

Хаотическая динамика ядерной намагниченности, обусловленная резонаторными эффектами

А.И. Угулава, Л.Л. Чоторлишвили, З.З. Токликишвили, А.В. Сагарадзе

Тбилисский государственный университет, ул. Чавчавадзе, 3, г. Тбилиси, 0128, Грузия
E-mail: lchotor@yahoo.com

Статья поступила в редакцию 3 октября 2005 г., после переработки 29 марта 2006 г.

Рассмотрена нелинейная система уравнений Блоха для описания динамики намагниченности в случае слабой и сильной нелинейности. Нелинейность появляется вследствие влияния колебательного контура. Показано, что в случае слабой нелинейности с помощью теории возмущений можно получить аналитическое решение, хорошо согласующееся с результатами численных расчетов. В случае сильной нелинейности движение намагниченности может носить стохастический характер, похожий на странный аттрактор. Оценена фрактальная размерность стохастического аттрактора.

Розглянуто нелінійну систему рівнянь Блоха для опису динаміки намагніченості у випадку слабкої та сильної нелінійності. Нелінійність з'являється унаслідок впливу коливального контуру. Показано, що у випадку слабкої нелінійності за допомогою теорії збурювань можна одержати аналітичне рішення, що добре узгоджується з результатами чисельних розрахунків. У випадку сильної нелінійності рух намагніченості може носити стохастичний характер, схожий на дивний аттрактор. Оцінено фрактальну розмірність стохастичного аттрактора.

PACS: 76.60.-k

Ключевые слова: динамика намагниченности, стохастический аттрактор, нелинейная система уравнений Блоха.

В последнее время ведется интенсивное исследование нелинейных эффектов в системах ядерных магнитных моментов, обусловленных воздействием резонатора (колебательного контура) на динамику ядерной намагниченности [1–4]. Резонаторные эффекты основаны на обратном воздействии на нее наведенного намагниченностью поля в резонаторе. Из-за прецессии ядерной намагниченности колебательный контур пронизывает переменный магнитный поток. Согласно закону магнитной индукции, это приводит к возникновению индуцированного магнитного поля, которое, в свою очередь, воздействует на динамику ядерной намагниченности. О возникновении обратной связи в колебательных контурах детально можно ознакомиться в монографии [5]. В результате такой обратной связи уравнения, описывающие динамику ядерной намагниченности (уравнения Блоха), оказываются нелинейными. Нелинейность, в свою очередь, может послужить причиной появления динамической стохастичности

[6–9] в ядерной спиновой системе. Было исследовано усиление сигнала ядерного спинового эха в магнетиках [10], радиочастотное сверхизлучение ядерными магнитными моментами, обусловленное резонаторными эффектами [11–13].

Цель данной работы — изучение динамики ядерной намагниченности при одновременном воздействии на систему направленного вдоль оси Z постоянного магнитного поля H_0 , направленного вдоль оси X радиочастотного (РЧ) поля с частотой ω и амплитудой H_1 и наведенного самой намагниченностью \mathbf{M} поля $H_M = \eta M^+ e^{i\varphi} / \gamma_n$ [14]. Здесь $M^+ = M_x + iM_y$; γ_n — гиромагнитное отношение для ядер, φ — фаза наведенного намагниченностью поля; η — коэффициент, определяемый параметрами колебательного контура [14]: $\eta = 2\pi\omega_0 L/R$, где L — индуктивность катушки, R — сопротивление, $\eta_0 = A_s/A_c$ — коэффициент заполнения катушки образцом, A_s — площадь сечения образца, A_c — площадь сечения катушки.

С учетом сказанного выше, уравнения Блоха, описывающие динамику ядерной намагниченности, примут вид

$$\begin{cases} \dot{M}_x = \delta M_y + \eta M_z (M_x \sin \varphi - M_y \cos \varphi) - \frac{M_x}{T_2}, \\ \dot{M}_y = -\delta M_x - \omega_1 M_z + \eta M_z + \\ \quad + \eta M_z (M_x \cos \varphi + M_y \sin \varphi) - \frac{M_y}{T_2}, \\ \dot{M}_z = -\omega_1 M_y - \eta \sin \varphi (M_x^2 + M_y^2) - \frac{M_z - M_0}{T_1}, \end{cases} \quad (1)$$

где $\delta = \omega - \omega_0$ — расстройка между частотой ядерного магнитного резонанса (ЯМР) ω_0 и частотой переменного радиочастотного поля ω ; T_1 и T_2 — времена продольной и поперечной ядерной магнитной релаксации; $\omega_1 = H_1 \gamma_n$ — амплитуда радиочастотного поля в частотных единицах.

Для удобства в системе уравнений (1) перейдем к безразмерным величинам:

$$\begin{aligned} t \rightarrow \omega_1 t, \quad \frac{\eta M_0}{\omega_1} = \gamma, \quad \delta \rightarrow \frac{\delta}{\omega_1}, \quad T_{1,2} \rightarrow \omega_1 T_{1,2} \rightarrow \Gamma_{1,2}, \\ M_x \rightarrow \frac{M_x}{M_0} = x, \quad M_y \rightarrow \frac{M_y}{M_0} = y, \\ M_z \rightarrow \frac{M_z}{M_0} = z, \quad M_0 = |\mathbf{M}(0)|. \end{aligned}$$

В новых переменных система уравнений (1) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \delta y + \gamma z (\alpha x - \beta y) - \frac{x}{\Gamma}, \\ \dot{y} = -\delta x - \frac{y}{\Gamma} - z + \gamma z (\beta x + \alpha y), \\ \dot{z} = y - \frac{z}{\Gamma} + \frac{1}{\Gamma} - \gamma \alpha (x^2 + y^2), \end{cases} \quad (2)$$

где введены обозначения $\alpha = \sin \varphi$, $\beta = \cos \varphi$. Кроме того, мы допустили, что времена продольной и поперечной релаксации — величины одного порядка: $\Gamma_1 \cong \Gamma_2 \equiv \Gamma$. Такое предположение справедливо для жидкостей.

Случай слабой нелинейности исследуем с помощью метода возмущений, когда за возмущение принимаются нелинейные слагаемые. Для применения теории возмущений необходимо систему уравнений (2) привести к каноническому виду. Следуя стандартной методике [15], можно показать, что преобразования, приводящие систему уравнений (2) к каноническому виду, имеют вид

$$\begin{cases} x_1 = 2\delta x + 2z, \\ y_1 = -2\lambda y, \\ z_1 = -\frac{1}{\delta} x + z, \end{cases} \quad (3)$$

где $\lambda = \sqrt{1 + \delta^2}$.

Записав с помощью преобразования (3) уравнения движения (2), для переменных x_1, y_1, z_1 получим

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{\Gamma} x_1 - \lambda y_1 + \frac{\beta \gamma \delta}{2\lambda^3} x_1 y_1 + \frac{\beta \gamma \delta^3}{\lambda^3} y_1 z_1 - \frac{\alpha \gamma}{2\lambda^2} y_1^2 + \frac{\alpha \gamma \delta^2}{\lambda^2} x_1 z_1 - \frac{2\alpha \gamma \delta^2}{\lambda^2} z_1^2, \\ \dot{y}_1 = \lambda x_1 - \frac{y_1}{\Gamma} - \frac{\beta \gamma \delta}{2\lambda^3} x_1^2 + \frac{\beta \gamma \delta}{\lambda^3} x_1 z_1 - \frac{2\beta \gamma \delta^3}{\lambda^3} z_1^2 + \frac{\alpha \gamma}{2\lambda^2} x_1 y_1 + \frac{\alpha \gamma \delta^2}{\lambda^2} y_1 z_1, \\ \dot{z}_1 = -\frac{z_1}{\Gamma} - \frac{\beta \gamma}{4\delta \lambda^3} x_1 y_1 - \frac{\beta \gamma \delta}{2\lambda^3} y_1 z_1 - \frac{\alpha \gamma}{4\lambda^2} x_1^2 - \frac{\gamma \alpha}{4\lambda^2} y_1^2 + \frac{\gamma \alpha}{2\lambda^2} x_1 z_1 + \frac{1}{\Gamma}. \end{cases} \quad (4)$$

Пренебрегая релаксационными процессами (т.е. рассматривая решения для интервалов времени, меньших времени релаксаций: $t < T_{1,2}$), можно получить периодические решения системы уравнений (4). Введем для этого новый масштаб времени

$$t = \frac{\tau}{\lambda} (1 + h_2 c^2 + h_3 c^3 + \dots). \quad (5)$$

Здесь h_k — коэффициенты, соответствующий подбор которых обеспечивает периодичность решений:

$$h_{k-1} = \frac{1}{2\pi \lambda} \int_0^{2\pi} [x_1^{(k)}(\tau) \sin \tau - y_1^{(k)}(\tau) \cos \tau] d\tau. \quad (6)$$

Будем искать решения системы (4) в виде рядов

$$x_1 = \sum_{k=1}^{\infty} c^k x_1^{(k)}; \quad y_1 = \sum_{k=1}^{\infty} c^k y_1^{(k)}; \quad z_1 = \sum_{k=1}^{\infty} c^k z_1^{(k)}. \quad (7)$$

Подставляя (5) и (7) в (4) и используя условие (6), для решений, соответствующих первому, второму и третьему порядку теории возмущений и начальным условиям $x_1(0) = c$, $y_1(0) = 0$, $z_1(0) = z_1(2\pi)$, получаем следующие выражения:

$$x^{(1)}(\tau) = \frac{\delta \cos \tau}{2\lambda^2}, \quad y^{(1)} = -\frac{\sin \tau}{2\lambda}, \quad z^{(1)}(\tau) = \frac{\cos \tau}{2\lambda^2}, \quad (8)$$

$$\begin{cases} x^{(2)}(\tau) = \frac{\gamma\delta\{-\beta \cos 2\tau + 4 \sin \tau [\alpha\lambda(\cos \tau - 1) + \beta\delta \sin \tau]\}}{16\lambda^6}, \\ y^{(2)}(\tau) = -\frac{\alpha\gamma\lambda \cos \tau - \alpha\gamma\lambda \cos^2 \tau - \beta\gamma\delta \cos \tau \sin \tau}{4\lambda^5}, \\ z^{(2)}(\tau) = \frac{\gamma\{-\beta\delta^2 \cos 2\tau + 4 \sin \tau [\alpha\lambda(\cos \tau - 1) + \beta\delta \sin \tau]\}}{16\lambda^6}. \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} x^{(3)}(\tau) = \left(-\frac{\beta^2\gamma^2\delta}{16\lambda^{10}} + \frac{9\beta^2\gamma^2\delta^2}{512\lambda^{10}} - \frac{\beta^2\gamma^2\delta^3}{32\lambda^{10}} + \frac{\beta^2\gamma^2\delta^4}{256\lambda^{10}} - \frac{3\alpha^2\gamma^2\delta}{32\lambda^8} \right) \cos \tau + \frac{\alpha^2\gamma^2\delta \cos 2\tau}{8\lambda^8} + \\ + \left(\frac{\beta^2\gamma^2\delta}{48\lambda^{10}} - \frac{11\beta^2\gamma^2\delta^2}{1536\lambda^{10}} + \frac{\beta^2\gamma^2\delta^3}{32\lambda^{10}} - \frac{\beta^2\gamma^2\delta^4}{256\lambda^{10}} - \frac{\alpha^2\gamma^2\delta}{32\lambda^8} \right) \cos 3\tau + \\ + \left(-\frac{\alpha\beta\gamma^2}{4\lambda^9} - \frac{\alpha\beta\gamma^2\delta}{64\lambda^9} - \frac{\alpha\beta\gamma^2\delta^2}{16\lambda^9} - \frac{3\alpha\beta\gamma^2\delta^3}{128\lambda^9} \right) \sin \tau + \\ + \left(\frac{\alpha\beta\gamma^2}{16\lambda^9} + \frac{\alpha\beta\gamma^2\delta^2}{8\lambda^9} \right) \sin 2\tau + \left(-\frac{\alpha\beta\gamma^2}{48\lambda^9} - \frac{\alpha\beta\delta\gamma^2}{192\lambda^9} - \frac{\alpha\beta\delta^2\gamma^2}{16\lambda^9} + \frac{\alpha\beta\delta^3\gamma^2}{128\lambda^9} \right) \sin 3\tau, \\ y^{(3)}(\tau) = \left(-\frac{\alpha\beta\gamma^2\delta}{16\lambda^8} - \frac{\alpha\beta\gamma^2\delta^2}{128\lambda^8} \right) \cos \tau - \frac{\alpha\beta\gamma^2\delta}{8\lambda^8} \cos 2\tau + \left(-\frac{\alpha\beta\gamma^2\delta}{16\lambda^8} + \frac{\alpha\beta\gamma^2\delta^2}{128\lambda^8} \right) \cos 3\tau + \\ + \left(-\frac{13\beta^2\gamma^2\delta}{512\lambda^9} + \frac{\beta^2\gamma^2\delta^2}{32\lambda^9} + \frac{7\beta^2\gamma^2\delta^3}{256\lambda^9} + \frac{\alpha^2\gamma^2}{32\lambda^7} \right) \sin \tau - \frac{\alpha^2\gamma^2}{8\lambda^7} \sin 2\tau + \\ + \left(\frac{3\beta^2\gamma^2\delta}{512\lambda^9} - \frac{\beta^2\gamma^2\delta^2}{32\lambda^9} - \frac{\beta^2\gamma^2\delta^3}{256\lambda^9} + \frac{\alpha^2\gamma^2}{32\lambda^7} \right) \sin 3\tau, \\ z^{(3)}(\tau) = \left(\frac{\beta^2\gamma^2\delta}{512\lambda^{10}} + \frac{\beta^2\gamma^2\delta^2}{32\lambda^{10}} - \frac{3\beta^2\gamma^2\delta^3}{256\lambda^{10}} - \frac{3\alpha^2\gamma^2}{32\lambda^8} \right) \cos \tau + \frac{\alpha^2\gamma^2}{8\lambda^8} \cos 2\tau + \\ + \left(-\frac{\beta^2\gamma^2\delta}{512\lambda^{10}} + \frac{\beta^2\gamma^2\delta^2}{96\lambda^{10}} + \frac{\beta^2\gamma^2\delta^3}{768\lambda^{10}} - \frac{\alpha^2\gamma^2}{32\lambda^8} \right) \cos 3\tau + \left(\frac{7\alpha\beta\delta\gamma^2}{48\lambda^9} + \frac{\alpha\beta\delta^2\gamma^2}{192\lambda^9} \right) \sin \tau + \\ + \frac{\alpha\beta\gamma^2\delta}{16\lambda^9} \sin 2\tau + \left(-\frac{\alpha\beta\gamma^2\delta}{18\lambda^9} + \frac{5\alpha\beta\delta^2\gamma^2}{192\lambda^9} \right) \sin \tau \cos 2\tau. \end{cases} \quad (10)$$

Приступим к анализу полученных решений. Учитывая, что $\lambda = \sqrt{1 + \delta^2} > |\delta|$ и $|\alpha| \leq 1$, $|\beta| \leq 1$, условие применимости теории возмущений принимает следующий вид:

$$\frac{|x^{(2)}(\tau)|_{\max}}{|x^{(1)}(\tau)|_{\max}} \sim \frac{|y^{(2)}(\tau)|_{\max}}{|y^{(1)}(\tau)|_{\max}} \sim \frac{|z^{(2)}(\tau)|_{\max}}{|z^{(1)}(\tau)|_{\max}} < \frac{5}{4} \frac{\gamma}{\lambda^3} < 1, \quad (11)$$

$$\frac{|x^{(3)}(\tau)|_{\max}}{|x^{(2)}(\tau)|_{\max}} \sim \frac{|y^{(3)}(\tau)|_{\max}}{|y^{(2)}(\tau)|_{\max}} \sim \frac{|z^{(3)}(\tau)|_{\max}}{|z^{(2)}(\tau)|_{\max}} < \frac{4}{5} \frac{\gamma}{\lambda^2} < 1. \quad (12)$$

Учитывая, что $\gamma = \eta M_0 / \omega_1$ и $\delta = (\omega - \omega_0) / \omega_1$, с помощью формулы (12) можно получить критическое значение

$$\gamma_c = \frac{5}{4} \left(1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_1} \right)^2 \right), \quad (13)$$

при котором характер движения качественно меняется.

Как видно из (13), критическое значение параметра нелинейности γ_c однозначно определяется расстройкой и амплитудой переменного поля. Варьируя эти параметры, можно достичь перехода из области регулярной динамики ядерной намагниченности

$$\gamma < \gamma_c, \quad \omega_1 + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\omega_1} > \frac{4}{5} \eta M_0 \quad (14)$$

в ожидаемую область хаотической динамики

$$\gamma > \gamma_c, \quad \omega_1 + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\omega_1} < \frac{4}{5} \eta M_0. \quad (15)$$

Из неравенства (15) после несложных преобразований получим

$$\left(\omega_1 - \frac{2}{5} \eta M_0 \right)^2 + (\omega - \omega_0)^2 < \left(\frac{2}{5} \eta M_0 \right)^2. \quad (16)$$

Это неравенство определяет область значений параметров ω_1 и ω , где можно ожидать появления динамического хаоса. По отношению к параметрам ω_1 и ω эта область представляет собой круг (см. рис. 1). Полученный результат требует некоторых пояснений. Учитывая определение $\gamma = \eta M_0 / \omega_1$, можно подумать, что уменьшением амплитуды переменного поля ω_1 можно достичь увеличения величины γ и тем самым создания необходимых условий для возникновения динамического хаоса. С другой стороны, при отсутствии накачки речь не может идти ни о каком хаосе. Ответ на это противоречие заключается в том, что простым уменьшением амплитуды накачки ω_1 невозможно достичь выполнения условия $\gamma > \gamma_c$ (с уменьшением ω_1 растет и γ_c (см. формулу (13))). Для достижения хаоса необходим такой подбор параметров переменного поля, который обеспечит попадание в заштрихованную на рис. 1 область.

Условие (16) является необходимым, но не достаточным условием возникновения хаоса в системе. Более точное значение величины γ , при котором в системе возникает хаос, можно определить только с применением численных методов.

Условие (14) накладывает определенные ограничения на физические параметры рассматриваемой задачи. Используя оценку $\eta M_0 \sim 10^6$ Гц [14], для амплитуды РЧ поля и для расстройки между частотами ЯМР и РЧ получим

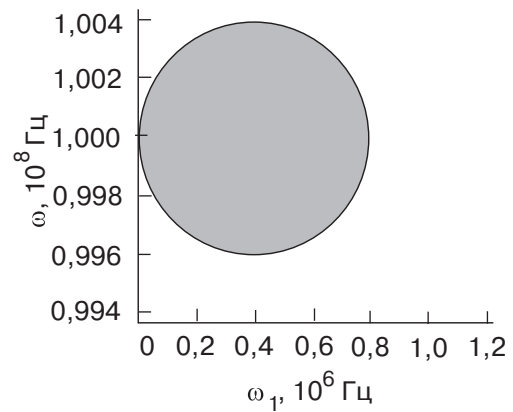


Рис. 1. Область сильного ангармонизма в плоскости параметров $(\omega_1; \omega)$ представлена заштрихованным кругом с радиусом $2\eta M_0/5$ и центром в точке $(2\eta M_0/5; \omega_0)$. Заштрихованная область определяет значения параметров переменного поля, при которых возможно появление хаоса. График построен согласно формуле (16) при значениях параметров $\eta M_0 = 10^6$ Гц и $\omega_0 = 10^8$ Гц.

$$\omega_1 = 3,3 \cdot 10^5 \text{ Гц}, \quad |\omega - \omega_0| > 0,47 \cdot 10^6 \text{ Гц}. \quad (17)$$

При выполнении условий (17), т.е. при больших значениях амплитуды радиочастотного поля и расстройки между частотами РЧ поля и зеемановской частотой, в системе ядерной намагниченности осуществляется регулярное, периодическое движение. Вследствие этого полученные аналитические решения (8)–(10) хорошо согласуются с результатами численного интегрирования (см. рис. 2).

Как видно на рис. 2, зависимость от времени поперечной компоненты ядерной намагниченности носит гармонический характер. Действительно, подставляя значения параметров, использованных при построении рис. 2, в решения (8)–(10), можно увидеть, что коэффициенты при членах с кратными частотами малы:

$$\begin{aligned} x_3(\tau) \sim & 0,24 \cos \tau - 0,001 \cos 2\tau - 0,0001 \cos 3\tau - \\ & - 0,001 \cos 0,5\tau \sin^3 0,5\tau + 0,007 \cos 0,5\tau \cos \tau \sin^3 0,5\tau - \\ & - 0,02 \sin \tau + 0,01 \sin 2\tau - 0,0003 \cos 2\tau \sin \tau + 0,01 \sin^2 \tau. \end{aligned} \quad (18)$$

Вследствие этого решения носят существенно линейный характер. При уменьшении амплитуды переменного поля, $\omega_1 = 1,4 \cdot 10^5$, ситуация меняется. Роль высших гармоник становится значимой:

$$\begin{aligned} x_3(\tau) \sim & 0,16 \cos \tau - 0,06 \cos 2\tau - 0,07 \cos 3\tau - \\ & - 0,08 \cos 0,5\tau \sin^3 0,5\tau + 0,45 \cos 0,5\tau \cos \tau \sin^3 0,5\tau - \\ & - 0,24 \sin \tau + 0,09 \sin 2\tau - 0,01 \cos 2\tau \sin \tau + 0,11 \sin^2 \tau, \end{aligned} \quad (19)$$

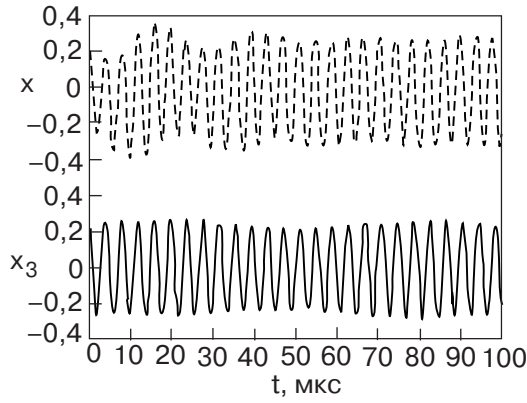


Рис. 2. Зависимость поперечной компоненты ядерной намагниченности от времени. График построен с использованием формул (8)–(10) и численного интегрирования системы уравнений (2) для значений параметров: $\omega_0 = 10^8$ Гц, $\omega_1 = 1,1 \cdot 10^6$ Гц, $\delta = 1,26$, $\eta M_0 = 10^6$ Гц, $c = 1$, $\alpha = \beta = \sqrt{2}/2$, $\gamma_c = 3,23$, $\gamma = 0,9$. Сплошная линия соответствует аналитическому решению, полученному в третьем порядке теории возмущения: $x_3(t) = x^{(1)}(t) + x^{(2)}(t) + x^{(3)}(t)$. Пунктирная линия — результат численного интегрирования системы уравнений (2) без учета релаксационных процессов. Численный результат (как и все другие численные результаты, приведенные в работе) получен с применением программного пакета MatLab 7.0.

и зависимость от времени решения, вследствие нелинейности, носит полихроматический характер (см. рис. 3).

Аналогичные результаты получаются и для $y_3(t)$ -компоненты ядерной намагниченности. Ввиду краткости изложения мы их не приводим.

При дальнейшем увеличении параметра γ (этот случай достигается при малых амплитудах РЧ поля $\omega_1 < 10^5$ Гц) в системе может возникнуть динамическая стохастичность. Вследствие этого возникает необходимость перехода от механического описания к стохастическому. Для описания процессов, происходящих в динамической системе, значимыми становятся статистические понятия — энтропия Колмогорова [6], фрактальная размерность странного аттрактора [17–19]. Эти понятия, являясь по определению статистическими, тесно связаны с механическими характеристиками системы, конкретно с локальной неустойчивостью фазовых траекторий. Наша цель — определение значений физических параметров задачи, при которых в системе уравнений (1) возникает странный аттрактор. Как показывают численные расчеты (см. рис. 4 и 5), этими значениями являются: $\eta M_0 = 10^6$ Гц, $\omega_1 = 2,9 \cdot 10^4$ Гц, $\omega_0 = 10^8$ Гц, $\delta = -1,26$, $T_1 = 1,72 \cdot 10^{-4}$ с, $T_2 = 0,86 \cdot 10^{-4}$ с, $\alpha = 0,172$, $\beta = 0,98$.

Хотя наличие странного аттрактора — неоспоримый факт, свидетельствующий о наличии хаоса, для

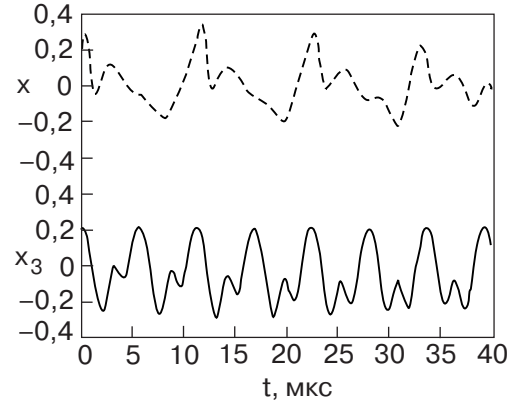


Рис. 3. Зависимость поперечной компоненты ядерной намагниченности от времени. График построен с использованием формул (8)–(10) и численного интегрирования системы уравнений (2) для значений параметров: $\omega_0 = 10^8$ Гц, $\omega_1 = 1,42 \cdot 10^5$ Гц, $\delta = 1,26$, $\eta M_0 = 10^6$ Гц, $c = 1$, $\alpha = \beta = \sqrt{2}/2$, $\gamma_c = 3$, $\gamma = 7$. Сплошная линия соответствует аналитическому решению, полученному в третьем порядке теории возмущения $x_3(t) = x^{(1)}(t) + x^{(2)}(t) + x^{(3)}(t)$. Пунктирная линия — результат численного интегрирования системы уравнений (2) без учета релаксационных процессов. Как видно, несмотря на ангармоничность, колебания носят регулярный характер.

полного подтверждения необходимо изучение корреляционных функций решений.

Для определения энтропии Колмогорова воспользуемся фурье-преобразованием корреляционной функции:

$$G_x(\tau) = \langle x(t + \tau)x(t) \rangle, \quad (20)$$

$$G_x(\omega) = \int d\tau G_x(\tau) e^{i\omega\tau} = \frac{\tau_c}{1 + \omega^2 \tau_c^2},$$

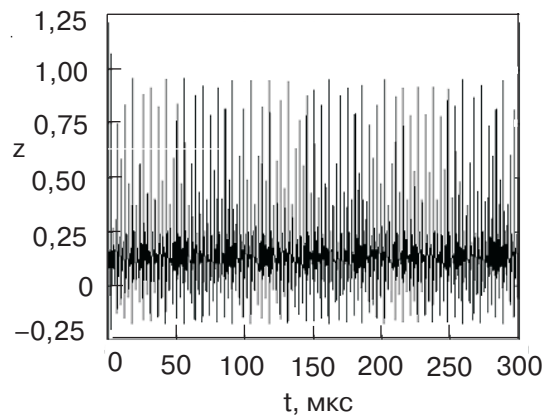


Рис. 4. Зависимость продольной компоненты ядерной намагниченности от времени. График получен путем численного интегрирования системы уравнений (2) в пренебрежении релаксационными процессами для значений параметров: $\eta M_0 = 10^6$ Гц, $\omega_1 = 2,9 \cdot 10^4$ Гц, $\omega_0 = 10^8$ Гц, $\delta = -1,26$, $\gamma_c = 3,23$, $\gamma = 35$, $\alpha = 0,172$, $\beta = 0,98$. Как видно, колебание носит хаотический характер.

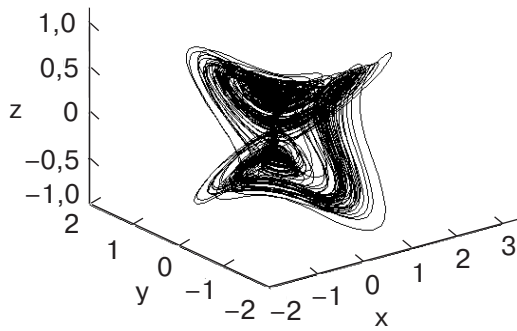


Рис. 5. Фазовый портрет странного аттрактора. График получен путем численного интегрирования системы уравнений (2) для значений параметров: $\eta M_0 = 10^6$ Гц, $\omega_1 = 2,9 \cdot 10^4$ Гц, $\omega_0 = 10^8$ Гц, $\delta = -1,26$, $T_1 = 1,72 \cdot 10^{-4}$ с, $T_2 = 0,86 \cdot 10^{-4}$ с, $\alpha = 0,172$, $\beta = 0,98$. Затемненные области, с большой плотностью фазовых траекторий, соответствуют притягивающим точкам, наличие которых характерно для странного аттрактора [8,9].

где $\langle(\dots)\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\dots) dt$ означает среднее по времени,

τ_c — время корреляции, связанное с энтропией Колмогорова соотношением $h_0 \sim 1/\tau_c$. При практических вычислениях для (20) удобнее воспользоваться методом быстрого фурье-преобразования [20,21]. Как показывают численные расчеты, длина корреляции равна $\tau_c \sim 3 \cdot 10^{-6}$ с. Результаты численных расчетов приведены на рис. 6.

Для определения фрактальной размерности странного аттрактора воспользуемся алгоритмом Грассбергера — Прокаччия [17–19].

Суть алгоритма состоит в следующем. Пусть из численного решения уравнений динамики получен набор векторов состояния $\{\chi_i, i = 1, 2, \dots, N\}$, отвечающих последовательным шагам интегрирования дифференциального уравнения. Задавшись некоторым (малым) ϵ , можно использовать полученный набор данных для оценки следующей суммы:

$$C(\epsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,j=1}^N \theta(\epsilon - |\chi_i - \chi_j|), \quad (21)$$

где θ — ступенчатая функция Хевисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Согласно алгоритму Грассбергера — Прокаччия, зная $C(\epsilon)$, можно определить фрактальную размерность странного аттрактора:

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{C(\epsilon)}{\log \epsilon}. \quad (22)$$

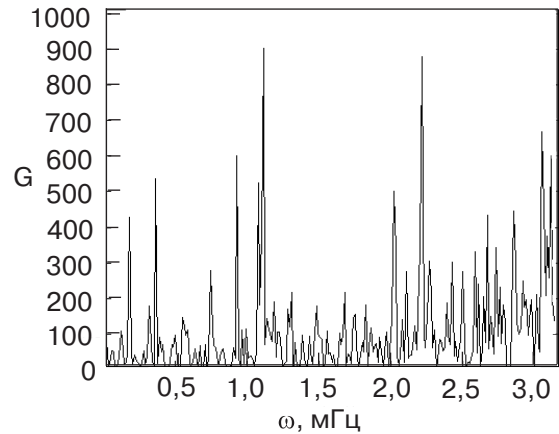


Рис. 6. Зависимость фурье-образа корреляционной функций от частоты ω . Наличие конечной ширины корреляционной функции $G(\omega)$ — доказательство появления хаоса. Иными словами можно сказать, что колебательный процесс не характеризуется определенной частотой (периодом). В колебательном процессе задействованы все частоты (периоды), расположенные в конечном частотном интервале $\delta\omega \sim 1/\tau_c = 3$ МГц.

Произведем расчет $C(\epsilon)$ при различных ϵ и представим результаты в координатах $\log(C(\epsilon))$ от $\log \epsilon$.

Предполагаемая зависимость $C(\epsilon)$ имеет вид ϵ^D , так что полученный график должен иметь вид прямой линии с угловым коэффициентом D . Результаты численных расчетов приведены на рис. 7.

Таким образом, можно сказать, что самовоздействие ядерной намагниченности, приводящее к нелинейностям уравнений движения, может послужить причиной появления динамической стохастичности в блоховской системе (1). Согласно (16), не-

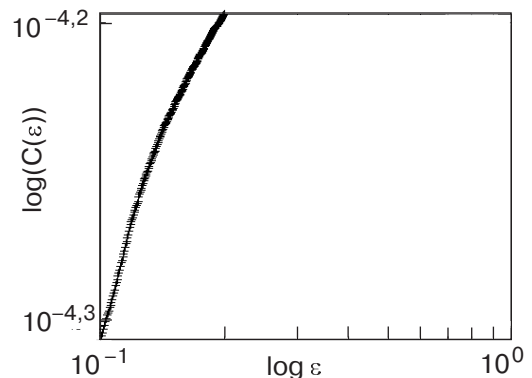


Рис. 7. График зависимости $\log(C(\epsilon))$ от $\log \epsilon$, построенный путем интегрирования системы уравнений (2) для значений параметров: $\eta M_0 = 10^6$ Гц, $\omega_1 = 2,9 \cdot 10^4$ Гц, $\omega_0 = 10^8$ Гц, $\delta = 1,26$, $T_1 = 1,72 \cdot 10^{-4}$ с, $T_2 = 0,86 \cdot 10^{-4}$ с, $\alpha = 0,172$, $\beta = 0,98$, $\gamma_c = 3,23$, с последующим применением формул (21), (22). Из этого графика можно оценить фрактальную размерность аттрактора по формуле $D = [\log(C(\epsilon_2)) - \log(C(\epsilon_1))] / [\log \epsilon_2 - \log \epsilon_1] \approx 2,22$, $\epsilon = 0,1$, $\epsilon_2 = 0,11$.

обходимые условия появления хаоса определяются параметрами резонатора и характеристиками переменного поля. Надлежащим подбором этих характеристик (при соблюдении условия резонанса $\omega \sim \omega_0$ и при амплитуде переменного поля $\omega_1 \sim \eta M_0$) происходит хаотизация системы. В результате в системе ядерной намагниченности происходит формирование стохастического аттрактора. Вычисленная размерность фазового пространства аттрактора не является целым числом, что свидетельствует об образовании фрактальных структур.

1. Л.Л. Чоторлишвили, В.М. Цхварадзе, *ФНТ* **30**, 739 (2004).
2. Ю.Ф. Кисилев, А.Ф. Прудкогляд, А.С. Шумовский, В.И. Юкалов, *ЖЭТФ* **94**, вып. 2, 344 (1988).
3. Н.А. Бажанов, Д.С. Буляница, А.И. Ковалев и др., *ФТТ* **31**, вып. 2, 206 (1989).
4. Yu.F. Kisilev, A.S. Shumovsky, and V.I. Yukalov, *Mod. Phys. Lett.* **3**, 1149 (1989).
5. В.В. Мигулин, В.И. Медведев, Е.Р. Мустель, В.Н. Парыгин, *Основы теории колебаний*, Наука, Москва (1978).
6. Г.М. Заславский, Р.З. Сагдеев, *Введение в нелинейную физику*, Наука, Москва (1988).
7. Г.М. Заславский, *Стохастичность динамических систем*, Наука, Москва (1988).
8. Ю.И. Неймарк, П.С. Ланда, *Стохастические и хаотические колебания*, Наука, Москва (1987).
9. Шустер, *Детерминированный хаос*, Мир, Москва (1988).
10. Н.П. Фокина, К.О. Хуцишвили, *ФММ* **10**, 44 (1991).
11. N.P. Fokina, K.O. Khutsishvili, and S.G. Chkhaidze, *Physica* **B179**, 171 (1992).
12. К.О. Khutsishvili and S.G. Chkhaidze, *Physica* **B176**, 54 (1992).
13. Н.П. Фокина, К.О. Хуцишвили, С.Г. Чхаидзе, *ЖЭТФ*, **102**, вып. 3, 1013 (1992).
14. R.F. Hobson and R. Kayser, *J. Mag. Reson.* **20**, 458 (1975).

15. Н.Н. Моисеев, *Асимптотические методы нелинейной механики*, Наука, Москва (1981).
16. И.М. Бабаков, *Теория колебаний*, Наука, Москва (1968).
17. P. Grassberger, *Phys. Lett.* **A97**, 227 (1983).
18. P. Grassberger, *Phys. Lett.* **A97**, 224 (1983).
19. P. Grassberger and I. Procaccia, *Physica* **D9**, 189 (1983).
20. G.M. Tenkins and D.G. Watts, *Spectral Analysis and its Applications*, Holden-Day (1978).
21. R.K. Otnes and L. Enochson, *Applied Time Series Analysis*, John Wiley and Sons (1978).

Chaotic dynamics of nuclear magnetization caused by resonator effects

A.I. Ugulava, L.L. Chotorlishvili, Z.Z. Toklikishvili, and A.V. Sagaradze

A nonlinear system of the Bloch equations, describing the motion of magnetization in the case of weak and strong nonlinearity has been studied. The nonlinearity is caused by the interaction with the oscillatory circuit. It is shown that in the case of weak nonlinearity, the analytical solution obtained with the use of the perturbation theory, is in good agreement with the numerical results. In the case of strong nonlinearity the motion of magnetization can be chaotic resembling a strange attractor. The fractional dimension of the stochastic attractor is estimated.

Keywords: motion of magnetization, stochastic attractor, nonlinear system of the Bloch equations.