, разделенными потенциальным барьером, что делает возможным существование в ней СР. Такой потенциал будем задавать при моделировании поведения одиночного кольца ВЧ СКВИДа. Заметим, что СР должен существовать и в мультстабильной системе с многоямным симметричным потенциалом, но анализ такой ситуации значительно сложнее. Во всех известных нам работах авторы ограничиваются рассмотрением лишь двух соседних минимумов потенциала. Следуя этим работам, будем считать, что при

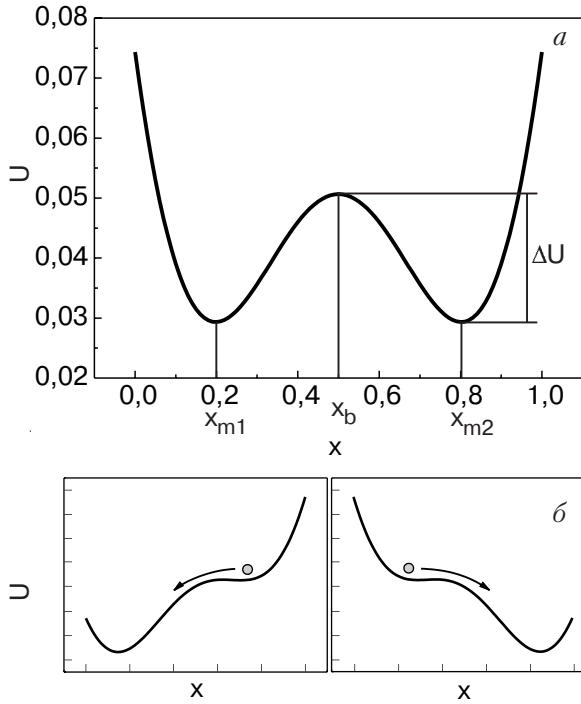


Рис. 2. Симметричный бистабильный потенциал кольца ВЧ СКВИДа при $\beta = 2$ и $x_{dc} = 0,5$; показаны значения потока, соответствующие минимумам потенциала (x_{m1} , x_{m2}), середине барьера (x_b), а также высота потенциального барьера ΔU (а). Схема перехода системы из одного устойчивого состояния в другое при перекосе потенциала внешним магнитным потоком (б).

произвольных β изменение магнитного потока в кольце достаточно мало, чтобы не вызывать переходов системы в дальние ямы. Также заметим, что симметризовать потенциал кольца можно при нулевом внешнем магнитном потоке, используя вместо обычного контакта Джозефсона π -контакт [22], который в основном состоянии без тока задает разность фаз параметра порядка, равную π , и обеспечивает в кольце поток, равный $\Phi_0/2$. С точки зрения практических применений этот способ более технологичен, чем задание внешнего магнитного потока.

На примере этого потенциала можно пояснить суть эффекта СР следующим образом. Изначально, в отсутствие шума, система (частица) находится в одном из двух локальных минимумов потенциальной энергии (см. рис. 2,а), совершая небольшие внутриямные колебания под действием приложенной к ней слабой периодической силы (сигнала). Этот сигнал вызывает периодический наклон потенциала то в одну, то в другую сторону, соответственно несколько понижая барьер. Амплитуда сигнала недостаточна для перехода системы через барьер во второй локальный минимум потенциала. При добавлении в систему шума появляется конечная вероят-

ность «перекачывания» системы через барьер в другую яму (когда при достаточно большом мгновенном перекосе потенциала один из локальных минимумов исчезает) (рис. 2,б). Эта вероятность зависит от высоты барьера и растет с увеличением интенсивности шума (для белого шума с гауссовым распределением под интенсивностью понимается дисперсия распределения). Средняя частота ухода частицы из ямы (а значит, частота перескоков в другую яму) под действием шума в сильно демпфированной системе была определена Крамерсом [23], и для белого шума, параболических потенциальных ям и относительно высоких барьеров дается законом Аррениуса:

$$r_k = \frac{\omega_0 \omega_b}{2\pi\gamma} \exp\left(-\frac{\Delta U}{D}\right), \quad (10)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{U''(x_m)}{m}}$ — частота колебаний у дна ямы;

$\omega_b = \sqrt{\frac{U''(x_b)}{m}}$ — частота колебаний в локальном

максимуме (на барьере); m — масса колеблющейся частицы; γ — коэффициент вязкого трения (диссипации); ΔU — высота барьера; D — интенсивность шума. Если шум теплового происхождения, то $D = k_B T$.

Поскольку потенциальный барьер под действием периодического сигнала становится периодической функцией от времени, то и вероятность переходов, определяющая выходной сигнал, также начинает периодически зависеть от времени. Когда, с повышением интенсивности шума, частота Крамерса становится вдвое больше частоты периодического сигнала, возникает «синхронизация» стохастического и периодического процессов: в среднем перескоки, вызванные шумом, происходят в такт с периодическим сигналом, и в спектре системы наблюдается увеличение мощности выходного сигнала на частоте слабого входного. Таким образом, шум способствует межъямным переходам в моменты пиковых значений полезного сигнала. Заметим, что из-за сильного демпфирования система не совершает никаких собственных колебаний, все процессы в ней носят релаксационный характер.

Описанное поведение сверхпроводящего кольца с джозефсоновским контактом было изучено на численной модели с потенциалом (5) и внешним сигналом (6). Для удобства постоянное смещение $x_{dc} = 1/2$, симметризирующее потенциал, было исключено из (5) путем замены переменной $(x - 1/2) \rightarrow x$.

Методика численного эксперимента и результаты расчета для одиночного кольца

Процедура численного моделирования, результат которого приведен на рис. 3, заключается в следующем. Определенный промежуток времени разбивается на большое число интервалов, пропорциональное степени 2 (обычно 2^{15} (32768)), для удобства дальнейшего фурье-анализа. В каждой точке, соответствующей определенному моменту времени, задаются значения периодического синусоидального сигнала и шума. В большинстве расчетов частота сигнала f_s равна 2–4 Гц, а амплитуда $a = 0,01–0,3$ (в единицах Φ_0). Для получения шума с гауссовым распределением, средним нулевым значением и дисперсией D , определяющей интенсивность шума, используется генератор случайных чисел с периодом повторения около 2^{90} . Спектр шума ограничивается сверху цифровым фильтром. Частота среза шума выбирается намного выше частоты сигнала, а значит, и средней частоты межъямных переходов при реализации эффекта СР. Затем в

каждый момент времени t_n определяется количество и положение минимумов потенциальной функции. Если минимумов два (рис. 2,а), то считается, что состояние системы не изменилось и она остается в той же яме, лишь с немного смещенной координатой (эта ситуация соответствует внутриямным колебаниям). Если из-за перекоса потенциала суммарным действием периодического и шумового сигналов остается один минимум, система «скатывается» в него при условии, что до этого она находилась в другом минимуме (рис. 2,б), и ей приписывается значение нормированного потока, соответствующее этому минимуму. В результате при различных уровнях шума получаются временные последовательности, близкие к телеграфному сигналу (рис. 3,а). Можно исключить влияние внутриямных колебаний и получить настоящий телеграфный сигнал путем фильтрации временной последовательности методом двух состояний [6], но дальнейший расчет показывает, что это излишне, так как конечные кривые зависимости коэффициента усиления потока и отношения сигнал/шум остаются практически такими же, как и без фильтрации.

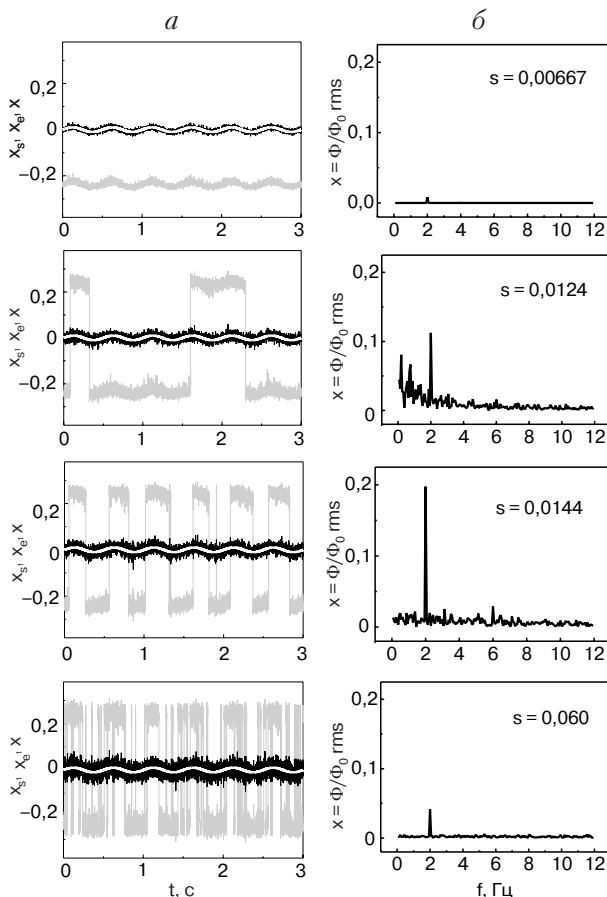


Рис. 3. Временные серии периодического входного сигнала x_s (белые кривые), сигнала с шумом $x_p = x_s + x_N$ (черные) и выходного сигнала x (серые) (а); спектры Фурье выходного сигнала при различных уровнях шума s (б).

Эта последовательность подвергается быстрому фурье-преобразованию (БПФ), в результате которого получаются спектры среднеквадратичного отклонения выходного сигнала (потока в кольце) (рис. 3,б). По мере роста шума (сверху вниз на рис. 3) поведение системы качественно меняется. При малом уровне шума практически не происходит перекоков из одной потенциальной ямы в другую, наблюдаются небольшие внутриямные колебания, совпадающие с входным сигналом (первая картинка на рис. 3,а). С увеличением шума начинаются перекоки и появляется заметный пик сигнала на основной частоте (вторая картинка на рис. 3,а и б соответственно). При некотором оптимальном уровне шума возникает статистическая «синхронизация» шума и сигнала, перекоки становятся квазипериодическими, а высота пика в выходном фурье-спектре на основной частоте сильно вырастает на фоне уменьшающейся шумовой полки (третья картинка на рис. 3,а,б). Большой уровень шума разрушает корреляцию перекоков с периодическим сигналом, а высота пика на основной частоте в фурье-спектре падает (четвертая картинка на рис. 3,б).

На рис. 4 приведена зависимость коэффициента усиления потока η , определяемого как отношение выходного сигнала к входному на основной частоте, от величины стандартного отклонения шума (уровня шума) $s \equiv D^{1/2}$. Там же показано поведение отношения сигнал/шум (SNR) в зависимости от s . Величина SNR вычисляется как отношение высоты основного пика в фурье-спектре к средней высоте

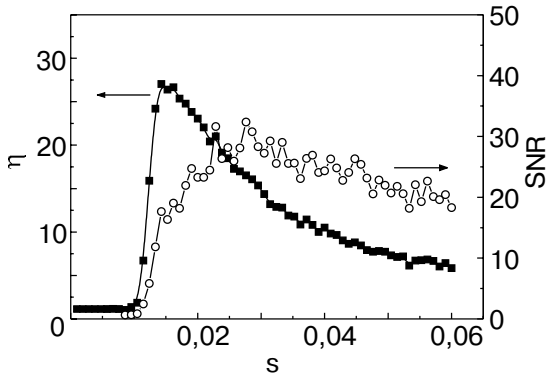


Рис. 4. Зависимость коэффициента усиления по потоку и отношения сигнал/шум от уровня шума в одиночном кольце ВЧ СКВИДа. Параметр $\beta = 1,5$, амплитуда входного сигнала $a = 0,01$, частота сигнала $f_s = 2$ Гц, частота среза шума $f_c = 2048$ Гц, количество точек во временной последовательности равно 32768. Кривая SNR выглядит негладкой из-за разброса при определении положения шумовой полочки.

шумовой полочки под ним. Кривые имеют «классический» для эффекта СР вид [4,5,13,14]. Заметим, что, вообще говоря, значения уровня шума, при которых наблюдаются максимумы кривых усиления и отношения сигнал/шум, не совпадают. Уровень шума $s < 0,01$ недостаточен для перехода через барьер с заметной вероятностью (происходят только внутриямные колебания), поэтому определение отношения сигнал/шум при таких малых значениях шума некорректно.

Характерной особенностью СР является высокая чувствительность спектра выходного сигнала к смещению входного потока. Поскольку процесс стохастического усиления носит нелинейный характер, спектр выходного сигнала содержит, помимо основной частоты, и высшие гармоники (рис. 5). При отсутствии постоянного потока смещения ($x_{dc} = 0$) потенциал $U(x)$ симметричен и в спектре отсутствуют четные гармоники (рис. 5,а). Если симметрия потенциала нарушена небольшим потоком смещения, то в спектре появляются четные гармоники (рис. 5,б). Постоянным смещением можно добиться ситуации, в которой в спектре отсутствуют нечетные гармоники (не считая основной частоты) (рис. 5,в). На рис. 6 приведены зависимости амплитуд первых трех гармоник сигнала от постоянного потока смещения, которые хорошо согласуются с результатами, приведенными в [13].

Моделирование СР в связанных кольцах

Рассмотрим ситуацию, в которой кольца находятся рядом в одной плоскости, а между ними существует магнитная связь, определяемая их взаимной

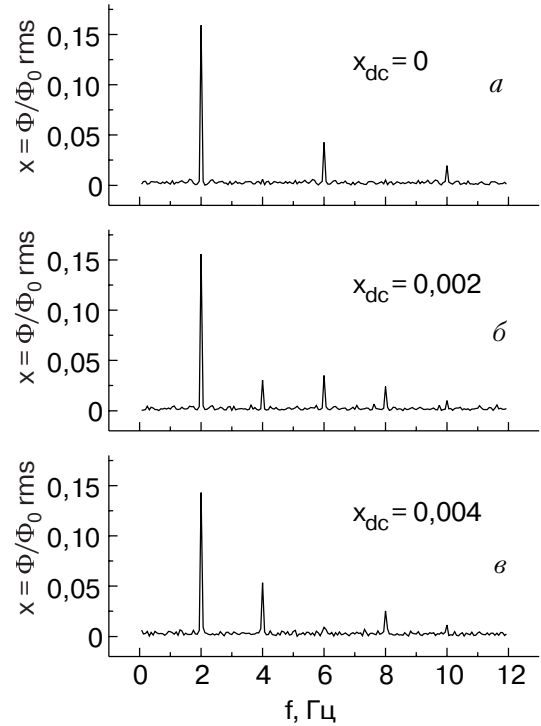


Рис. 5. Четные и нечетные гармоники в спектре Фурье выходного сигнала при различных уровнях постоянного потока смещения. Интенсивность шума равна тому значению, при котором наблюдается максимальное стохастическое усиление сигнала.

индуктивностью. При этом часть потока одного кольца попадает во второе, и наоборот.

Потенциал в этом случае запишем как сумму индивидуальных потенциалов колец и перекрестного члена, учитывающего взаимодействие колец:

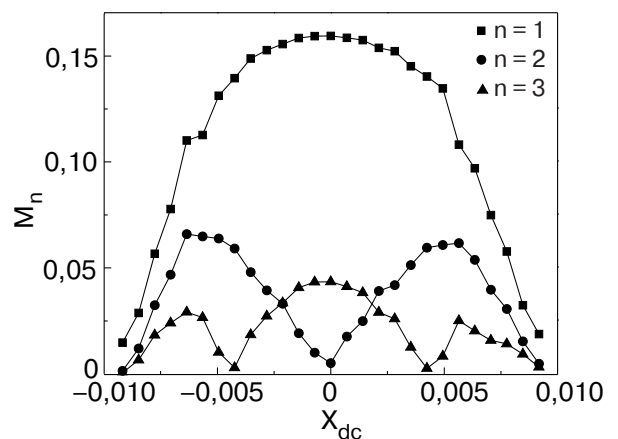


Рис. 6. Величины первых трех гармоник основного сигнала в выходном фурье-спектре в зависимости от смещения входного потока x_{dc} ; $\beta = 1,5$. Интенсивность шума равна тому значению, при котором наблюдается максимальное стохастическое усиление сигнала.

$$U(x_1, x_2) = \frac{(x_1^2 + x_2^2)}{2} + \frac{(\beta_1 \cos 2\pi x_1 + \beta_2 \cos 2\pi x_2)}{4\pi^2} - kx_1x_2, \quad (11)$$

где x_1 и x_2 , β_1 и β_2 — нормированные потоки и параметры гистерезиса в первом и втором кольце

соответственно, а k — сила связи по потоку между кольцами (нормированная взаимная индуктивность). Напомним, что x_1 и x_2 уже смещены на величину 0,5 для симметризации потенциала. Знак «-» перекрестного члена означает, что потоки колец направлены навстречу друг другу.

На рис. 7 показана форма потенциальной поверхности для системы двух связанных колец при раз-

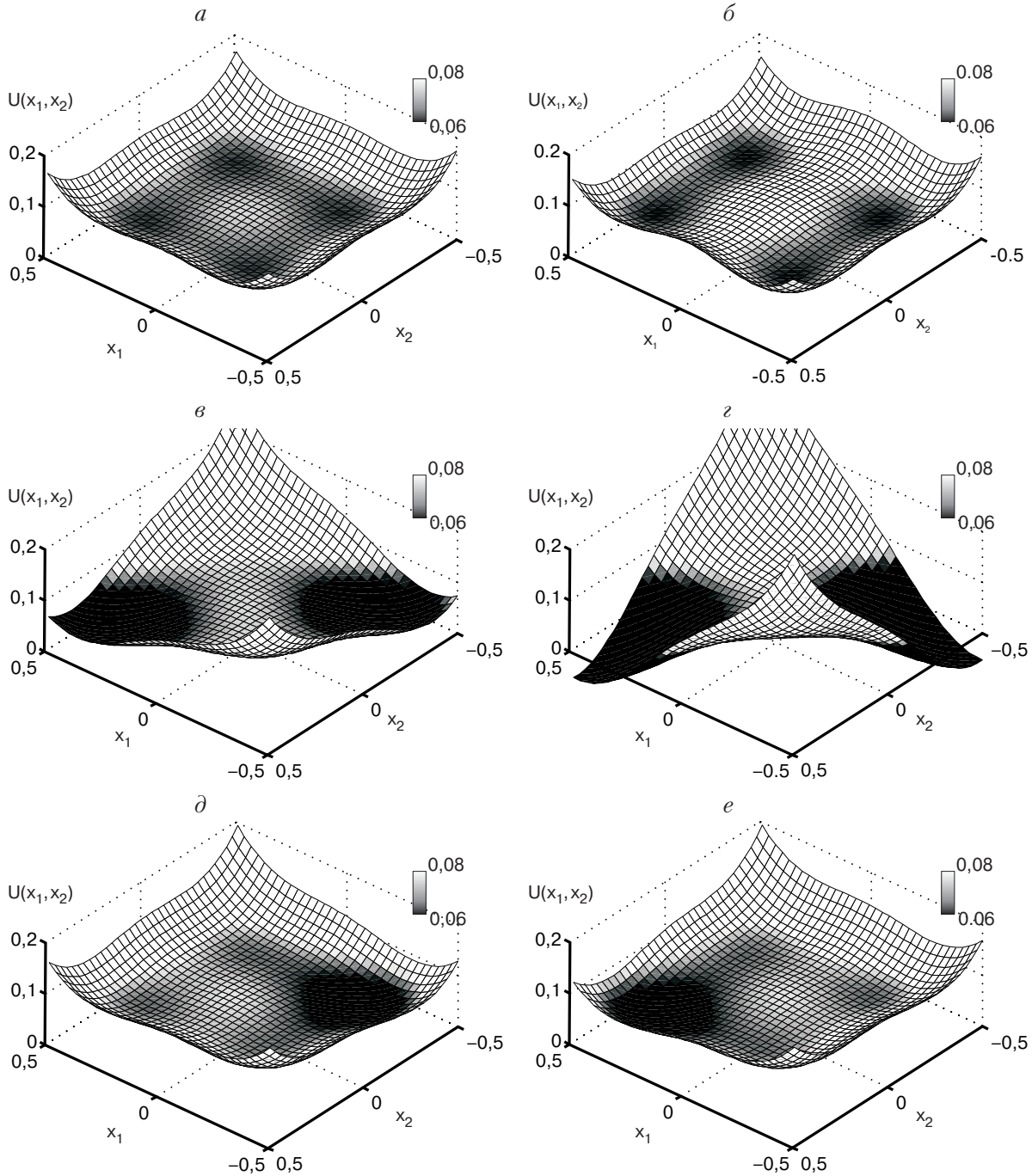


Рис. 7. Поверхность потенциала $U(x_1, x_2)$ для двух связанных колец ВЧ СКВИДа в отсутствие дополнительного смещения, входного сигнала и шума при значениях параметров: $\beta_1 = \beta_2 = 1,5$, $k = 0$ (а); $\beta_1 = 1,5$, $\beta_2 = 2$, $k = 0$ (б); $\beta_1 = \beta_2 = 1,5$, $k = 0,4$ (в); $\beta_1 = \beta_2 = 1,5$, $k = 0,9$ (г) и при смещении внешним сигналом при: $\beta_1 = \beta_2 = 1,5$, $k = 0,1$, $x_e = -0,02$ (д); $\beta_1 = \beta_2 = 1,5$, $k = 0,1$, $x_e = +0,02$ (е).

личных значениях параметров гистерезиса β_1 , β_2 (рис. 7, *a, б*) и коэффициента связи k (рис. 7, *в, г*).

Наложение периодического синусоидального сигнала и шума, как и в случае с одним кольцом, приводит к перекосу потенциала, зависящему от времени:

$$U(x_1, x_2, t) = \frac{[x_1 - x_{e1}(t)]^2 + [x_2 - x_{e2}(t)]^2}{2} + \frac{(\beta_1 \cos 2\pi x_1 + \beta_2 \cos 2\pi x_2)}{4\pi^2} - kx_1x_2, \quad (12)$$

где внешние потоки $x_{e1}(t)$, $x_{e2}(t)$ определяются формулой (6), в которой постоянное смещение x_{dc} полагается равным нулю.

Все дальнейшие результаты расчета показаны для случая $x_{e1}(t) = x_{e2}(t) = x_e(t)$, как имеющего наибольшее практическое значение.

На рис. 7, *д, е* показаны две «фазы» наклона потенциала внешним потоком.

Как видно на рис. 7, в случае пары связанных колец система имеет возможность попасть в одну из четырех ям потенциальной поверхности.

Процедура определения текущего состояния системы в этом случае несколько сложнее. Учитывается исчезновение барьера между ямой, в которой в данный момент находится система, и соседними ямами. Если оба барьера уменьшаются до нуля одновременно, то вероятность перехода системы в соседние ямы одинакова, и новое текущее состояние выбирается из двух случайным образом. В ходе моделирования выяснилось, что при наличии четырех ям переход системы происходит не сразу по диагонали, а с промежуточным перескоком через ближайший минимум, так как высота барьера между ближайшими минимумами меньше, чем между ямами, расположенными по диагонали.

Полученная временная зависимость суммарного потока в кольцах, так же как и в случае одного кольца, подвергалась БПФ. Таким же образом по высоте спектрального пика на частоте полезного сигнала рассчитывались коэффициент усиления по потоку и отношение сигнал/шум. Полученные зависимости η от уровня шума s и коэффициента связи k показаны на рис. 8, *a* для случая одинаковых колец, а на рис. 8, *б* — для случая колец с различными параметрами гистерезиса β . Как показывает расчет, отношение сигнал/шум ведет себя аналогичным образом, однако разброс рассчитанных точек относительно велик из-за большого разброса в определении шумовой «полочки».

Если параметры гистерезиса β_1 и β_2 колец различны, то на зависимости коэффициента усиления от уровня шума $\eta(s)$ появляется особенность, соот-

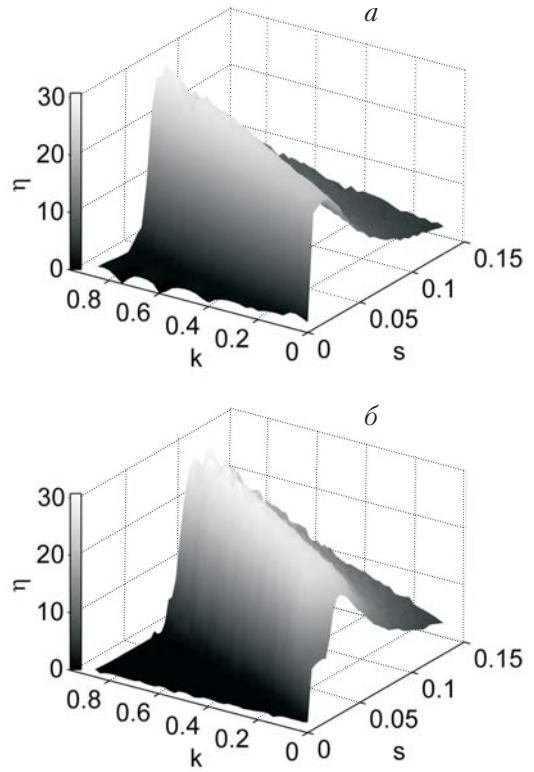


Рис. 8. Коэффициент усиления по потоку η в зависимости от уровня шума s и коэффициента связи k для одинаковых колец (*a*) и различных колец (*б*). Амплитуда сигнала $a = 0,03$, частота $f_s = 2$ Гц, параметры гистерезиса $\beta_1 = \beta_2 = 1,5$ (*a*); $\beta_1 = 1,5$, $\beta_2 = 2$ (*б*).

ветствующая резонансу кольца с меньшим β , в дополнение к максимуму, соответствующему суммарному резонансу обоих колец. Видно, что в случае одинаковых колец достигается более высокий коэффициент усиления. В обоих случаях усиление потока растет при увеличении силы связи k между кольцами. Коэффициент усиления в случае сильной связи значительно превышает таковой в одиночном кольце (сравните рис. 4 и 8, *a*). Этому эффекту можно дать прозрачную интерпретацию в терминах геометрии потенциальной поверхности. При увеличении коэффициента связи два из четырех минимумов постепенно исчезают (на рис. 7 — переход от поверхности вида *a* к поверхности вида *в* и *г*), и теперь поведение связанной пары подобно поведению одиночного кольца с тем, однако, отличием, что минимумы расположены по диагонали и расстояние между ними больше, чем в одиночном СКВИДе, что и приводит к увеличению эффекта СР. Исходя из этой геометрической интерпретации можно ожидать, что с увеличением числа связанных колец будет наблюдаться рост коэффициента усиления $\sim N^{1/2}$, где N — число связанных колец.

Моделирование СР в 4-терминальном СКВИДе

Стохастический резонанс в 4-терминальном СКВИДе [24] при относительно высоких частотах сигнала рассматривался в [25]. Это позволило получить временную эволюцию полного магнитного потока в кольце путем непосредственного численного решения уравнения движения при наличии шума. При низких частотах сигнала непосредственное решение уравнения движения становится чрезвычайно длительным процессом, так как из-за наличия шумовой компоненты не удастся использовать преимущества методов решения дифференциальных уравнений, разработанных для жестких систем. Однако численное моделирование в адиабатическом приближении не представляет особой сложности. Если ограничиться случаем нулевого транспортного тока I и учесть, что $\theta = 0$, то потенциал, описывающий 4-SQUID [24]

$$U(\theta, \varphi, \chi |_{I, \varphi^e}) = \frac{(\varphi - \varphi^e)^2}{2l} - I\theta - \cos^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 2 \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \chi, \quad (13)$$

можно записать в виде

$$U(\varphi) = \frac{(\varphi - \varphi^e)^2}{2l} - 1 - \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 2 \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right|. \quad (14)$$

Этот потенциал (рис. 9) не эквивалентен потенциалу кольца ВЧ СКВИДа, содержащего обычный 2-терминальный контакт Джозефсона. В отличие от обычного СКВИДа, даже в случае, когда параметр безразмерной индуктивности $l < 1$, потенциал остается двухъямным.

Действительно, численное моделирование показывает наличие СР в таком кольце. На рис. 10 при-

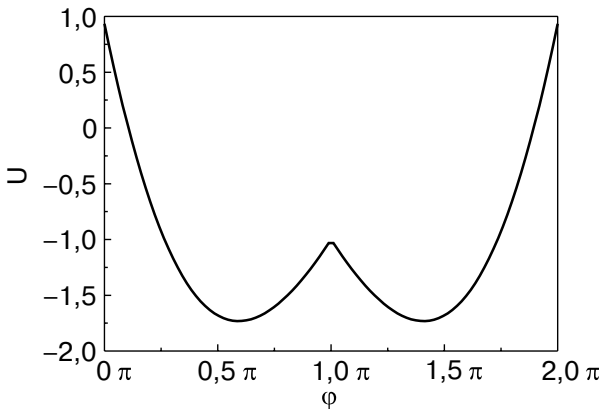


Рис. 9. Потенциал 4-терминального СКВИДа при $l = 1$, $I = 0$, $\varphi_e = \pi$.

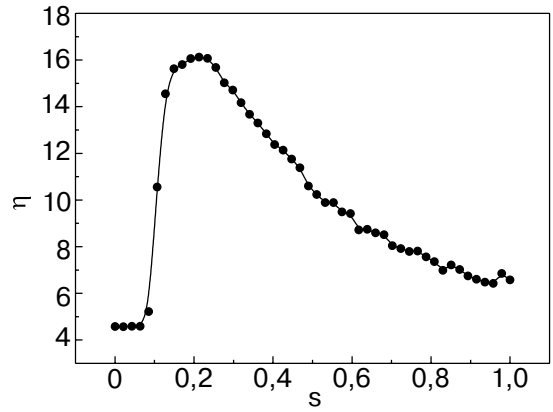


Рис. 10. Коэффициент усиления η по потоку в зависимости от уровня шума s в кольце 4-терминального СКВИДа. Параметры: $l = 0,5$, $f_s = 2$ Гц, $a = 0,25$.

веден коэффициент усиления синусоидального сигнала по потоку в зависимости от уровня шума.

Подробное исследование СР в 4-терминальном СКВИДе, в том числе при наличии транспортного тока через слабую связь, выходит за рамки данной публикации.

Стохастические антенны

В настоящее время даже стандартные приемники на основе СКВИДов имеют собственную чувствительность на уровне 10^{-32} – 10^{-31} Дж/Гц. Однако реализация такой чувствительности во многих случаях ограничивается шумами антенных цепей, которые в большинстве устройств являются широкополосными. Для уменьшения влияния внешних электромагнитных полей входные цепи СКВИДов изготавливаются в виде градиентометров и частично фильтруются с помощью RL -фильтров. Однако RL -фильтры увеличивают спектральную плотность шума в антенне, а градиентометры уменьшают чувствительность приемных устройств по отношению к источникам, расположенным в дальней зоне [16]. Указанные проблемы частично можно решить за счет использования явления СР в антенных устройствах.

Из результатов, приведенных выше, следует, что если площадь приемной антенны будет заполнена одним или несколькими СР контурами (рис. 11), то ток, наводимый в антенне, будет иметь частотную зависимость с максимумом на частоте резонанса. Поскольку этот максимум зависит от мощности шума, то частотную характеристику антенны можно в некоторых пределах подстраивать под частоту внешнего гармонического сигнала, получая максимальный коэффициент трансформации магнитного потока в СКВИД на заданной частоте. Интересно отметить, что в области инфранизких частот, лежащих ниже частоты СР резонанса, такие антенны

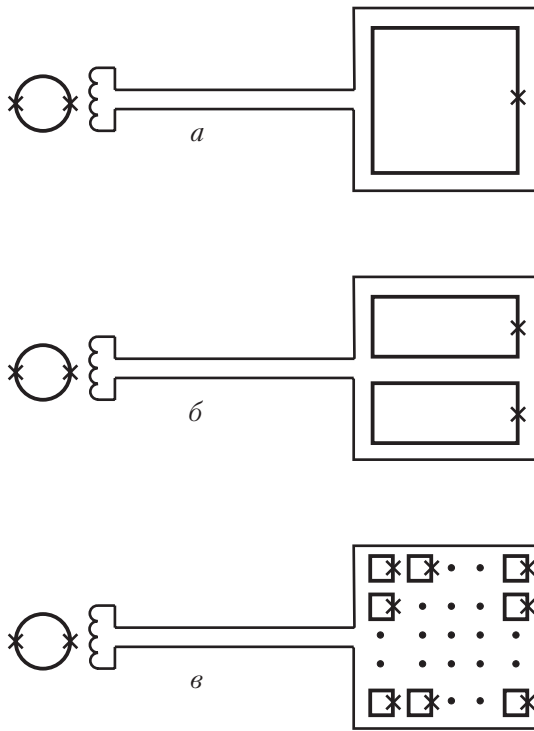


Рис. 11. Возможные конфигурации стохастических антенн для приема слабых квазигармонических сигналов с помощью СКВИДов: (а,б) — антенны для СКВИД-микроскопов, (в) — антенны для низкочастотных радаров, геофизических магнитометров и биоманнитных измерений.

имеют небольшой коэффициент трансформации и являются своеобразными фильтрами, в то время как на выбранной частоте СР можно получить даже усиление слабого сигнала. В некоторых видах приемных устройств на основе СКВИДов (см., например, [15–17]) низкочастотные магнитные поля используются для зондирования измеряемых объектов, в этом случае полезная информация содержится в отраженном гармоническом (или квазигармоническом) сигнале, который может усиливаться с помощью СР антенн.

Проведенный анализ показывает, что при заполнении площади планарных антенн большим числом стохастических контуров важно использовать системы с малым разбросом параметров. Например, одним из требований является минимальный разброс по критическому току, амплитуда которого контролирует высоту потенциального барьера. Это условие очень хорошо выполняется в π -контактах, детально исследованных в работе [22]. Более того, основным состоянием сверхпроводящего кольца, замкнутого подобным π -контактом, является состояние с двухъямным симметричным потенциалом, необходимым для возникновения стохастического резонанса. Поскольку характерное нормальное сопротивление таких контактов достаточно велико

($R \sim 1$ Ом), то собственное время L/R не ограничивает рассмотренную стохастическую динамику.

Заключение

Явление стохастического резонанса в системах, содержащих сверхпроводящий контур со слабой джозефсоновской связью, позволяет получить дополнительное усиление слабого магнитного сигнала. Связывание даже двух таких контуров между собой общим магнитным потоком приводит к заметному (почти в 1,5 раза) увеличению коэффициента усиления потока и отношения сигнал/шум. Ожидается, что с увеличением числа связанных колец коэффициент усиления и отношение сигнал/шум будут расти приблизительно по корневому закону. Этот эффект можно использовать для создания принципиально новых стохастических антенн СКВИДов, позволяющих получить относительно большое усиление при наличии шума. Использование π -контакта в качестве слабой связи позволяет обойтись без дополнительного смещения внешним постоянным потоком.

Стохастический резонанс в сверхпроводящем кольце, содержащем 4-терминальный контакт Джозефсона (4-терминальный СКВИД), интересен с той точки зрения, что параметрами 4-СКВИДа можно управлять, меняя условия для возникновения СР. Это, в принципе, позволяет создать стохастический усилитель с перестраиваемой полосой сигнала и с подстройкой рабочей точки под определенный уровень шума (внешнего и внутреннего).

Удобным методом исследования СР в этих и других системах в адиабатическом пределе является численное моделирование, основанное на анализе изменений геометрии потенциальной поверхности системы, вызванных внешними воздействиями.

1. R. Benzi, A. Sutera, and A. Vulpiani, *J. Phys.* **A14**, L453 (1981).
2. J.-P. Eckmann, L. Thomas, and P. Wittwer, *J. Phys.* **A14**, 3153 (1981).
3. C. Nicolis and G. Nicolis, *Tellus* **33**, 225 (1981).
4. L. Gammaitoni, P. Hanggi, P. Jung, and F. Marchesoni, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 223 (1998).
5. В.С. Анищенко, А.Б. Нейман, Ф. Мосс, Л. Шиманский-Гайер, *УФН* **169**, 7 (1999).
6. B. McNamara and K. Wiesenfeld, *Phys. Rev.* **A39**, 4854 (1989).
7. M. Dykman, P. McClintock, R. Manella, and N. Stocks, *JETP Lett.* **52**, 141 (1990).
8. P. Jung, *Phys. Rep.* **234**, 175 (1993).
9. I.Kh. Kaufman, G.G. Luchinsky, P.V.E. McClintock, S.M. Soskin, and N.D. Stein, *Phys. Lett.* **A220**, 219 (1996).
10. Z. Gingl, L.B. Kiss, and F. Moss, *Europhys. Lett.* **29**, 191 (1995).

11. J.M.G. Vilar, G. Gomila, and J.M. Rubi, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 14 (1998).
12. A.M. Glukhov, A.G. Sivakov, and A.V. Ustinov, *Fiz. Nizk. Temp.* **28**, 543 (2002).
13. R. Rouse, Siyuan Han, and J.E. Lukens, *Appl. Phys. Lett.* **66**, 108 (1995).
14. A.D. Hibbs and A.L. Singaas, *J. Appl. Phys.* **77**, 2582 (1995).
15. A.D. Hibbs, R.E. Sager, D.W. Cox, T.H. Aukerman, T.A. Sage, and R.S. Landis, *Rev. Sci. Instrum.* **63**, 3652 (1992).
16. R.V. Czipott and V.N. Podney, *IEEE Trans. Magn.* **25**, No.2, 1204 (1989).
17. J.P. Wilksw, Jr., *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **5**, 74 (1995).
18. V.I. Shnyrkov and Yu.P. Bliokh, in: *XII Trilateral German-Russian-Ukrainian Seminar on High-Temperature Superconductivity, Kiev, 25-29 October 1999, Program and Abstracts*, p. 81.
19. A. Neiman and L. Schimansky-Geier, *Phys. Lett.* **A197**, 379 (1995).
20. В.А. Хаус, А.Н. Омелянчук, И.О. Кулик, *ФНТ* **5**, 118 (1979); К.К. Likharev, *Rev. Mod. Phys.* **51**, 101 (1979).
21. А. Бароне, Дж. Патерно, *Эффект Джозефсона*, Мир, Москва (1984).
22. S.M. Frolov, D.J. Van Harlingen, V.A. Oboznov, V.V. Bolginov, and V.V. Ryazanov, *Phys. Rev.* **B70**, 144505 (2004).
23. H.A. Kramers, *Physica* **7**, 284 (1940).
24. R. de Bruyn Ouboter and A.N. Omelyanchouk, *Superlattices and Microstructures* **25**, 1005 (1999).
25. O.G. Turutanov, A.N. Omelyanchouk, V.I. Shnyrkov, and Yu.P. Bliokh, *Physica* **C372-376**, 237 (2002).

Stochastic resonance in superconducting loops with Josephson junctions. Numerical simulation

A.M. Glukhov, O.G. Turutanov, V.I. Shnyrkov, and A.N. Omelyanchouk

Numerical simulation of stochastic resonance has performed in the adiabatic approximation for overdamped systems based on superconducting loops shorted by a weak link. The systems under consideration involved a single rf SQUID loop, two loops coupled by a common magnetic flux, and a loop shorted by a 4-terminal Josephson junction. It is shown that the coupling of single SQUID loops tends to increase the gain and signal-to-noise ratio. These effects can be used for creating new stochastic SQUID antennas to measure harmonic and quasi-harmonic signals. The stochastic resonance in 4-terminal SQUIDs exists even at dimensionless inductance values $l < 1$.

Keywords: stochastic resonance, SQUID, Josephson junction, numerical simulation.