

Об устойчивости заряженной поверхности жидкого диэлектрика

Л. Кушнир, В. Шикин

Институт физики твердого тела РАН, Черноголовка, Московская обл., 142432, Россия
E-mail: Kushnir_lv@mail.ru

Статья поступила в редакцию 30 декабря 2005 г., после переработки 15 февраля 2006 г.

Предложена теория возникновения неустойчивости границы двух жидких диэлектриков при наличии внешнего электрического поля, нормального этой границе. Исследованы детали критических условий неустойчивости в функции от внешних параметров задачи: отношения $\varepsilon = \varepsilon_1/\varepsilon_2$ диэлектрических постоянных двух сред с ε_1 и ε_2 , толщины жидких пленок, находящихся в контакте, и т.д. В частности, отмечена качественная разница в структуре возникающей гофрировки жидкой границы при изменении ε . В случае конечных значений ε критический период гофрировки остается конечным. Если же $\varepsilon \rightarrow 0$ (что соответствует бесконечной проводимости одной из сред), период гофрировки также неограниченно возрастает. Продемонстрирована возможность реконструкции жидкой границы в закритических условиях (возникновение механически равновесной гофрировки жидкой границы, амплитуда которой зависит от степени надкритичности, т.е. превышения электрического поля над критическим). Указано на существование двух режимов реконструкции: мягкого и жесткого, реализуемых при определенных соотношениях между внешними параметрами задачи. Обсуждаются детали «мягкой» реконструкции, где используемый формализм имеет реальную область применимости. Отмечено, что манипуляции с параметром $\varepsilon = \varepsilon_1/\varepsilon_2$ в обсуждаемой проблеме качественно эквивалентны варьированию степени заселенности δ поверхности криогенной жидкости заряженными частицами (электронами или ионами) от ее нулевого значения (случай свободной от зарядов поверхности жидкости) до ее максимального значения $\delta = 1$, когда общая задача дает ответы, характерные для развития неустойчивости свободной границы металлической жидкости.

Запропоновано теорію виникнення нестійкості границі двох рідких діелектриків при наявності зовнішнього електричного поля, нормального цій границі. Досліджено деталі критичних умов нестійкості у функції від зовнішніх параметрів задачі: відношення $\varepsilon = \varepsilon_1/\varepsilon_2$ діелектричних постійних двох середовищ з ε_1 і ε_2 , товщини рідких плівок, що знаходяться в контакті, і т.д. Зокрема, відзначено якісну різницю в структурі виникаючої гофровки рідкої границі при зміні ε . У випадку кінцевих значень ε критичний період гофровки залишається кінцевим. Якщо ж $\varepsilon \rightarrow 0$ (що відповідає нескінченній провідності одного із середовищ), період гофровки також необмежено зростає. Продемонстровано можливість реконструкції рідкої границі в закритичних умовах (виникнення механічно рівноважної гофровки рідкої границі, амплітуда якої залежить від ступеня надкритичності, тобто перевищення електричного поля над критичним). Зазначено на існування двох режимів реконструкції: м'якого і твердого, які реалізуються при визначених співвідношеннях між зовнішніми параметрами задачі. Обговорюються деталі «м'якої» реконструкції, де використовуваний формалізм має реальну область застосовності. Відзначено, що маніпуляції з параметром $\varepsilon = \varepsilon_1/\varepsilon_2$ в обговорюваній проблемі якісно еквівалентні варіюванню ступеня заселеності δ поверхні криогенної рідини зарядженими частками (електронами чи іонами) від її нульового значення (випадок вільної від зарядів поверхні рідини) до її максимального значення $\delta = 1$, коли загальна задача дає відповіді, характерні для розвитку нестійкості вільної границі металевої рідини.

PACS: 67.40.Pm, 47.27.Eq

Ключевые слова: заряженный жидкий диэлектрик, неустойчивость, реконструкция.

Введение

Проблема устойчивости заряженной поверхности жидкости возникла в 30-е годы в связи с обнаружением распада тяжелых атомных ядер. Капельный сценарий этой неустойчивости, предложенный Френкелем [1,2] и независимо Бором и Уилером [3], оказался первой приемлемой моделью, объясняющей происхождение этого фундаментального явления. Более ранний и менее знаменитый плоский вариант задачи о спектре колебаний заряженной поверхности жидкости (Френкель [4,5], Тонкс [6]) оказался востребованным по существу лишь в 70-е годы, когда начались интенсивные исследования свойств различных низкоразмерных заряженных образований. Одно из них — $2D$ заряженная система на поверхности жидких диэлектриков (гелия, водорода и т.п.) — в большой степени контролируется эффектом Френкеля, Тонкса [4–6], так как предсказанная ими неустойчивость ограничивает сверху плотность заряженных частиц на поверхности жидкого диэлектрика.

В последующие годы задача об устойчивости поверхности жидкости оказалась весьма продвинутой в нескольких направлениях: реконструкция свободной границы массивных жидких диэлектриков и феррожидкостей [7–12], неустойчивость и реконструкция плоской массивной заряженной поверхности жидкости [13–34], устойчивость цилиндрических и сферических жидких поверхностей [2,35–40], гравитационная неустойчивость жидкой поверхности в инверсионных условиях [41,42] и т.д. В частности, вполне самостоятельным является вопрос об устойчивости тонких заряженных пленок. Многие детали этого явления установлены лишь недавно и в совокупности не обсуждались. В настоящей работе такая программа реализована.

Речь идет об устойчивости и реконструкции диэлектрической пленки жидкости или границы двух сред на проводящей подложке при наличии внешнего поля E_{\perp} , нормального плоской поверхности пленки (см. рис. 1).

Варьирование диэлектрических постоянных ϵ_1 , ϵ_2 (точнее, их отношения на границе раздела двух сред) позволяет единообразно описать большинство эффектов деформационного происхождения, включая специальный случай проводящей жидкости. Следует подчеркнуть, что, кроме прямого толкования изложенной ниже теории, она дает при варьировании параметра $\epsilon = \epsilon_1/\epsilon_2$ и качественное представление о поведении заряженной границы между криогенными жидкостями. В этом случае абсолютные значения ϵ_1 и ϵ_2 близки к единице. Но двумерный проводящий слой принимает активное участие в процессах деформации границы раздела

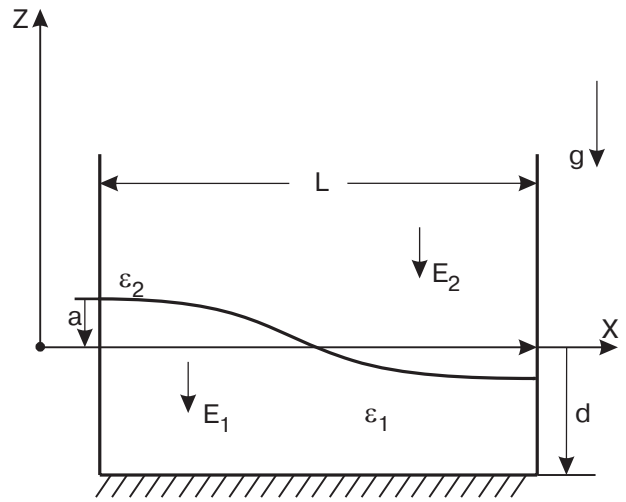


Рис. 1. Геометрия задачи и индексация полей.

двух криогенных сред. При этом параметр δ заряженной системы, имеющий смысл степени заряженности

$$\delta = n_s/n_s^c$$

(n_s — данная средняя плотность заряда на границе раздела двух жидкостей, n_s^c — ее критическое значение для данной пары жидкостей), качественно эквивалентен параметру ϵ . При $\delta \rightarrow 1$ заряженная граница криогенной жидкости проявляет деформационные свойства, характерные для металлической жидкой среды. Если же $\delta \rightarrow 0$, то речь идет о границе, лишенной свободных зарядов.

В первой части работы формулируются уравнения задачи и обсуждаются свойства этой системы в линейном по деформации формы границы раздела приближении на предмет обнаружения ее неустойчивости. Затем анализируется нелинейное поведение такой границы в закритических условиях, когда оказывается возможным новое, неплоское состояние границы раздела. Этот процесс гофрировки поверхности называется иначе ее реконструкцией.

1. Система уравнений и ее линейное поведение

Равновесная форма поверхности раздела двух жидких диэлектриков в постоянном электрическом поле определяется из баланса сил, действующих на поверхность:

$$(\sigma_{ik}^{(2)} - \sigma_{ik}^{(1)})n_k = \frac{\alpha}{R}n_i, \quad (1)$$

где σ_{ik} — тензор напряжений [2],

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} - \frac{E^2}{8\pi} \left[\epsilon - \rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T \right] \delta_{ik} + \frac{E_i D_k}{4\pi}; \quad (2)$$

p — давление в отсутствие поля, α — коэффициент поверхностного натяжения, n_i — вектор нормали, направленной из первой среды во вторую, E — электрическое поле, D — индукция, ε — диэлектрическая постоянная, ρ — плотность, R — радиус кривизны, связанный с искривлением границы раздела $z = \zeta(x)$. Невозмущенной поверхности соответствует $\zeta(x) = 0$.

Связь между R и $\zeta(x)$ определяется выражением

$$R = -(1 + \zeta'^2)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\zeta''}. \quad (3)$$

Знак в (3) выбираем таким образом, чтобы при $\zeta'' < 0$ (поверхность выпукла вверх) коэффициент при n_i в уравнении (1) был положительным (член, обусловленный лапласовым давлением, в этом случае того же знака, что и член, связанный с гидростатическим давлением во 2-й среде).

Для касательных компонент полей уравнение (1) удовлетворяется тождественно в силу граничных условий непрерывности D_n и E_τ :

$$D_{1n} = D_{2n} \text{ или } \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}, \quad E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (4)$$

В самом деле, из тангенциальной части (1)

$$(\sigma_{\tau\tau}^{(2)} - \sigma_{\tau\tau}^{(1)})n_\tau + (\sigma_{\tau n}^{(2)} - \sigma_{\tau n}^{(1)})n_n = \frac{\alpha}{R}n_\tau$$

видно, что это равенство является верным, так как $n_\tau = 0$, а

$$\sigma_{\tau n}^{(2)} - \sigma_{\tau n}^{(1)} = \frac{E_{2\tau}D_{2n}}{4\pi} - \frac{E_{1\tau}D_{1n}}{4\pi} = 0$$

в силу условий непрерывности.

Нормальная компонента (1) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{nn}^{(2)} - \sigma_{nn}^{(1)} &= \frac{\alpha}{R} - p_2 - \frac{E_2^2}{8\pi} \left[\varepsilon_2 - \rho_2 \left(\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \rho_2} \right)_T \right] + \\ &+ \frac{E_{2n}D_{2n}}{4\pi} + p_1 + \frac{E_1^2}{8\pi} \left[\varepsilon_1 - \rho_1 \left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \rho_1} \right)_T \right] - \frac{E_{1n}D_{1n}}{4\pi} = \frac{\alpha}{R}. \end{aligned} \quad (5)$$

Учитывая условия отсутствия объемных сил

$$f = \nabla \left(-p + \frac{\rho}{8\pi} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_T \right) E^2 - \rho g z = 0$$

и соотношения (4), получаем:

$$\begin{aligned} \text{const} - (\rho_1 - \rho_2)g\zeta + \frac{E_1^2}{8\pi} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \\ + \frac{E_{1n}^2}{8\pi} \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2} = - \frac{\alpha \zeta''}{(1 + \zeta'^2)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (6)$$

где E_1 — абсолютная величина поля внутри пленки (см. рис. 1), величина const необходима для контроля за требованием

$$\int \zeta(x) dx = 0, \quad (7)$$

которое в нелинейном случае не выполняется автоматически.

При $\zeta(x) \neq 0$ электрическое поле перестает быть однородным — с искривлением поверхности связано добавочное поле

$$e_i(x, z) = -\nabla_i \varphi(x, z),$$

потенциал которого удовлетворяет уравнению

$$\Delta \varphi_j = 0. \quad (8)$$

Здесь φ_1 и φ_2 — добавочные потенциалы соответственно в 1-й и 2-й средах. Граничные условия для этих потенциалов:

$$\varphi_2(x, z) \Big|_{z \rightarrow +\infty} = 0 \quad (9a)$$

$$\varphi_1(x, z) \Big|_{z = -d} = 0. \quad (9b)$$

Конечность толщины пленки одной из жидкостей содержится в (9b).

Обозначим через $(E_1^0)_i$ однородную составляющую электрического поля в пленке, т.е. величину напряженности поля при условии, что поверхность плоская. По условию этот вектор направлен противоположно оси z . Тогда для E_1 из (6) можно написать

$$E_1 = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \hat{x} - \left(E_1^0 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) \hat{z} \quad (10)$$

(\hat{x} — орт в направлении оси x , \hat{z} — орт в направлении оси z) или, с учетом

$$n_x = -\frac{\zeta'}{\sqrt{1 + \zeta'^2}}, \quad n_y = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta'^2}},$$

$$\begin{aligned} E_{1n} &= (E_1^0)_i n_i - (\nabla \varphi_1)_i n_i = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta'^2}} \left(-E_1^0 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \zeta' - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (10a)$$

Подставим эти выражения в уравнение (6), сохраняя компоненты разложений вплоть до 4-го порядка по амплитуде искривления поверхности (ограничение именно такой точностью станет ясным ниже, см. комментарии к формулам (24)–(26)). В связи с тем, что $\zeta, \zeta', \zeta'', \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}$ и $\frac{\partial \varphi_j}{\partial z}$ — величины одного порядка малости, имеем из (6) и (10a):

$$\begin{aligned} \text{const} + \frac{\varepsilon_2(\varepsilon - 1)}{8\pi} \left\{ \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \varepsilon \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \right)^2 + 2E \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} - 2 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} E \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} \zeta' - 2(\varepsilon - 1) \zeta' \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon^2} E^2 \zeta'^2 - \right. \\ \left. - 2 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} E \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \zeta'^2 + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon^2} \zeta'^4 E^2 + (\varepsilon - 1) \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} \right)^2 \zeta'^2 - (\varepsilon - 1) \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \right)^2 \zeta'^2 + 2E \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \zeta'^3 \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} \right\} - \\ - (\rho_1 - \rho_2) g \zeta + \alpha \zeta'' (1 - \frac{3}{2} \zeta'^2) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

здесь $E \equiv E_2^0$ — постоянная составляющая поля над пленкой, $\varepsilon = \varepsilon_1/\varepsilon_2$ — относительная диэлектрическая проницаемость сред.

Конкретизируем граничные условия непрерывности (4). Учитывая, что $E_2^0 = \varepsilon E_1^0$, а также (10а) и аналогичное выражение для E_{2n} , преобразуем первое из равенств (4):

$$\varepsilon \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = \zeta' \left(\varepsilon \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} \right), \quad (12)$$

аналогично из второго соотношения (4) получаем

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} E \zeta' - \zeta' \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} \right). \quad (13)$$

Система уравнений (8), (11) относительно $\varphi_i(x, z)$ и $\zeta(x)$ вместе с граничными условиями (7), (9), (12), (13) является полной с точностью до 4-го порядка малости по надкритичности, ее решение может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= a \cos kx + a^2 \beta \cos 2kx + a^3 \gamma \cos 3kx + a^4 \delta \cos 4kx; \\ \varphi_1 &= aA_1 \cos kx \text{sh}k(z+d) + a^2 B_1 \cos 2kx \text{sh}2k(z+d) + a^3 (C_{11} \cos kx \text{sh}k(z+d) + C_{31} \cos 3kx \text{sh}3k(z+d) + \\ &+ a^4 (D_{21} \cos 2kx \text{sh}2k(z+d) + D_{41} \cos 4kx \text{sh}4k(z+d))); \\ \varphi_2 &= aA_2 \cos kx e^{-kz} + a^2 B_2 \cos 2kx e^{-2kz} + a^3 (C_{12} \cos kx e^{-kz} + C_{32} \cos 3kx e^{-3kz}) + \\ &+ a^4 (D_{22} \cos 2kx e^{-2kz} + D_{42} \cos 4kx e^{-4kz}); \\ E &= E_0 + a^2 E_2 + \dots \\ k &= k_0 + a^2 k_2 + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Потенциалы φ_1 и φ_2 автоматически удовлетворяют уравнениям (8) и условиям (9).

Замена в этих формулах амплитуды гофрировки a на $-a$ должна приводить к решению, отличающемуся от (14) лишь сдвигом по оси x на полпериода. Поэтому разложения E и k содержат только четные степени a . Величины β, γ, δ , а также A_i, B_i, C_{ij}, D_{ij} имеют смысл неопределенных коэффициентов, E_0 и k_0 — критические значения внешнего электрического поля, при которых плоская поверхность теряет устойчивость (см. далее), E и k — реальные внешнее поле и волновой вектор.

Анализ формул (14) начнем с линейного приближения. Подставляя в уравнения (11), (12), (13) разложения (14), линейные по амплитуде a , находим

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= a \cos kx; \quad \varphi_1 = aA_1 \cos kx \text{sh}k(z+d); \\ \varphi_2 &= aA_1 \cos kx e^{-kz}; \quad E = E_0; \quad k = k_0; \\ A_1 &= \frac{(\varepsilon - 1)E_0}{\varepsilon(\text{sh}(kd) + \varepsilon \text{ch}(kd))}; \quad A_2 = -\frac{\text{ch}(kd)(\varepsilon - 1)E_0}{\text{sh}(kd) + \varepsilon \text{ch}(kd)} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \text{const}^{(1)} - a \cos kx \times \\ \times \left\{ \alpha k^2 - 2 \frac{(\varepsilon - 1)^2 E_0^2}{8\pi\varepsilon(\varepsilon + \text{th}(kd))} k + (\rho_1 - \rho_2) g \right\} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнение (16) имеет два решения:

$$\text{const}^{(1)} = 0, \quad a = 0$$

либо

$$\begin{aligned} \text{const}^{(1)} = 0, \quad a \neq 0, \\ \alpha k^2 - 2 \frac{(\varepsilon - 1)^2 E_0^2}{8\pi\varepsilon(\varepsilon + \text{th}(kd))} k + (\rho_1 - \rho_2) g = 0. \end{aligned}$$

Первое из них отвечает плоскому невозмущенному состоянию границы. Второе определяет границу устойчивости линейных колебаний формы границы с $a \neq 0$.

Более прозрачно это утверждение в динамической задаче, когда линейное приближение «выдает» закон дисперсии $\omega(k)$ колебаний заряженной границы раздела. Момент обращения в нуль квадрата

частоты $\omega^2(k_c) = 0$ отвечает равенству нулю выражения в фигурных скобках из (16). Для анализа этого требования введем функцию $F(k)$ с параметром E_0 :

$$F(k) = \alpha k^2 - 2 \frac{(\varepsilon - 1)^2 E_0^2}{8\pi\varepsilon(\varepsilon + \text{th}(kd))} k + (\rho_1 - \rho_2)g.$$

Найдем критическое значение параметра, при котором функция $F(k)$ достигает нулевого значения в точке своего минимума. Для этого надо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} F(k_0) = 0 \\ F'(k_0) = 0 \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} \alpha k_0^2 - \frac{(\varepsilon - 1)^2 E_0^2}{4\pi\varepsilon(\varepsilon + \text{th}(k_0 d))} k_0 + (\rho_1 - \rho_2)g = 0 \\ 2\alpha k_0 - \frac{(\varepsilon - 1)^2 E_0^2}{4\pi\varepsilon} \times \\ \times \left(\frac{1}{\varepsilon + \text{th}(k_0 d)} - \frac{k_0 d}{(\varepsilon + \text{th}(k_0 d))^2 \text{ch}^2(k_0 d)} \right) = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Выражая E_0^2 из первого уравнения и подставляя во второе, получаем:

$$\begin{cases} k_\infty^2 - k_0^2 = \frac{2k_0^3 d}{(\varepsilon + \text{th}k_0 d)\text{ch}^2 k_0 d - k_0 d} \\ E_0^2 = E_\infty^2 \frac{(\varepsilon + \text{th}k_0 d)^2}{\varepsilon + 1} \text{ch}^2 k_0 d \frac{k_\infty^2 - k_0^2}{2k_0^2 k_\infty d}, \end{cases} \quad (18)$$

где E_∞ и k_∞ обозначают критическое поле и волновой вектор в массивной задаче:

$$E_\infty = \left[8\pi \frac{\varepsilon(\varepsilon + 1)}{\varepsilon_2(\varepsilon - 1)^2} \sqrt{(\rho_1 - \rho_2)g\alpha} \right]^{1/2}, \quad k_\infty = \sqrt{\frac{(\rho_1 - \rho_2)g}{\alpha}}. \quad (19)$$

Очевидно, что при $d \rightarrow \infty$ $k_0 = k_\infty$ и $E_0^2 = E_\infty^2$.

В обратном пределе очень тонких пленок $k_\infty d \ll 1$, $\frac{k_\infty d}{\varepsilon} \ll 1$ имеем

$$\begin{cases} k_0 = k_\infty \\ E_0^2 = E_\infty^2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1}. \end{cases} \quad (20)$$

Интересен предел $\varepsilon \rightarrow 0$, отвечающий полной экранировке поля в верхней среде. Этот случай имитирует (хотя и не полностью) критические свойства

проводящей пленки жидкости во внешнем поле, исследованные в [43]. Результаты [43] полностью согласуются с предсказываемыми уравнениями (18) в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$\begin{cases} E_0^2 = E_\infty^2 \text{sh}^2(k_0 d) \frac{k_\infty^2 - k_0^2}{2k_0^2 k_\infty d} \\ k_\infty^2 - k_0^2 = \frac{2k_0^3 d}{\frac{1}{2} \text{sh}(2k_0 d) - k_0 d} \end{cases} \quad (21)$$

$$F(0) = -\frac{\varepsilon E_0^2}{4\pi d} + \rho g.$$

Из второго уравнения данной системы видно, что точка минимума k_0 обращается в нуль при $d = d_0 = \sqrt{3}k_\infty^{-1}$. Поэтому при $d < d_0$ неустойчивость отвечает длинноволновым возмущениям, а величина критического поля во второй среде равна

$$E_0^2 = E_\infty^2 \frac{k_\infty d}{2} = 4\pi(\rho_1 - \rho_2)g \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_1} d. \quad (22)$$

В области $\varepsilon \geq d > d_0$ определение критического значения волнового вектора и напряженности поля требует численного решения. Для наглядности полученных результатов на рис. 2 приведены графики зависимости критического электрического поля E_0 и критического волнового вектора k_0 от толщины пленки с различными значениями $\varepsilon = \varepsilon_1/\varepsilon_2$. При этом интересен случай $\varepsilon < 1$, который в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ имитирует переход верхнего полупространства на рис.1 в проводящее состояние.

В обратном пределе $\varepsilon \rightarrow \infty$ критические параметры перестают «чувствовать» толщину d хорошо проводящей пленки. При $\varepsilon \approx 10$ отличие от массивного образца при всех значениях толщины пленки не более 10%.

Таким образом, уже на линейном уровне проводящая и диэлектрическая пленки демонстрируют качественно разное поведение в области $0 < d < d_0$. В диэлектрическом сценарии прохождение области $k_\infty d \sim 1$ вызывает лишь количественную коррекцию критических условий. Что касается жидкого диэлектрика, зажатого между проводящей подложкой и проводящим жидким полупространством, то здесь переход в область $k_\infty d \sim 1$ полностью меняет картину неустойчивости. Вместо конечного волнового числа k_∞ она начинает развиваться на минимально возможных для пленки волновых числах. Падает и критическое поле. Альтернативный случай — жидкая проводящая пленка — теряет устойчивость по «массивному» сценарию.

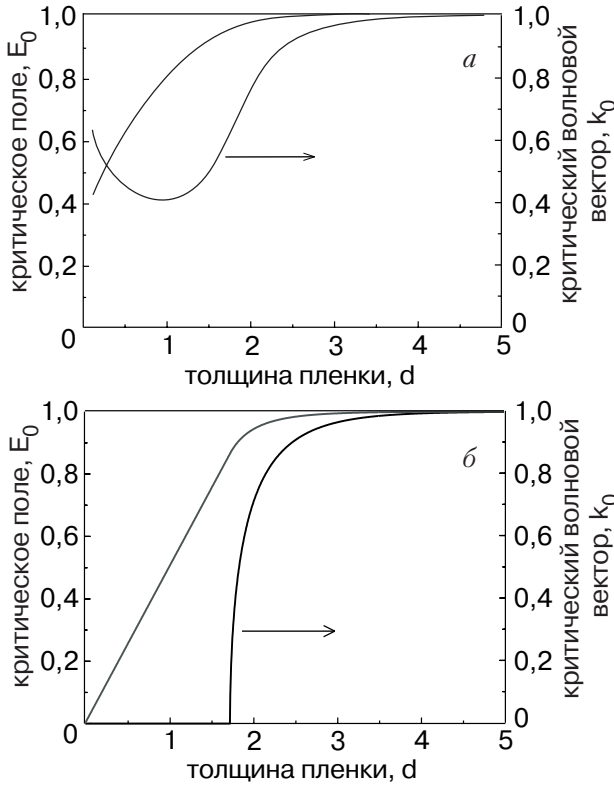


Рис. 2. Зависимость критического электрического поля и критического волнового вектора от толщины пленки. При $\varepsilon = 0.1$ (а) и $\varepsilon = 0$ (б). Толщина пленки d отложена в единицах k_∞^{-1} , величина критического поля — в единицах E_∞ , величина критического волнового вектора — в единицах k_∞ .

В дополнение к зависимости критических волнового вектора и электрического поля приведем графики, иллюстрирующие эволюцию закона дисперсии при критическом значении электрического поля с уменьшением толщины пленки d для «металлического» случая ($\varepsilon = 0$) (см. рис. 3).

2. Нелинейный анализ. Реконструкция

Перейдем к рассмотрению нелинейной задачи и начнем ее со второго приближения по амплитуде искривления поверхности. Выпишем уравнения (11), (12) и (13) с точностью до членов второго порядка малости:

$$\text{const}^{(2)} + \frac{\varepsilon_2(\varepsilon - 1)}{8\pi} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \varepsilon \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 + 2E \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - 2 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} E \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \zeta' - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon^2} E^2 \zeta'^2 \right\} - (\rho_1 - \rho_2) g \zeta + \alpha \zeta'' = 0; \quad (23)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \zeta' \left(\varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right);$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = (\varepsilon - 1) E \zeta' - \zeta' \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right)$$

и подставим решение в виде (см. (14)):

$$\zeta(x) = a \cos kx + a^2 \beta \cos 2kx;$$

$$\varphi_1 = aA_1 \cos kx \text{sh}k(z+d) + a^2 B_1 \cos(2kx) \text{sh}2k(z+d);$$

$$\varphi_2 = aA_2 \cos kx e^{-kz} + a^2 B_2 \cos 2kx e^{-2kz};$$

$$E = E_0 + a^2 E_2;$$

$$k = k_0 + a^2 k_2,$$

(24)

где A_1 и A_2 уже были вычислены.

Приведа подобные, приравняв нулю коэффициенты при каждой из гармоник и решив алгебраическую систему линейных уравнений, находим

$$\beta = k_0 \frac{\frac{1}{2} \frac{\varepsilon + 1}{(\varepsilon + \text{th}(k_0 d))^2} (2\varepsilon + 4\varepsilon \text{th}(k_0 d) + 3\text{th}^2(k_0 d) - 1) - 2 \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon + \text{th}(2k_0 d)} - \frac{E_\infty^2 \left(\frac{k_\infty}{k_0} + 4 \frac{k_0}{k_\infty} \right) - 4 \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon + \text{th}(k_0 d)}}{E_0^2}}{\frac{\varepsilon - 1}{\text{ch}(2k_0 d) \varepsilon (\varepsilon + \text{th}(k_0 d))} E_0 \beta - \frac{A_1 k_0}{2} \frac{\text{ch}(k_0 d) (1 + \varepsilon \text{th}(k_0 d))}{\text{ch}(2k_0 d) (\varepsilon + \text{th}(2k_0 d))}}; \quad (25)$$

$$B_2 = -\varepsilon B_1 \text{ch}(2k_0 d) - \frac{1}{2} \varepsilon A_1 k_0 (\text{sh}(k_0 d) + \text{ch}(k_0 d));$$

$$\text{const}^{(2)} = \frac{a^2}{2} \frac{E_0^2}{E_\infty^2} k_0^2 k_\infty \alpha \frac{\varepsilon + 1}{\text{ch}^2(k_0 d) (\varepsilon + \text{th}(k_0 d))^2},$$

k_0 и E_0 были найдены при решении задачи в линейном приближении.

Отметим, что при решении массивной задачи постоянный член во втором и следующих приближе-

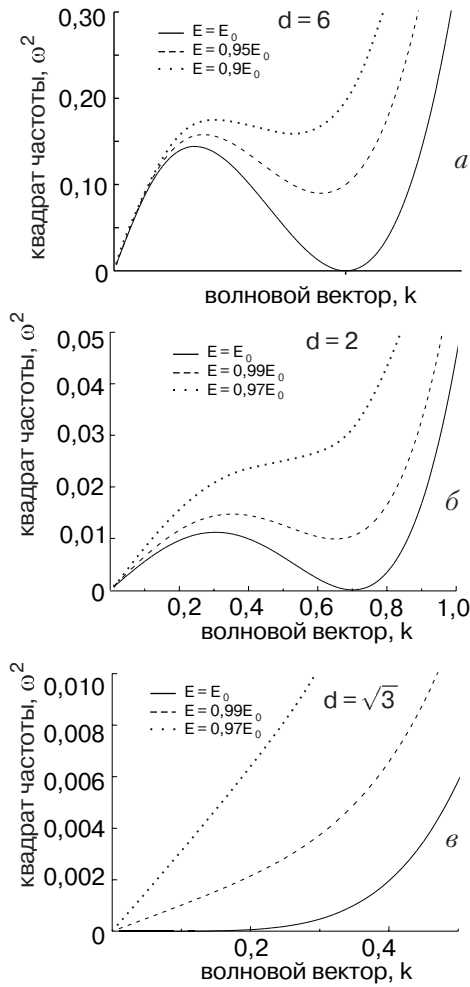


Рис. 3. Зависимость квадрата частоты волны на поверхности раздела двух жидких диэлектриков от волнового вектора в разных электрических полях при различных толщинах пленки d .

ниях равен нулю. Для конечных d возможность манипулировать величиной const связана с выполнением условия (7).

Среди результатов (25) нет определений a , k_2 , E_2 . Поэтому степень точности решения систем нелинейных уравнений надо увеличивать. Проредив такую же процедуру в 3-м приближении (уравнения (11), (12), (13) и решение в виде (14)), получим помимо значений коэффициентов в разложении потенциалов и формы поверхности одну связь между E_2 и k_2 :

$$E_2 = -\frac{1}{2} \frac{E_0}{k_0} \left[k_0 d \frac{\text{th}(k_0 d)^2 - 1}{\text{th}(k_0 d) + \varepsilon} + 1 - \frac{\varepsilon + \text{th}(k_0 d)}{\varepsilon + 1} \frac{E_\infty^2 k_0}{E_0^2 k_\infty} \right] k_2 + U_3(d, \varepsilon), \quad (26)$$

функция $U_3(d, \varepsilon)$ не содержит неизвестных параметров и остается конечной при $d \rightarrow \infty$.

В общем случае формула (26) недостаточна для отдельного определения величин E_2 и k_2 . Однако она полезна при описании предельного перехода $d \rightarrow \infty$. Нетрудно видеть, что в этом пределе выражение в квадратных скобках из (26) обращается в нуль, а величина $U_3(d, \varepsilon)$ принимает сравнительно простой вид. В результате, согласно (26), в пределе $d \gg k_\infty^{-1}$

$$E_{2\infty} = \frac{42\varepsilon - 11(\varepsilon^2 + 1)}{32(\varepsilon + 1)^2}. \quad (27)$$

Определение $E_{2\infty}$ (27) согласуется с результатом, полученным авторами [10] для массивной задачи. Поправка k_2 в этой работе не рассчитана. И становится ясно, почему этого не было сделано (в данном случае нужен 4-й порядок теории возмущений).

Учитывая (см. (14)), что

$$k_2 = \frac{k - k_0}{a^2}, \quad E_2 = \frac{E - E_0}{a^2}, \quad (28)$$

имеем для a

$$a = \sqrt{\frac{E - E_0}{E_2}} \quad (29)$$

(амплитуда измеряется в единицах k_∞^{-1} , а E , E_0 и E_2 — в единицах E_∞ (см. (19)).

Очевидно, что подкоренное выражение (29) положительно лишь в интервале

$$\varepsilon_*^{-1} < \varepsilon < \varepsilon_*, \quad \text{где } \varepsilon_* \approx 3,54. \quad (30)$$

При таких значениях относительной диэлектрической проницаемости толстая пленка демонстрирует «мягкий» режим неустойчивости. Амплитуда a нарастает от нуля постепенно с увеличением надкритичности поля, и мы имеем право действовать по теории возмущений.

Если же ε выходит за рамки (30), то величина $E_{2\infty}$ становится отрицательной, и выражение (29) теряет смысл. Фактически это означает, что реконструкция здесь, если и возникает, то начинается сразу с конечных значений a («жесткий» режим неустойчивости). Анализ такой задачи требует выхода за пределы используемой нами теории возмущений.

Убедившись в наличии области применимости используемой теории возмущений (30) и желая иметь полный набор характеристик реконструкции, продолжим разложение всех величин до 4-го порядка малости. В конечном итоге на этом пути возникает еще одна связь между E_2 и k_2 вида

$$E_2 = K(d, \varepsilon) k_2 + U_4(d, \varepsilon) \quad (31)$$

с громоздкими коэффициентами $K(d, \varepsilon)$ и $U_4(d, \varepsilon)$, явный вид которых лишает смысла дальнейшее аналитическое представление результатов. В связи с этим на рис. 4–6 собраны численные данные о поведении E_2 и k_2 в наиболее интересных интервалах их определения.

Заметим сразу же, что изменение знаков этих коэффициентов ведет к качественно разным следствиям. Для E_2 переход в область $E_2 < 0$ означает исчезновение «мягкого» режима, а значит, и количественных утверждений, следующих из наших расчетов. Смена знака в поведении k_2 не ведет ни к каким качественным «потрясениям».

Еще одно общее замечание касается поведения E_2 в предельных случаях $\varepsilon \rightarrow 0$ или $\varepsilon \rightarrow \infty$. В обоих вариантах одна из сред демонстрирует «идеальную» проводимость. Но при этом специальные расчеты, выполнявшиеся разными авторами (см. [18,25,26]),

свидетельствуют об отсутствии «мягкой» реконструкции. Следовательно, и наши данные для E_2 должны универсально уходить в отрицательную область при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\varepsilon \rightarrow \infty$, что и происходит, как видно из серии рисунков 4–6.

Из деталей, приведенных на рис. 4–6, отметим немонотонное поведение E_2 в области малых d (следствие трансцендентной зависимости $E_2(d)$). Интересны также всплески в поведении $k_2(d)$ в окрестности $\varepsilon > 1$ (см. рис. 5, б). Их происхождение связано с неаналитичностью зависимости $k_2(d)$ и резкому обращению $k_0(d)$ в нуль в точке $d = \sqrt{3}k_\infty^{-1}$ (см. рис. 2).

Комментируя результаты рис. 4–6 в целом, отметим, что в задаче с конечным ε появляется возможность реконструкции границы раздела двух жидких сред в «мягком» режиме. Проводящая граница таким свойством не обладает. Последнее утверждение

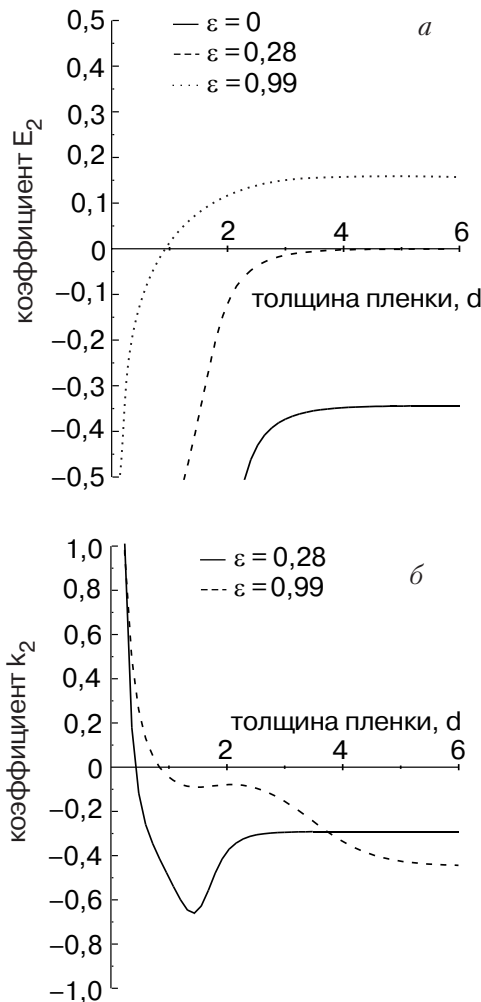


Рис. 4. Зависимости коэффициентов E_2 и k_2 от толщины пленки d для разных значений диэлектрической проницаемости ε в окрестности малых $\varepsilon < 1$. E_2 измеряется в единицах E_∞ , k_2 — в единицах k_∞ , толщина пленки d — в единицах k_∞^{-1} .

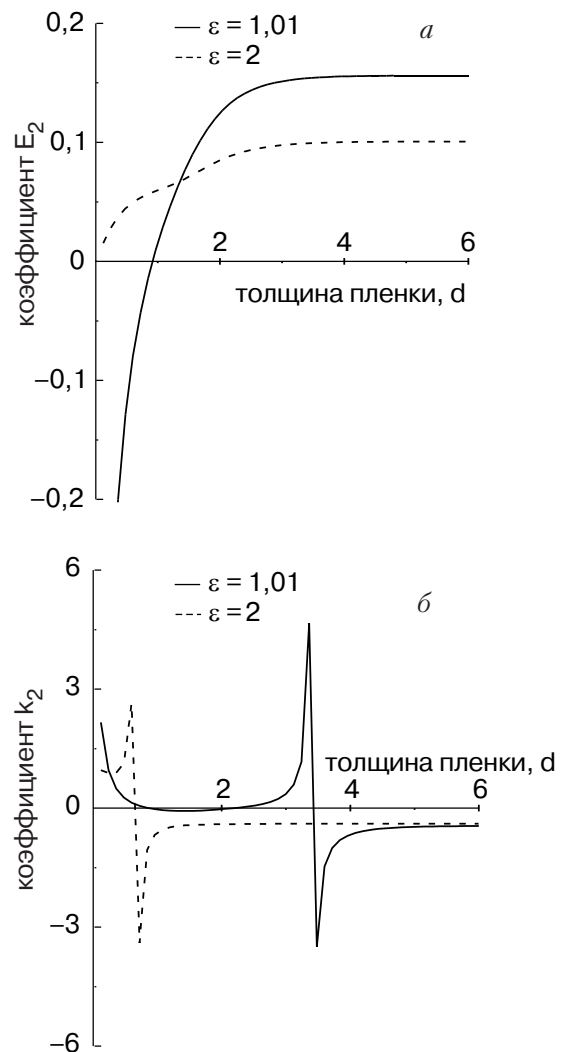


Рис. 5. Зависимости коэффициентов E_2 и k_2 от толщины пленки d для разных значений диэлектрической проницаемости ε в окрестности $\varepsilon \approx 1$.

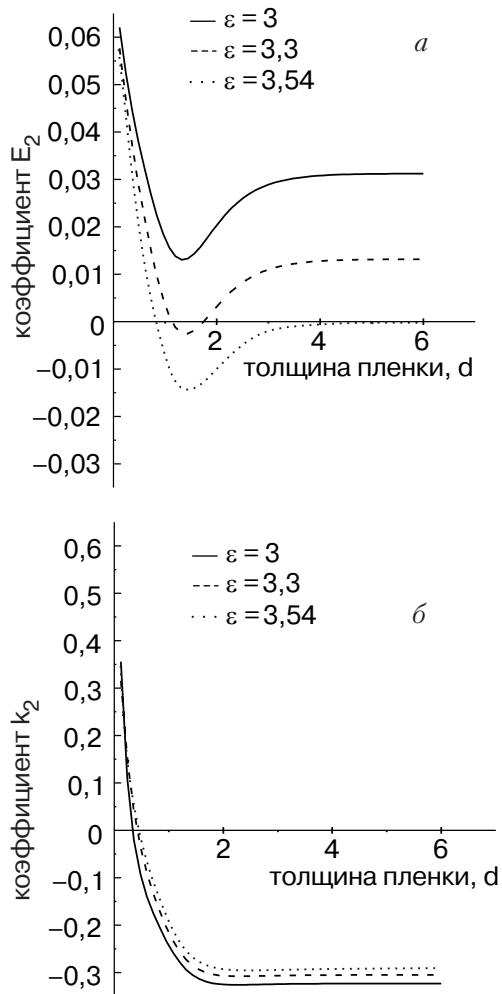


Рис. 6. Зависимости коэффициентов E_2 и k_2 от толщины пленки d для разных значений диэлектрической проницаемости ϵ в окрестности $\epsilon > 1$.

вступает в некое противоречие с теоретическими результатами для якобы существующей «мягкой» реконструкции заряженной поверхности гелия (см. [14,18,25,26]). Однако нужно иметь в виду, что «мягкий» режим реконструкции, описанный в этих работах, возможен лишь при наличии дополнительной степени свободы — степени заселенности δ поверхности гелия $2D$ электронами. Это обстоятельство (бесконечная $2D$ проводимость в совокупности с проникновением поля вглубь в объем контактирующих жидкостей) невозможно смоделировать в терминах ϵ_1 и ϵ_2 . Поэтому реальных противоречий между предлагаемой картиной мягкой реконструкции и результатами для $2D$ заряженной поверхности гелия не имеется.

Заключение

Задача об устойчивости и реконструкции границы раздела двух жидких диэлектрических сред во

внешнем поле, нормальном этой границе, интересна по нескольким причинам. Во-первых, критические условия потери устойчивости весьма разнообразны, включая как предел и ситуацию с проводящей жидкостью, что отражено на рис. 2,а,б. Эта же информация качественно полезна для трактовки поведения заряженной криогенной жидкости, имеющей диэлектрическую постоянную порядка единицы (так что параметр ϵ здесь фактически равен единице), но «несущую» на своей поверхности $2D$ заряженную систему со степенью заселенности δ . Деформационное поведение такой системы качественно следует предсказаниям развитой выше теории при учете очевидного соответствия: предел $\delta \rightarrow 0$ отвечает ситуации с $\epsilon \rightarrow 1$, если же $\delta \rightarrow 1$, то параметр ϵ достаточно велик, $\epsilon \rightarrow \infty$.

Во-вторых, имеется возможность последовательного описания реконструкции такой границы, во всяком случае, в «мягком» режиме, когда амплитуда гофрировки a монотонно растет с увеличением надкритичности $\delta E = (E - E_0)/E_0$, и поэтому законна теория возмущений по δE (см. условие (30)). Для «мягкого» режима исследованы по возможности полно детали реконструкции в зависимости от параметров ϵ и d (см. рис. 4–6). Имеет смысл отметить, что это, по существу, первый полный анализ задачи об устойчивости и реконструкции жидкой границы раздела, включая предел $d \rightarrow \infty$. Известные результаты [10], относящиеся к ситуации $d \rightarrow \infty$, не содержат информации о зависимости периода реконструкции от степени надкритичности δE .

В-третьих, определены условия перехода к так называемому «жесткому» режиму (антиусловие (30)), и становится более прозрачной отмеченная ранее невозможность эквипотенциальной теории реконструкции для идеально проводящей жидкой границы. Это утверждение справедливо как в формализме с использованием параметра ϵ , так и в криогенной задаче, содержащей параметр δ .

Авторы дают себе отчет в том, что « ϵ - и δ -задачи» не полностью идентичны. Тем не менее возможность единообразного описания большого числа деталей в поведении этих систем обращает на себя внимание и заслуживает обсуждения.

Работа частично финансирована Программой Президиума РАН «Физика конденсированного состояния».

1. Я. Френкель, *ЖЭТФ* **9**, 641 (1939).
2. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1965).
3. N. Bohr and J. Wheeler, *Phys. Rev.* **56**, 71 (1939).
4. Ya. Frenkel, *Z. Sowiet.* **8**, 675 (1935).
5. Я. Френкель, *ЖЭТФ* **6**, 347 (1936).
6. T. Tonks, *Phys. Rev.* **48**, 562 (1935).

7. J. Melcher, *Field-coupled Surface Waves*, Cambridge, Mass. MIT Press (1963).
8. G. Taylor and A. McEwan, *J. Fluid Mech.* **22**, 1 (1965).
9. M. Cowley and R. Rosensweig, *J. Fluid Mech.* **30**, 671 (1967).
10. В. Зайцев, М. Шлиомис, *ДАН* **188**, 1261 (1969).
11. М. Шлиомис, *УФН* **112**, 437 (1974).
12. Е. Кузнецов, М. Спектор, *ЖЭТФ* **71**, 262 (1976).
13. Л. Горьков, Д. Черникова, *Письма ЖЭТФ* **18**, 119 (1973).
14. Д.М. Черникова, *ЖЭТФ* **68**, 250 (1975).
15. А. Володин, М. Хайкин, В. Эдельман, *Письма ЖЭТФ* **23**, 524, (1976).
16. А. Володин, М. Хайкин, В. Эдельман, *Письма ЖЭТФ* **26**, 707 (1977).
17. P. Leiderer, *Phys. Rev.* **B20**, 4511 (1979).
18. Л. Горьков, Д. Черникова, *ДАН СССР* **228**, 829 (1976).
19. Д.М. Черникова, *ФНТ* **6**, 1513 (1980).
20. P. Leiderer and M. Wanner, *Phys. Lett.* **A73**, 189 (1979).
21. M. Wanner and P. Leiderer, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 315 (1979).
22. K. Mima and H. Ikezi, *Phys. Rev.* **B17**, 3567 (1978).
23. H. Ikezi, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 1688 (1979).
24. Л. Горьков, Д. Черникова, *ЖЭТФ* **80**, 1940 (1981).
25. В.И. Мельников, С.В. Мешков, *Письма ЖЭТФ* **33**, 222 (1981).
26. В. Мельников, С. Мешков, *ЖЭТФ* **81**, 951 (1981).
27. V. Mel'nikov and S. Meshkov, *Preprint ILT* (1982), p. 47.
28. H. Ikezi and P. Platzman, *Phys. Rev.* **B23**, 1145 (1981).
29. В. Шикин, П. Лейдерер, *Письма ЖЭТФ* **32**, 439 (1980); *ЖЭТФ* **81**, 134 (1981).
30. D. Savignac and P. Leiderer, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1869 (1982).
31. R. Giannetta and H. Ikezi, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 849, (1981).
32. H. Ikezi, R. Giannetta, and P. Platzman, *Phys. Rev.* **B25**, 4488 (1982).
33. P. Leiderer, W. Ebner, and V. Shikin, *Surf. Sci.* **113**, 405 (1982).
34. V. Shikin and P. Leiderer, *Solid State Commun.* **47**, 269 (1983).
35. Дж. В. Сретт, *Теория звука*, том II, Госиздат, Москва (1955).
36. Д. Папси, В. Галустов, *Распылители жидкостей*, Химия, Москва (1979).
37. В. Шикин, С. Назин, А. Изотов, *ДАН СССР* **283**, 121 (1985).
38. В. Шикин, *Письма ЖЭТФ* **27**, 30 (1970).
39. M. Salomaa and G. Williams, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1730 (1981).
40. U. Albrecht and P. Leiderer, *Eur. Lett.* **3**, 705 (1987).
41. Н. Иногамов, А. Демьянов, Э. Сон, *Гидродинамика перемешивания*, Изд-во МФТИ, Москва (1999).
42. А.А. Levchenko, E. Teske, G.V. Kolmakov, P. Leiderer, L.P. Mezhev-Deglin, and V.B. Shikin, *JETP Lett.* **65**, 572 (1997).
43. Д.М. Черникова, *ФНТ* **2**, 1374 (1976).

Stability of the charged liquid dielectric surface

L. Kushnir and V. Shikin

Two liquid dielectrics interface normal to external electric field is investigated. The origin of instability of this system for different parameters (such as ratio of permittivity of two media, thickness of liquid films etc.) is described. A mechanically equilibrium state of the curved interface under supercritical circumstances may occur. The period of deformation appeared crucially depends on the value of ε and tends to infinity when $\varepsilon \rightarrow 0$ (which corresponds to the infinite conductivity of one of the media). The amplitude of this corrugation depends on supercriticality of electric field (the difference between actual and critical values). We highlight two different ways of the interface curving process — «smooth» and «tough» ones (for details see equation (30) and the comments) which appear under particular correlation between the external parameters. The method used is applicable only if the «smooth» case takes place. It is mentioned that the manipulations with the parameter $\varepsilon = \varepsilon_1/\varepsilon_2$ in the problem under consideration are equivalent to the variation of charged particles occupancy degree δ of the cryogenic liquid surface. The maximum value $\delta = 1$ corresponds to the case of free surface of conductive liquid.

Keywords: charged liquid dielectric, instability, reconstruction.

7. J. Melcher, *Field-coupled Surface Waves*, Cambridge, Mass. MIT Press (1963).
8. G. Taylor and A. McEwan, *J. Fluid Mech.* **22**, 1 (1965).
9. M. Cowley and R. Rosensweig, *J. Fluid Mech.* **30**, 671 (1967).
10. В. Зайцев, М. Шлиомис, *ДАН* **188**, 1261 (1969).
11. М. Шлиомис, *УФН* **112**, 437 (1974).
12. Е. Кузнецов, М. Спектор, *ЖЭТФ* **71**, 262 (1976).
13. Л. Горьков, Д. Черникова, *Письма ЖЭТФ* **18**, 119 (1973).
14. Д.М. Черникова, *ЖЭТФ* **68**, 250 (1975).
15. А. Володин, М. Хайкин, В. Эдельман, *Письма ЖЭТФ* **23**, 524, (1976).
16. А. Володин, М. Хайкин, В. Эдельман, *Письма ЖЭТФ* **26**, 707 (1977).
17. P. Leiderer, *Phys. Rev.* **B20**, 4511 (1979).
18. Л. Горьков, Д. Черникова, *ДАН СССР* **228**, 829 (1976).
19. Д.М. Черникова, *ФНТ* **6**, 1513 (1980).
20. P. Leiderer and M. Wanner, *Phys. Lett.* **A73**, 189 (1979).
21. M. Wanner and P. Leiderer, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 315 (1979).
22. K. Mima and H. Ikezi, *Phys. Rev.* **B17**, 3567 (1978).
23. H. Ikezi, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 1688 (1979).
24. Л. Горьков, Д. Черникова, *ЖЭТФ* **80**, 1940 (1981).
25. В.И. Мельников, С.В. Мешков, *Письма ЖЭТФ* **33**, 222 (1981).
26. В. Мельников, С. Мешков, *ЖЭТФ* **81**, 951 (1981).
27. V. Mel'nikov and S. Meshkov, *Preprint ILT* (1982), p. 47.
28. H. Ikezi and P. Platzman, *Phys. Rev.* **B23**, 1145 (1981).
29. В. Шикин, П. Лейдерер, *Письма ЖЭТФ* **32**, 439 (1980); *ЖЭТФ* **81**, 134 (1981).
30. D. Saviagnac and P. Leiderer, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1869 (1982).
31. R. Giannetta and H. Ikezi, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 849, (1981).
32. H. Ikezi, R. Giannetta, and P. Platzman, *Phys. Rev.* **B25**, 4488 (1982).
33. P. Leiderer, W. Ebner, and V. Shikin, *Surf. Sci.* **113**, 405 (1982).
34. V. Shikin and P. Leiderer, *Solid State Commun.* **47**, 269 (1983).
35. Дж. В. Сретт, *Теория звука*, том II, Госиздат, Москва (1955).
36. Д. Папси, В. Галустов, *Распылители жидкостей*, Химия, Москва (1979).
37. В. Шикин, С. Назин, А. Изотов, *ДАН СССР* **283**, 121 (1985).
38. В. Шикин, *Письма ЖЭТФ* **27**, 30 (1970).
39. M. Salomaa and G. Williams, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1730 (1981).
40. U. Albrecht and P. Leiderer, *Eur. Lett.* **3**, 705 (1987).
41. Н. Иногамов, А. Демьянов, Э. Сон, *Гидродинамика перемешивания*, Изд-во МФТИ, Москва (1999).
42. А.А. Levchenko, E. Teske, G.V. Kolmakov, P. Leiderer, L.P. Mezhev-Deglin, and V.B. Shikin, *JETP Lett.* **65**, 572 (1997).
43. Д.М. Черникова, *ФНТ* **2**, 1374 (1976).

Stability of the charged liquid dielectric surface

L. Kushnir and V. Shikin

Two liquid dielectrics interface normal to external electric field is investigated. The origin of instability of this system for different parameters (such as ratio of permittivity of two media, thickness of liquid films etc.) is described. A mechanically equilibrium state of the curved interface under supercritical circumstances may occur. The period of deformation appeared crucially depends on the value of ε and tends to infinity when $\varepsilon \rightarrow 0$ (which corresponds to the infinite conductivity of one of the media). The amplitude of this corrugation depends on supercriticality of electric field (the difference between actual and critical values). We highlight two different ways of the interface curving process — «smooth» and «tough» ones (for details see equation (30) and the comments) which appear under particular correlation between the external parameters. The method used is applicable only if the «smooth» case takes place. It is mentioned that the manipulations with the parameter $\varepsilon = \varepsilon_1/\varepsilon_2$ in the problem under consideration are equivalent to the variation of charged particles occupancy degree δ of the cryogenic liquid surface. The maximum value $\delta = 1$ corresponds to the case of free surface of conductive liquid.

Keywords: charged liquid dielectric, instability, reconstruction.