ДІТ

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

УДК 519.6

ПОБУДОВА АПРОКСИМАЦІЙНОЇ СЕРЕДНЬОКВАДРАТИЧНОЇ ТА МІНІМАКСНОЇ БАГАТОВИМІРНОЇ СПЛАЙН-ФУНКЦІЇ НА ХАОТИЧНІЙ СІТЦІ

І.А. КУЦЕНКО

Запропоновано перехід від задачі побудови як середньоквадратичної, так і мінімаксної апроксимаційної багатовимірної сплайн-функції на хаотичній сітці до задачі знаходження розв'язку перевизначених систем лінійних рівнянь. Перехід здійснено шляхом зведення результатів варіаційної теорії побудови багатовимірних сплайн-функцій на хаотичній сітці до простих алгебраїчних умов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Дано: $\overline{P} = (P^{(1)}, P^{(2)}, ..., P^{(N)})$ -система розташованих в R^n точок $P^{(k)} = (P_1^{(k)}, ..., P_n^{(k)})$, $k = \overline{1, N}$ (задана випадкова сітка) та $X = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} \cdots a_n^{(1)} & b_1 \\ \cdots & \\ a_1^{(M)} \cdots a_n^{(M)} & b_M \end{pmatrix}$ — масив з M значень $(b_1, ..., b_M)$ деякої невідомої функції в M n-вимірних точках $a^{(i)} = (a_1^{(i)}, ..., a_n^{(i)})^*$, $i = \overline{1, M}$. Тут M значно більше n.

Визначимо на сітці $\overline{P}$ інтерполяційну сплайн-функцію $\sigma(\overline{P}; \overline{\lambda}; P)$, яка в точках сітки приймає значення [1,2,3]

$$\sigma(\overline{P}; \overline{\lambda}; P^{(i)}) = r_i, \quad i = \overline{1, N} \tag{1}$$

і має вигляд

$$\sigma(\overline{P}; \overline{\lambda}; P) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i G_{m,n}(P - P^{(i)}) + \sum_{|\alpha| \le m-1} \nu_\alpha P^\alpha , \tag{2}$$

де $P^\alpha = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} ... P_n^{\alpha_n}, P^* = (P_1, ..., P_n)$; $P_k^{\alpha_k}$ — k-а координата в α_k –й степені; $\sum\limits_{|\alpha| \le m-1}$ — сума всіх можливих комбінацій: при $\alpha = 0$ — це вільний коефіцієнт, при $\alpha = 1$ — вільний коефіцієнт плюс складові при лінійній формі $\nu_0 + \sum_{k=1}^{n} \nu_k P_k$, при $\alpha = 2$ — сума при $\alpha = 1$ плюс складові при квадратичній формі $\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \nu_{kl} P_k P_l$ і т.д. (всього $\frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}$ складових);

$$G_{m,n}(x-P) = \begin{cases} \|x-P\|^{2m-n} \ln\|x-P\|, & n = 2k, \\ \|x-P\|^{2m-n}, & n = 2k-1, \end{cases}$$

$$\|x-P\| = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - P_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad P = (P_1, P_2, ..., P_n)^*, \quad x = (x_1, x_2, ..., x_n)^*.$$

Для неперервності функцій Гріна $G_{m,n}(x-P)$ необхідно виконання умови $m > n/2$. Зведення висновків варіаційної теорії побудови багатовимірних сплайн-функцій на хаотичній сітці до простих алгебраїчних умов дозволяє розглядати знаходження коефіцієнтів такого сплайну як розв'язок деякої системи лінійних рівнянь. Для цього введемо для коефіцієнтів ν з формули (2) суцільну лінійну індексацію. Тоді коефіцієнти λ_i, $i = \overline{1, N}$ та $\nu_l, l = \overline{1, \vartheta}$, де $\vartheta = C_n^m = \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}$, визначаються з двох алгебраїчних умов: співпадіння значень сплайн-функції у заданих точках $\overline{P}$ та ортогональності функцій поліноміального ядра між собою на цих же точках. У матричній формі це має такий вигляд:

$$C\overline{\lambda} = \overline{r}, \tag{3}$$

де матриця C розмірністю $(N+\vartheta)\times(N+\vartheta)$ для $n = 2$ і відповідно $m = 2$ запишеться як

$$\begin{vmatrix} 0 & G_{m,n}(P^{(1)} - P^{(2)}) & \cdots & G_{m,n}(P^{(1)} - P^{(N)}) & 1 & x_1 & y_1 \\ G_{m,n}(P^{(2)} - P^{(1)}) & 0 & \cdots & G_{m,n}(P^{(2)} - P^{(N)}) & 1 & x_2 & y_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{m,n}(P^{(N)} - P^{(1)}) & G_{m,n}(P^{(N)} - P^{(2)}) & \cdots & 0 & 1 & x_N & y_N \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_N & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & \cdots & Y_N & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

де $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N, \nu_1, \nu_2, ..., \nu_\vartheta)^*$, $\overline{r} = (r_1, r_2, ..., r_N, 0, 0, ..., 0)^*$ — вектори розмірністю $N + \vartheta$ кожний; $*$ — знак транспонування; $P^{(i)} = (x_i, y_i)$, $i = \overline{1, N}$. Щоб система мала розв'язок, необхідно виконати умову $N \geq \vartheta$.

Знайдемо на сітці $\overline{P}$ таку сплайн-функцію $\sigma(\overline{P}; \overline{\lambda}; P)$ вигляду (1) з коефіцієнтами $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N, \nu_1, \nu_2, ..., \nu_\vartheta)^*$, щоб на масиві X для неї виконувались умови

$$\max_{1 \le i \le M} |r_i(\hat{\bar{\lambda}})| \le \max_{1 \le i \le M} |r_i(\bar{\lambda})|, \ \forall \bar{\lambda} \in R^{N_p}, \ N_p = N + \vartheta, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{M} [r_i(\hat{\bar{\lambda}})]^2 = \min_{\lambda} \sum_{i=1}^{M} [r_i(\bar{\lambda})]^2, \tag{5}$$

де $r_i(\bar{\lambda}) = \sigma(a^{(i)}; \bar{\lambda}; P) - b_i$, $i = \overline{1, M}$.

ЗАГАЛЬНА СХЕМА РОЗВ'ЯЗКУ

Сплайн-функцію $\sigma(\overline{P}; \overline{\lambda}; P)$ виду (1) при фіксованих значеннях $\overline{P}$, m та n можна записати так:

$$\sigma(\overline{P}; \overline{\lambda}; P) = \sum_{i=1}^{N_p} \lambda_i g_i(P) = (\bar{\lambda}, \bar{g}(P)), \tag{6}$$

де $g_i(P) = G_{m,n}(P - P^{(i)}), i = \overline{1, N}$, $g_i(P) = \sum_{|\alpha| \le m-1} \nu_\alpha P^\alpha$, $i = \overline{N+1, N_p}$.

Для її повного визначення необхідно знайти значення вектора коефіцієнтів $\bar{\lambda}$, яке виразимо на основі формули (3) через $\bar{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_N, 0, 0, \ldots, 0)^*$ — вектор значень сплайн-функції на сітці $\overline{P}$ розмірністю N_p

$$\bar{\lambda} = C^{-1} \bar{r}.$$

Тепер можемо переписати формулу (6).

$$\sigma(\overline{P}; \bar{\lambda}; P) = (C^{-1} \bar{r}, \bar{g}(P)) = (\bar{g}(P), C^{-1} \bar{r}).$$

У результаті конкретний вигляд сплайн-функції $\sigma(\overline{P}; \overline{\lambda}; P)$ на масиві точок X буде таким:

$$\begin{cases} \bar{g}^{(1)*} C^{-1} \bar{r} = b_1, \\ \bar{g}^{(2)*} C^{-1} \bar{r} = b_2, \\ \ldots \\ \bar{g}^{(M)*} C^{-1} \bar{r} = b_M, \end{cases} \Rightarrow \quad Z = \begin{cases} \bar{f}^{(1)*} \bar{r} = b_1, \\ \bar{f}^{(2)*} \bar{r} = b_2, \\ \ldots \\ \bar{f}^{(M)*} \bar{r} = b_M, \end{cases}, \tag{7}$$

де $\bar{g}^{(j)} = \bar{g}(a^{(j)})$, $\bar{f}^{(j)*} = (f_1^{(j)}, \ldots, f_n^{(j)}) = \bar{g}^{(j)*} C^{-1}$.

Таким чином, маємо лінійну перевизначену систему рівнянь відносно вектора $\bar{r}$ у просторі розмірності N, а не N_p, тому що останні ϑ координат у векторі $\bar{r}$ нульові. Застосувавши алгоритм Ремеза [4,5] для знаходження мінімаксного розв'язку системи (7) по ненульових елементах $\bar{r}$ і відтворивши значення вектора коефіцієнтів $\bar{\lambda}$ на основі формули (3), знаходимо розв'язок задачі (2), (4). Це і є апроксимуюча мінімаксна сплайн-функція на заданій сітці.

Для побудови апроксимуючої середньоквадратичної сплайн-функції на заданій сітці необхідно знайти розв'язок задачі (2), (5) на системі (7). З цією метою, як і для мінімаксного критерію, спочатку знаходимо оптимальне значення $\bar{r}$, але з системи $R\bar{r} = \bar{h}$, яка має вигляд [6, с. 25]

$$\begin{pmatrix} (\bar{\varphi}^{(1)}, \bar{\varphi}^{(1)}) & (\bar{\varphi}^{(2)}, \bar{\varphi}^{(1)}) & & (\bar{\varphi}^{(N)}, \bar{\varphi}^{(1)}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\bar{\varphi}^{(N)}, \bar{\varphi}^{(1)}) & (\bar{\varphi}^{(N)}, \bar{\varphi}^{(2)}) & & (\bar{\varphi}^{(N)}, \bar{\varphi}^{(N)}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\bar{b}, \bar{\varphi}^{(1)}) \\ \dots \\ (\bar{b}, \bar{\varphi}^{(N)}) \end{pmatrix},$$

де $(\bar{\varphi}^{(k)}, \bar{\varphi}^{(l)}) = \sum_{i=1}^{M} f_k^{(i)} f_l^{(i)}$, $k, l = \overline{1, N}$, $b = (b_1, ..., b_M)^*$.

Далі, відтворивши значення вектора коефіцієнтів $\bar{\lambda}$ на основі формули (3), знаходимо розв'язок задачі (2), (5). Це і є апроксимуюча середньоквадратична сплайн-функція на заданій сітці.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Василенко В.А.* Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. — Новосибирск: Наука, 1983. — 214 с.
2. *Bezhaev A.Y., Vasilenko V.A.* Variational spline theory // Bull. Novosibirsk computing center. Ser.: Numerical Analysis, special issue. — Novosibirsk, 1993. — № 3. — 258 p.
3. *Куценко И.А.* Особенности численной интерполяции функций с помощью многомерных сплайнов на хаотичной сетке // Кибернетика и вычислительная техника. — 2001. — Вып. 133. — С. 40–45.
4. *Ремез Е.Я.* Основы численных методов чебышевского приближения. — Киев: Наук. думка, 1969. — 623 с.
5. *Bartels R.H. and Golub G.H.* Stable Numerical Methods for Obtaining the Chebyshev Solution to an Overdetermined System of Equations // Communications of the ACM. — 1968. — № 6. — P. 401–406.
6. *Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З.* Численные методы анализа. — М.: Наука, 1967. — 368 с.

Надійшла 09.06.2006