Физика низких температур, 2005, т. 31, № 1, с. 50–54

*Часть членов редколлегии не разделяет изложенные в данной статье соображения об электрической активности сверхтекучего гелия. Однако, учитывая остроту и актуальность обсуждаемого вопроса в связи с экспериментальными результатами А.С. Рыбалко (ФНТ **30**, 1321 (2004)), редколлегия считает публикацию статьи целесообразной.*

Об описании электрических эффектов в двухжидкостной модели сверхтекучести

А.М. Косевич

*Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Ленина, 47, г. Харьков, 61103, Украина*
E-mail:kosevich@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 29 июля 2004 г., после переработки 6 октября 2004 г.

Предложена модель описания электротермического эффекта в сверхтекучей жидкости. Сделано предположение, что сверхтекучее состояние — это упорядоченное состояние изотропного квадрупольного момента, которое не проявляет электрических свойств в равновесной жидкости. Поляризационные свойства жидкости возбуждаются неоднородным распределением сверхтекучего потока. Уравнения сверхтекучей гидродинамики Ландау дополнены уравнением, связывающим электрическую поляризацию среды с плотностью сверхтекучей компоненты и неоднородностью сверхтекучего потока. Величина ожидаемых колебаний электрического потенциала в волне второго звука согласуется с измерениями Рыбалко.

Запропоновано модель опису електротермічного ефекту у надплинній рідині. Зроблено припущення, що надплинний стан — це упорядкований стан ізотропного квадрупольного моменту, що не виявляє електричних властивостей у рівноважній рідині. Поляризаційні властивості рідини збуджуються неоднорідним розподілом надплинного потоку. Рівняння надплинної гідродинаміки Ландау доповнено рівнянням, що зв'язує електричну поляризацію середовища з щільністю надплинної компоненти і неоднорідністю надплинного потоку. Величина очікуваних коливань електричного потенціалу в хвилі другого звуку погодиться з вимірами Рибалко.

PACS: 47.27.Eq, 67.40.Pm

Двухжидкостная модель сверхтекучести He II и построенная на ее основе гидродинамика сверхтекучей жидкости Ландау [1] непосредственно подтверждается экспериментальным наблюдением второго звука. В недавних экспериментах Рыбалко [2] показано, что второй звук в He II сопровождается осцилляциями электрического потенциала. Предложена феноменологическая модель двухжидкостной гидродинамики, позволяющая описать электрические эффекты, связанные со сверхтекучестью. Обращено внимание на специфическую особенность сверхтекучего (СТ) состояния, проявляющегося в перераспределении атомных электрических зарядов в обсуждаемой макроскопической квантовой системе.

Нейтральный атом He в основном $1S_0$ состоянии не имеет собственного (в отсутствие внешнего электрического поля) дипольного момента, но обладает важной микроскопической электрической характеристикой — изотропным квадрупольным моментом (ИКМ)* $q_{ik}^{at} = \delta_{ik} q_0$, который, отнесенный к единице массы, имеет порядок величины $q_0 = (e/m)a^2$ (e — заряд электрона, a — атомный радиус, m — масса атома He^4). С точки зрения макроскопической физики — это «скрытая» атомная характеристика,

* Величину ИКМ q определяем формулой $q_{ik} = \sum e x_i x_k$, суммирование проведено по всем электрическим зарядам в системе.

поскольку в макроскопических взаимодействиях электрических систем в вакууме проявляется величина $q_{ik}^{at} - (1/3)q_{ll}^{at}\delta_{ik}$, обращающаяся в данном случае в нуль.

Однако предположим, что упорядоченное когерентное СТ состояние, характеризующееся непрерывным распределением в пространстве всех его физических характеристик, обладает средним ИКМ. В теории Ландау считается [1], что плотность сверхтекучей компоненты ρ_s определяется квадратом модуля конденсатной волновой функции, а плотность нормальной компоненты связывается с плотностью элементарных возбуждений в сверхтекучей жидкости (при низких температурах — фононов). Фононы не связаны с переносом электрического заряда и динамика обсуждаемого изотропного квадрупольного момента может определяться только динамикой СТ состояния.

Обозначим Q плотность (величину в единице объема) среднего ИКМ, считая ее непрерывной функцией координат. В равновесном состоянии жидкость электрически нейтральна и $Q = \text{const}$, однако в пространственно неоднородном состоянии ИКМ приобретает неоднородную добавку. Поэтому в системе появляется связанный электрический заряд с плотностью

$$en = \frac{1}{2}\Delta Q. \tag{1}$$

Наличие плотности заряда (1) приводит к уравнению Пуассона для электростатического потенциала:

$$\varepsilon\Delta\varphi = -2\pi\Delta Q, \tag{2}$$

где ε — диэлектрическая постоянная He^4, которая в основном приближении может считаться равной единице ($\varepsilon = 1$). Поскольку электрический потенциал стенок сосуда с гелием можно считать равным нулю (или постоянным), а Q вне жидкости не имеет смысла, то из этого уравнения следует

$$\varphi = -2\pi Q. \tag{3}$$

Следовательно, электрическое поле в СТ жидкости полностью зависит от эволюции плотности ИКМ Q. В частности, электрическое поле $\mathbf{E}$ определяется градиентом Q:

$$\mathbf{E} = 2\pi \operatorname{grad} Q, \tag{4}$$

где $Q = q\rho$, q — изотропный квадрупольный момент единицы массы жидкости. Величина q — это основная электрическая характеристика СТ состояния и может быть представима в виде

$$q = \left(\frac{e}{m}\right) l_0^2,$$

l_0 — параметр размерности длины, являющийся основной феноменологической характеристикой модели; в общем случае l_0 есть функция p и T.

Основываясь на результатах Рыбалко [2], будем считать, что электрическая «активность» ИКМ возникает только в неоднородном состоянии при наличии относительного движения нормальной и СТ компонент He II. Если Q — некоторая характеристика именно СТ состояния, то естественно считать, что ее перенос осуществляется СТ течением. Исходя из общей схемы двухжидкостной гидродинамики [1], представим плотность потока импульса в следующем виде (используем обозначения, принятые в [1]):

$$j = j_n + j_s, \tag{5а}$$

$$j_n = \rho\mathbf{v}_n,\ j_s = \rho_s(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n), \tag{5б}$$

где ρ — плотность массы He II. Первое слагаемое (j_n) в (5а) дает вклад в нормальный перенос (умноженное на энтропию единицы массы жидкости s, оно дает плотность потока энтропии [1]), а второе слагаемое j_s, пропорциональное разности скоростей $\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n$, естественно считать ответственным за перенос СТ характеристик. Поэтому определяем, что плотность потока ИКМ $\mathbf{J}$ равна

$$\mathbf{J} = q\rho_s(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n) = q\mathbf{j}_3, \tag{6}$$

а уравнение баланса для ИКМ имеет вид (записываем его в линейном приближении по малым отклонениям от равновесного состояния)

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -q\rho_s \operatorname{div}\mathbf{w},\ \mathbf{w} = \mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n. \tag{7}$$

Уравнение баланса (7) — основное модельное предположение излагаемой феноменологической теории. Оно в настоящее время не имеет подтверждения строгим микроскопическим расчетом (в Приложении приведен вывод аналогичного соотношения в слабо неидеальном бозе-газе при $T = 0$). Воспользуемся следующей аналогией. Как уже отмечалось выше, плотность потока энтропии $\mathbf{J}_{\text{ent}}$ в двухжидкостной гидродинамике имеет вид

$$\mathbf{J}_{\text{ent}} = S\mathbf{v}_n = s\mathbf{j}_n,\ S = \rho s, \tag{8}$$

где S — плотность энтропии (энтропия единицы объема жидкости), а эволюция энтропии единицы массы жидкости описывается уравнением [1]

$$\rho\frac{\partial s}{\partial t} = s \operatorname{div}\mathbf{j}_s. \tag{9}$$

Но энтропия переносится нормальным течением жидкости, а ИКМ, по предположению, только СТ течением. Сравнивая (7) и (8) с (6), замечаем определенную связь плотности потока энтропии (8), переносимого нормальным течением, и уравнения непрерывности для энтропии (9) с векторами $\mathbf{j}_n$ и $\mathbf{j}_s$. А так как нормальная и СТ компоненты выступают в некотором смысле симметричным образом, то можно предположить, что соответствующие формулы для ИКМ, переносимого СТ течением, будут отличаться от (8) и (9) перестановкой плотностей потоков $\mathbf{j}_n$ и $\mathbf{j}_s$: аналогом (8) является (6), а соотношением, описывающим эволюцию ИКМ единицы массы q, является

$$\rho \frac{\partial q}{\partial t} = q \operatorname{div} \mathbf{j}_n, \quad (10)$$

из которого следует

$$\frac{\partial q}{\partial t} = q \operatorname{div} \mathbf{v}_n. \quad (11)$$

Наконец, учитывая независимость нормального и СТ течений, будем считать уравнения непрерывности для двух компонент автономными:

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \rho_n \operatorname{div} \mathbf{v}_n = 0, \ \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \rho_s \operatorname{div} \mathbf{v}_s = 0. \quad (12)$$

По определению плотность ИКМ $Q = q\rho$. Вычислим производную по времени от Q. Расчет с использованием (11) и второго уравнения в (12) приводит нас к соотношению (7).

Продифференцируем (4) дважды по времени и воспользуемся уравнением (7)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -2\pi q \rho_s \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{w}. \quad (13)$$

Так как электрический эффект ожидается слабым, плотность сверхтекучего потока можно найти, используя уравнения обычной СТ гидродинамики [1]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n) = \left(\frac{\rho}{\rho_n}\right) s \nabla T. \quad (14)$$

Подставляя (14) в (13), получим выражение, связывающее вторую производную по времени от электрического поля с неоднородностью температуры:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -2\pi q \frac{\rho_s}{\rho_n} \rho s \operatorname{grad} T. \quad (15)$$

Применим (15) к описанию электротермического эффекта в волне:

$$\varphi', T' \propto e^{i(kx - \omega t)}. \quad (16)$$

Из (16) следует с учетом $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$:

$$u^2 \varphi' = 2\pi q \rho \frac{\rho_s}{\rho_n} s T', \ u = \frac{\omega}{k}. \quad (17)$$

Соотношение (17) может быть использовано при обсуждении результатов Рыбалко [2], относящихся к волне второго звука, когда $u = u_2$, где u_2 — скорость второго звука в СТ жидкости.

При температурах, не слишком близких к T_λ, $\rho_n u_2^2 = T(s^2/c)\rho_s$, где c — теплоемкость единицы массы, поэтому

$$\delta\varphi = 2\pi \frac{e}{m} l_0^2 \frac{c}{s} \rho \frac{\delta T}{T}. \quad (18)$$

При $T \to 0$ имеем $\rho_n u_2^2 = (1/3) sT\rho$, $\rho_s \approx \rho$, поэтому

$$\delta\varphi = 6\pi \frac{e}{m} l_0^2 \rho \frac{\delta T}{T}. \quad (19)$$

В обоих случаях

$$\delta\varphi = (0{,}1\text{–}1) \frac{e l_0^2}{a^3} \frac{\delta T}{T}. \quad (20)$$

Какую величину параметра $(e/m) l_0^2$ можно ожидать? Возникновение СТ состояния связано с энергией порядка $T_\lambda \approx 1$ К. Энергия, стабилизирующая распределение заряда в атоме и величину q_0, имеет порядок величины 10 эВ $\approx 10^5$ К. Следовательно, относительный вклад энергии, обеспечивающей СТ состояние, к атомной энергии порядка 10^{-5}. Таким образом, можно ожидать, что величина изотропного квадрупольного момента Q, связанного со СТ компонентой, может составлять 10^{-5} долю от $(1/m) q_0$:

$$\frac{e}{m} l_0^2 \approx \frac{e}{m} a^2 10^{-5} \approx 10^{-7} \text{ СГСЭ}.$$

Экспериментальные результаты Рыбалко [2] при температуре 1 К дают по формуле (17) величину

$$\frac{e l_0^2}{a^3} \sim 0{,}1 \cdot 10^{-6} = 10^{-7}.$$

Из приведенной оценки следует, что в He II параметр l_0^2 имеет порядок величины $l_0^2 \sim (10^{-5} - 10^{-4}) a^2$. Анализ экспериментов показывает [2], что l_0^2 пропорционально квадрату температуры. Поэтому для полного согласования предложенной модели с результатами [2] следовало бы допустить квадратичную зависимость этого параметра от температуры: $l_0^2 \propto (T/T_\lambda)^2$. Между прочим, такая температурная зависимость l_0^2 снимает недоумение, которое может возникнуть при анализе (19) в пределе $T \to 0$.

Любопытно, что в волне «четвертого» звука [1] его скорость при $T \to 0$ стремится к скорости первого звука, поэтому предельный вид соотношения (17) при $T \to 0$ таков:

$$\delta\varphi = 2\pi \frac{e l_0^2}{m} \rho \frac{\delta T}{T}. \quad (21)$$

Следовательно, отношение $\delta\varphi/\delta T$ в возможном эксперименте с четвертым звуком будет отличаться в три раза от наблюдавшегося в опытах Рыбалко [2].

Заметим, что основные результаты настоящей статьи однозначно связаны с более высокой дисперсией, т.е. с членами порядка величины $(l_0 k)^4$, которыми обычно пренебрегают при формулировке уравнений гидродинамики. Их последовательный учет — предмет отдельного рассмотрения.

Наконец, соглашаясь с [2], мы обращаем внимание на возможность связать свойства СТ состояния с особенностями распределения электрических зарядов в СТ жидкости, не связанного с внешним электрическим полем, а обусловленного квантовым характером движения. Гелий II — это квантовая жидкость, в состав которой входит коллективная электронная подсистема. Обсуждаемый электротермический эффект безусловно связан с динамикой электронов. Взаимодействие между движущимися нейтральными атомами всегда осуществляется их электронными оболочками. Поэтому можно думать, что «сверхтекучая» специфика двухжидкостной гидродинамики обусловлена электронной подсистемой. Однако это соображение феноменологического типа требует теоретического подтверждения на микроскопическом уровне.

Ограничимся замечанием на полумикроскопическом уровне. СТ состояние сродни бозе-конденсату, поэтому для пояснения возможного участия электронной системы в макроскопических процессах в He II воспользуемся представлением о бозе-конденсации идеального газа атомов. В процессе бозе-конденсации конечная доля атомов идеального газа переходит в состояние с импульсом $\mathbf{p} = 0$, образуя когерентное коллективное состояние, в котором все бозе-атомы находятся в одном и том же одночастичном квантовом состоянии. Вспомним, что в атоме гелия имеются фермиевские электроны. Чтобы понять, в каком состоянии они могут находиться, используем стандартную схему рассуждений, поясняющую возникновение энергетических электронных зон в кристалле. Пусть E_0 — основной уровень одного электрона в атоме гелия. Так как все атомы конденсата находятся в одном и том же квантовом состоянии, то электронный уровень E_0 должен быть одним и тем же во всех атомах. В силу однородного непрерывного распределения атомов должно возникнуть N_0-кратное вырождение этого уровня, где N_0 — число атомов в конденсате. В неидеальном газе это вырождение снимается. Учет этого обстоятельства, например, приводит к выводу, что известный вывод боголюбовского спектра возбуждений конденсата должен быть уточнен. Но каков бы ни был конкретный результат анализа проблемы, электронные степени свободы проявят себя в электрических свойствах конденсата.

Приложение. Эволюция плотности ИКМ в почти идеальном бозе-газе

В слабонеидеальном бозе-газе при $T = 0$ основная часть атомов, число которых N_0 $(N - N_0 \ll N)$, находится в состоянии с $\mathbf{p} = 0$, образуя конденсат. Пусть $\Psi(\mathbf{X}, \xi)$ — волновая функция атома в конденсате, где $\mathbf{X}$ — координата центра тяжести атома (ядра), а ξ — обобщенная координата электронов в атоме (отсчитанная от ядра). В обычном адиабатическом приближении можно записать

$$\Psi(\mathbf{X}, \xi) = \Phi(\mathbf{X})\psi(\xi), \tag{П.1}$$

где волновая функция $\psi(\xi)$ нормирована на единицу, а волновую функцию $\Phi(\mathbf{X})$ удобно нормировать на массу атома m. Плотность заряда в атоме

$$en(\xi) = e_0(\delta(\xi) - |\psi(\xi)|^2), \tag{П.2}$$

где e_0 — заряд ядра. Допустим, атом находится в S-состоянии; тогда

$$\int \xi |\psi(\xi)|^2 \, d\Gamma_\xi = 0, \tag{П.3}$$

где $d\Gamma_\xi$ — дифференциал электронных координат.

Вычислим распределение среднего ИКМ атома:

$$Q_{ik}^{at}(\mathbf{X}) = \frac{e}{m} |\Phi(X)|^2 \int (X_i + \xi_i)(X_k + \xi_k) |n(\xi) d\Gamma_\xi. \tag{П.4}$$

Используя (П.2) и (П.3), убеждаемся, что (П.4) сводится к ИКМ:

$$Q_{ik}^{at} = -\frac{e_0}{m} |\Phi(\mathbf{X})|^2 \int \xi_i \xi_k |\psi(\xi)|^2 \, d\Gamma_\xi =$$

$$= -\frac{e_0}{3m} |\Phi(\mathbf{X})|^2 \int \xi^2 |\psi(\xi)|^2 \, d\Gamma_\xi \delta_{ik} = Q^{at} \delta_{ik}. \tag{П.5}$$

Определим плотность ИКМ в конденсате, учитывая, что все атомы конденсата находятся в одном и том же квантовом состоянии:

$$Q = N_0 Q^{at}. \tag{П.6}$$

Обозначим плотность атомов в конденсате как $\rho_c = N_0 |\Phi(\mathbf{X})|^2$; тогда

$$Q = -\frac{e_0}{m} \rho_c l_0^2, \quad l_0^2 = \frac{1}{3} \int \xi^2 |\psi(\xi)|^2 \, d\Gamma_\xi. \tag{П.7}$$

Поскольку в квантовой бозе-жидкости СТ определяется как квадрат модуля конденсатной волновой функции, в слабонеидеальном газе ее аналогом может служить введенная выше ρ_c.

Боголюбовские фононы не затрагивают состояние конденсата (оно «отщепляется» и рассматривается как фиксированное основное состояние), поэтому при $T = 0$ в главном приближении динамика конденсата автономна:

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_c \mathbf{v}_c = 0, \qquad (\text{П.8})$$

где $\mathbf{v}_c$ – макроскопическая скорость движения конденсата как функция координат и времени.

Вычислим производную по времени от (П.7), учитывая (П.8)

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{e_0 l_0^2}{m}\frac{\partial \rho_c}{\partial t} = \frac{e_0 l_0^2}{m} \operatorname{div} \rho_c \mathbf{v}_c = \frac{e_0 l_0^2}{m} \rho_c \operatorname{div} \mathbf{v}_c \qquad (\text{П.9})$$

Соотношение (П.9) связывает эволюцию ИКМ со скоростью $\mathbf{v}_c$. Будем исходить из того, что СТ состояние квантовой жидкости сродни бозе-конденсату в слабонеидеальном бозе-газе. В таком случае ρ_c и $\mathbf{v}_c$ играют роль плотности и скорости СТ компоненты в квантовой жидкости. Так как при $T = 0$ фононы отсутствуют, то по идеологии двухжидкостной гидродинамики нет нормальной компоненты движения, а следовательно, $\mathbf{v}_n = 0$. Поэтому формула (П.9) с учетом знака заряда и определения l_0^2 является аналогом основного утверждения статьи в виде соотношения (9), касающегося сверхтекучей жидкости.

Автор благодарен А.С. Рыбалко за плодотворные обсуждения и ознакомление с рукописью [2] до ее опубликования, участникам семинара ФТИНТ за дискуссию, В.А. Михееву и В.Д. Нацику за советы, В.М. Локтеву и В.Г. Манжелию за поддержку, а также рецензентам за полезную критику.

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Гидродинамика,* Наука, Москва (1986).
2. А.С. Рыбалко, *ФНТ* **30**, 1321 (2004).

On description of electrical effects in two-fluid model of superfluidity

A.M. Kosevich

A model of the electrothermal effect in a superfluid is proposed. It is suggested that the superfluid state is an ordered state of the isotropic quadrupole moment which does not exhibit any electric properties in an equilibrium fluid. The polarization properties of the liquid are excited by inhomogeneous distribution of the superfluid flux. The Landau equations for superfluid hydrodynamics are supplemented with an equation which links electrical polarization of the medium with superfluid component density and superfluid flux inhomogeneity. The value of expected electric potential oscillations in the second-sound wave is in agreement with Rybalko's data.