

Статические вихри в длинных джозефсоновских контактах с экспоненциально изменяющейся шириной

Е.Г. Семерджиева

*Пловдивский университет, Пловдив, Болгария
Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, 141980, Россия*

E-mail: elis@jinr.ru

Т.Л. Бояджиев

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, 141980, Россия
Софийский университет, София, Болгария*

E-mail: todorlb@jinr.ru

Ю.М. Шукринов

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, 141980, Россия
Физико-технический институт, Душанбе, Таджикистан*

E-mail: shukrinov@thsun1.jinr.ru

Статья поступила в редакцию 16 января 2004 г.

Проведено численное моделирование статических вихрей в длинном джозефсоновском контакте, ширина которого изменяется по экспоненциальному закону. При заданных значениях параметров соответствующая краевая задача допускает более чем одно решение. Каждому решению (распределению магнитного потока в контакте) ставится в соответствии задача Штурма–Лиувилля, минимальное собственное значение которой позволяет судить в первом приближении об устойчивости вихря относительно малых пространственно-временных возмущений. Изменение ширины контакта приводит к перераспределению магнитного потока в сравнении со случаем линейной одномерной модели. Подробно исследовано влияние параметров модели, в частности параметра формы, на устойчивость состояний магнитного потока. Численным путем построены зависимости критического тока от внешнего магнитного поля. Критическая кривая контакта конструируется из кусков критических кривых для различных распределений магнитного потока, имеющих при заданном магнитном поле наибольший критический ток.

Проведено чисельне моделювання статичних вихорів у довгому джозефсонівському контакті, ширина якого змінюється по експоненціальному закону. При заданих значеннях параметрів відповідна крайова задача допускає більш ніж одне рішення. Кожному рішенню (розподілу магнітного потоку в контакті) ставиться у відповідність задача Штурма–Лиувілля, мінімальне власне значення якої дозволяє судити в першому наближенні про стійкість вихоря щодо малих просторово-тимчасових збурювань. Зміна ширини контакту приводить до перерозподілу магнітного потоку в порівнянні з випадком лінійної одновимірної моделі. Докладно досліджено вплив параметрів моделі, зокрема параметра форми, на стійкість станів магнітного потоку. Чисельним шляхом побудовано залежності критичного струму від зовнішнього магнітного поля. Критична крива контакту конструюється зі шматків критичних кривих для різних розподілів магнітного потоку, що мають при заданому магнітному полі найбільший критичний струм.

PACS: 05.45.+b, 74.50.+r

1. Постановка задачи

Модель джозефсоновского контакта (ДК), учитывающая влияние формы в плоскости xy , рассмотрена в работах [1–3]. Для модели контакта с образующими, которые изменяются по экспоненциальному закону [2,3] (см. рис. 1), основное уравнение для фазы $\varphi(t, x)$ в контакте может быть записано в виде

$$\ddot{\varphi} + \alpha \dot{\varphi} - \varphi'' + \sin \varphi + g(t, x) = 0, \quad x \in (0, l), \quad t > 0. \quad (1)$$

Пространственная координата x нормирована к джозефсоновской глубине проникновения λ_J , причем $l = (L_0 + L_s + L_L)/\lambda_J$. Время t нормировано к плазменной частоте (см., например, монографию [4]). Параметр α описывает диссипативные эффекты в контакте. Точкой сверху обозначено дифференцирование по времени t , а штрихом – по пространственной координате x .

Слагаемое $g(t, x) \equiv \sigma[\varphi'(t, x) - h_B]$ в уравнении (1) моделирует ток, обусловленный экспоненциальным изменением ширины контакта. Безразмерный параметр формы $\sigma \geq 0$ определяется следующим выражением (см. обозначения на рис. 1):

$$\sigma = \frac{\lambda_J}{L_s} \ln \left(\frac{W_0}{W_L} \right),$$

где предполагается, что $W_0 > W_L$. Известно, что при помощи подходящей нормировки функцию $\varphi(t, x)$ можно интерпретировать как (безразмерный) магнитный поток вдоль контакта. Тогда величина h_B есть (безразмерная) напряженность внешнего (граничного) магнитного поля вдоль оси y . Ниже для простоты предполагается, что поле h_B не зависит от времени.

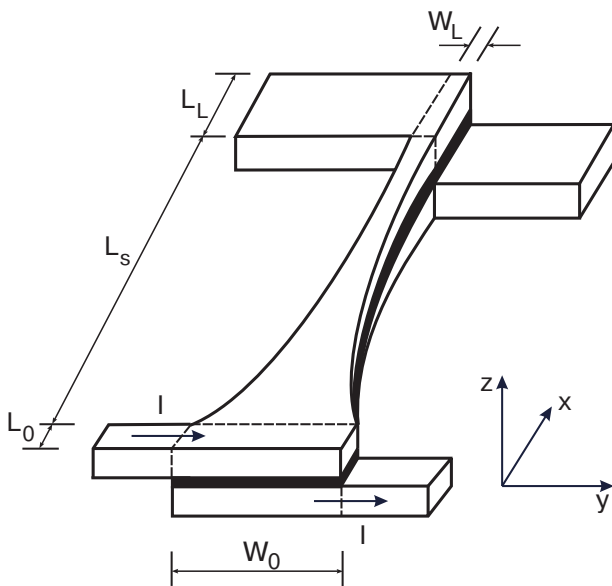


Рис. 1. Схема джозефсоновского контакта с экспоненциально изменяющейся шириной.

Подробный вывод уравнения (1) приведен в работе [2].

В настоящей работе ограничимся рассмотрением модели контакта с in-line геометрией. Если обозначить через γ плотность инжекционного тока через торец L_0 контакта, которая предполагается постоянной, то краевые условия при $x = 0$ и $x = l$ после соответствующего граничного перехода принимают вид

$$\varphi'(t, 0) = h_B - l\gamma, \quad \varphi'(t, l) = h_B. \quad (2)$$

Из-за наличия диссипативного слагаемого $\alpha \dot{\varphi}$ решения $\varphi(t, x)$ уравнения (1) могут терять энергию и, следовательно, при $t \rightarrow \infty$ будут стремиться к соответствующему статическому распределению $\varphi_s(x)$ (в дальнейшем для упрощения записи индекс s используется при надобности). Это обуславливает необходимость детального исследования статических распределений в ДК и их поведения при изменении параметров модели.

Краевая задача для статических распределений непосредственно вытекает из соотношений (1) и (2):

$$-\varphi'' + \sin \varphi + g(x) = 0, \quad x \in (0, l), \quad (3a)$$

$$\varphi'(0) - h_B + l\gamma = 0, \quad (3б)$$

$$\varphi'(l) - h_B = 0, \quad (3в)$$

где «геометрический» ток дается выражением

$$g(x) \equiv \sigma[\varphi'(x) - h_B]. \quad (4)$$

Отметим, что решения задачи (3) зависят, кроме пространственной координаты x , также и от совокупности параметров $p \equiv \{l, \sigma, h_B, \gamma\}$, т.е. $\varphi(x, p)$. Ниже зависимость величин от параметров будем указывать по мере необходимости.

Пусть $\varphi_s(x)$ – некоторое статическое решение уравнения (1), т.е. решение краевой задачи (3). С целью изучения устойчивости решения $\varphi_s(x)$, следуя работе [5], рассмотрим пространственно-временную флуктуацию вида

$$\varphi(t, x) = \varphi_s(x) + \varepsilon \exp(-\alpha t/2) \times \sum_n [\exp(i\omega_n t) \psi_n(x) + \exp(-i\omega_n t) \psi_n^*(x)], \quad (5)$$

зависящую от малого параметра ε . Подставляя разложение (5) в уравнение (1) и условия (2), в первом приближении по ε приходим к задаче Штурма – Лиувилля (ЗШТЛ):

$$-\psi'' + \sigma \psi' + q(x) \psi = \lambda \psi, \quad x \in (0, l), \quad (6a)$$

$$\psi'(0) = 0, \quad \psi'(l) = 0, \quad (6б)$$

потенциал которой $q(x) \equiv \cos \varphi_s(x)$ определяется известным статическим решением $\varphi_s(x)$. Здесь $\lambda = (\omega^2 + \alpha^2/4)^{1/2}$ есть спектральный параметр.

Ввиду ограниченности функции $|q(x,p)| \leq 1$ на конечном интервале изменения переменной x существует [6] ограниченная снизу счетная последовательность вещественных собственных значений (СЗ) $\lambda_{\min} \equiv \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ задачи (6). Каждому СЗ λ_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) соответствует единственная вещественная собственная функция (СФ) $\psi_n(x)$, удовлетворяющая условию нормировки

$$\int_0^l \psi_n^2(x) dx = 1.$$

При этом число нулей СФ $\psi_n(x)$ на интервале $(0, l)$ равно номеру n . В частности, СФ $\psi_0(x)$, соответствующая минимальному СЗ λ_{\min} , не имеет нулей на $(0, l)$.

Поскольку $\varphi(x, p)$ зависит от множества параметров p , потенциал ЗШТЛ и, следовательно, соответствующие СЗ и СФ ЗШТЛ также зависят от параметров, т.е. $\lambda_n = \lambda_n(p)$ и $\psi_n = \psi_n(x, p)$.

Будем говорить [5], что в некоторой области изменения параметров $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^4$ статическое решение $\varphi_s(x)$ является устойчивым в первом приближении относительно пространственно-временных возмущений вида (5), если в этой области $\lambda_{\min}(p) > 0$. Если $\lambda_{\min}(p) < 0$, то в разложении (5) появляется быстрорастущая во времени компонента и решение $\varphi_s(x)$ неустойчиво. Точки вектора параметров, лежащие на гиперповерхности

$$\lambda_{\min}(p) = 0 \quad (7)$$

в пространстве \mathcal{P} , являются точками бифуркации (ветвления) для решения $\varphi(x, p)$. Значения параметров, для которых имеет место равенство (7), называются бифуркационными или критическими для решения $\varphi(x)$. Сечения поверхности (7) гиперплоскостями, соответствующими фиксированным значениям двух параметров, определяют соответствующие бифуркационные кривые для остальных двух параметров. Наиболее важными с точки зрения возможности экспериментальной проверки представляются критические кривые вида «ток — магнитное поле»

$$\lambda_{\min}(\gamma, h_B) = 0, \quad (8)$$

отвечающие заданным геометрическим параметрам l и σ контакта.

В теоретическом аспекте знание бифуркационных зависимостей позволяет найти число равновесных решений, понять их структуру и описать физику явления. Численное моделирование упрощает исследование и дает возможность оценить области

изменения параметров, в которых можно ожидать устойчивость или неустойчивость распределений магнитного потока в ДК.

Для практических целей особенно важна возможность экспериментальной проверки бифуркационных зависимостей параметров ДК, что, со своей стороны, является важным источником информации для уточнения физической модели. В качестве конкретного примера укажем на методы изучения вихревых солитоноподобных структур магнитного потока в ДК, основанных на измерении зависимости критического тока от магнитного поля (см., например, работы [3, 5, 7–10]).

Отметим, что строгому математическому обоснованию сведения задачи устойчивости решений нелинейных операторных уравнений к исследованию задачи на собственные значения для линейного оператора посвящен ряд работ (см., например, обзор [11], а также сборник [12] и цитированную там литературу).

В работах [2, 3] теоретически и экспериментально изучены ДК с экспоненциально изменяющейся шириной в плоскости xy . Подробно исследовано влияние формы на вольт-амперные характеристики контактов. Однако задачи, связанные с определением областей устойчивости статических распределений и структуры критических зависимостей, не рассматривались в достаточной мере. Изучению этих вопросов, важных с прикладной и теоретической точек зрения, посвящена настоящая работа.

2. Численные результаты и их обсуждение

Точные аналитические решения уравнения (3а) для случая $\sigma = 0$ выражаются через эллиптические функции [13]. При $\sigma > 0$ можно применять приближенные методы [2]. В обоих случаях анализ полученных решений на устойчивость при помощи ЗШТЛ (6) представляется затруднительным ввиду сложности соответствующих выражений для потенциала $q(x)$. Поэтому подробный анализ возможных состояний магнитного потока в контакте и анализ их устойчивости целесообразно проводить при помощи численного моделирования.

В настоящей работе для решения краевых задач (3) и (6) применялся непрерывный аналог метода Ньютона (см. обзоры [14, 15]). Возникающие на каждой итерации линеаризованные краевые задачи решались численно при помощи сплайн-коллокационной схемы [16] повышенной точности.

С целью сопоставления наших результатов с результатами работы [3] большинство численных экспериментов проводилось для ДК длиной $l = 10$ и $l = 20$.

Для «бесконечного» одномерного и однородного ДК ($\sigma = 0, l \rightarrow \infty, x \in (-\infty, \infty)$) справедливо известное точное аналитическое выражение (см., например, [4,5]):

$$\varphi(x) = 4 \operatorname{arctg}(\exp(\pm x)), \quad (9)$$

называемое обычно флюксоном/антифлюксоном соответственно. В реалистических ДК конечной длины такие объекты деформируются геометрией контакта, а также внешним магнитным полем h_B и/или внешним током γ и не являются флюксонами в строгом смысле слова (функции (9) не удовлетворяют условиям (2)). Однако ряд особенностей таких солитоноподобных решений, в частности их конечная энергия и размеры, обосновывают целесообразность и удобство использования традиционного названия. Далее для краткости флюксон в ДК будем обозначать через Φ^1 .

Согласно [5], на всей оси $(-\infty, \infty)$ дискретный спектр ЗШТЛ, порожденной решением (9), состоит из единственной точки $\lambda = 0$, т.е. флюксон/антифлюксон в «бесконечном» ДК находится в квазустойчивом (бифуркационном) состоянии.

Из общих теорем сравнения для ЗШТЛ вытекает, что для конечного ДК выполнено условие $\lambda_{\min} < 0$, т.е. устойчивость Φ^1 ухудшается.

При $\gamma = 0$ и небольших $|h_B|$ единственным устойчивым состоянием в ДК конечной длины является мейсснеровское (вакуумное) состояние, которое далее обозначается через M . Для $h_B = 0, \gamma = 0$ — это «тривиальное» решение задачи (3) вида $\varphi(x) = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ (магнитное поле в контакте отсутствует). При этих же параметрах минимальное СЗ ЗШТЛ для M -распределения $\lambda_{\min}(M) = 1$. Наряду с M имеется также и неустойчивое мейсснеровское решение $\varphi(x) = \pm \pi, \pm 3\pi, \dots$, для которого $\lambda_{\min} = -1$.

При достаточно больших значениях граничного магнитного поля h_B в ДК «рождаются» устойчивые флюксонные вихри. Например, при $h_B = 1,4, \gamma = 0$ и $\sigma = 0,07$ в ДК, кроме M -распределения, имеются также мультифлюксонные вихри $\Phi^n, n = 1, 2, 3, 4$, графики которых показаны на рис. 2. Число вихрей определяется величиной полного магнитного потока [5] в ДК:

$$\Delta\varphi = \varphi(l) - \varphi(0).$$

Для «бесконечного» контакта (при $l \rightarrow \infty$) величина $\Delta\varphi/2\pi \rightarrow k$, где $k = 0, 1, 2, \dots$ — число вихрей (флюксонов) в распределении $\varphi(x)$. Для решений на рис. 2 имеем соответственно $\Delta\varphi(\Phi^1)/2\pi \approx 1,49, \Delta\varphi(\Phi^2)/2\pi \approx 2,48, \Delta\varphi(\Phi^3)/2\pi \approx 3,45$ и $\Delta\varphi(\Phi^4)/2\pi \approx 4,36$, в то время как для мейсснеровского решения $\Delta\varphi(M)/2\pi \approx 0,49$.

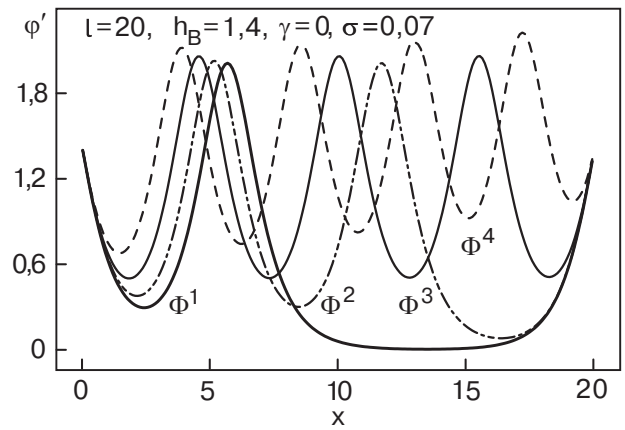


Рис. 2. Флюксонные вихри в ДК.

На рис. 3 демонстрируется влияние внешнего магнитного поля h_B на распределение магнитного поля $\varphi'(x)$ в контакте для основного флюксона Φ^1 при $\sigma = 0,07$. При некотором значении $h_B = h_m$ максимум производной $\varphi'(x)$ локализуется в середине контакта (кривая 2, $h_B \approx 1,273$). При $h_B < h_m$ имеет место эффект «выталкивания» [3] флюксона «геометрическим» током $g(x)$ к торцу $x = l$ (кривая 1, $h_B = 1$). При $h_B > h_m$ флюксон сдвигается внешним полем к торцу $x = 0$ (кривая 3, $h_B = 1,4$).

Если длина ДК достаточно большая, то изменение тока γ , эквивалентное изменению магнитного поля на левом конце $x = 0$, оказывает незначительное влияние на локализацию максимального магнитного поля в контакте, что хорошо просматривается на рис. 4. Для сравнения на рис. 5 демонстрируется ситуация, когда коэффициент формы $\sigma = 0$ при тех же значениях остальных параметров. Видно, что изменение тока γ смещает максимум магнитного поля вправо или влево от центра ДК в зависимости от направления тока [17].

При значениях $h_B > h_m$ положение x_m максимума поля $\varphi'(x)$ флюксона Φ^1 сдвигается влево от

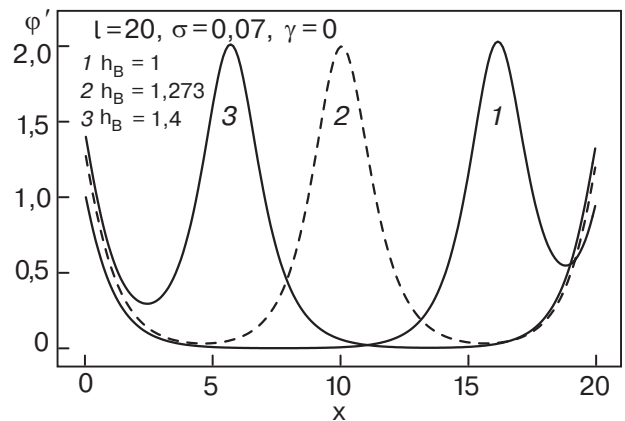


Рис. 3. Зависимость $\varphi'(x)$ при различных h_B .

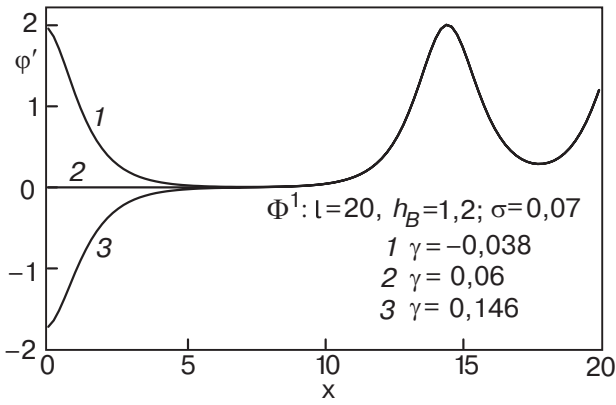


Рис. 4. Зависимость $\varphi'(x)$ при $\sigma = 0,07$.

центра $x = l/2$ к торцу $x = 0$ (см. рис. 3). «Движение» максимума функции $\varphi'(x)$ при изменении параметров задачи происходит в соответствии с равенством

$$\sin \varphi(x_m, p) + \sigma[\varphi'(x_m, p) - h_B] = 0,$$

выражающим баланс джозефсоновского и «геометрического» токов в точке x_m . При этом для Φ^1 -распределения координата $x_m = l/2$ при $\sigma = 0, \gamma = 0$ и любом допустимом h_B . Этот случай соответствует пунктирной линии на рис. 6, на котором изображены графики функции $x_m(h_B, \sigma)$ для нескольких значений параметра формы σ . Каждая кривая при $\sigma > 0$ пересекает прямую $x_m(h_B, 0) = l/2$ в некоторой точке $h_m(\sigma) = \varphi'(l/2, \sigma)$, в которой максимальное магнитное поле внутри ДК центрировано. Важно отметить, что зависимости $x_m(h_B)$ при $\sigma > 0$ терпят в окрестности h_m резкое изменение — небольшие отклонения внешнего поля h_B от значения h_m порождают значительное смещение от центра максимального поля в контакте.

Рассмотрим влияние на распределения магнитного потока в ДК двух геометрических параметров модели — параметра формы σ и длины l .

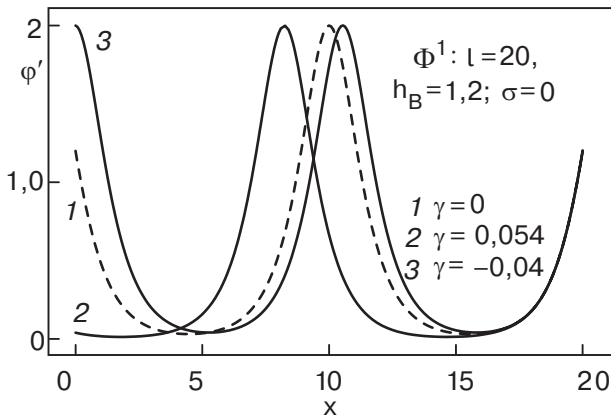


Рис. 5. Зависимость $\varphi'(x)$ при $\sigma = 0$.

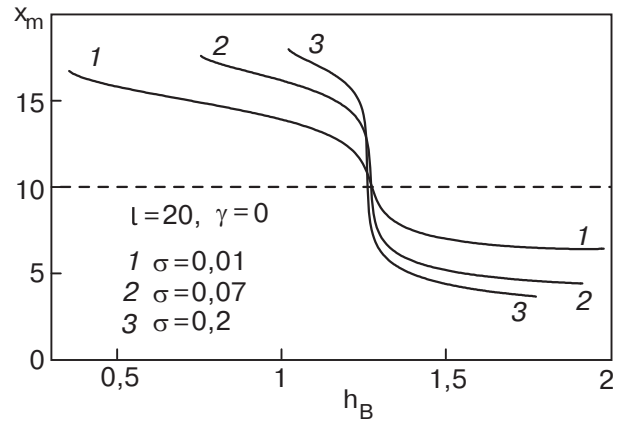


Рис. 6. «Движение» максимума магнитного поля в ДК при изменении h_B .

Зависимость минимального собственного значения ЗШТЛ для основного флюксона Φ^1 от параметра формы σ показана на рис. 7. Видно, что для фиксированных h_B и γ существует некоторое максимальное значение σ , выше которого распределение Φ^1 теряет устойчивость, т.е. имеет место бифуркация вихря при изменении σ . Большим значениям магнитного поля h_B соответствуют большие критические σ . Величина тока существенна при малых значениях σ и практически не играет роли при значениях σ , близких к максимальному. Тем самым рис. 7 демонстрирует деструктивный характер параметра формы при больших его значениях, а также стабилизирующую роль граничного магнитного поля h_B .

Влияние длины l ДК на устойчивость основного флюксона Φ^1 показано на рис. 8. При $l > 12$ кривая зависимости $\lambda_{\min}(l) \approx \text{const}$ и, следовательно, ДК можно считать с некоторой точностью «бесконечным» для Φ^1 . При $l < 6$ минимальное СЗ ЗШТЛ (6) быстро падает и при $l \approx 5,23$ обращается в нуль. Таким образом, существует минимальная длина контакта, для которой флюксон Φ^1 сохраняет устойчивость [18]. Минимальная длина, очевидно, зависит

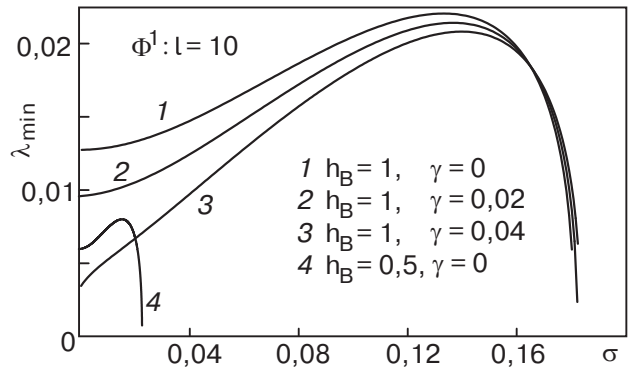


Рис. 7. Бифуркации при изменении σ .

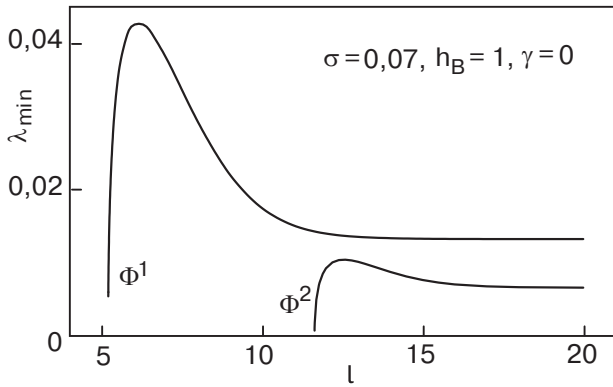


Рис. 8. Влияние длины ДК на устойчивость Φ^1 и Φ^2 .

от всех остальных параметров модели — внешнего магнитного поля h_B , внешнего тока инжекции γ , а также параметра формы σ . Аналогичное утверждение справедливо и для многофлюксонных распределений магнитного потока в контакте, в том числе и для неустойчивых. Минимальная длина для многофлюксонных распределений Φ^n быстро растет с увеличением номера n . Например, при тех же прочих параметрах вихрь Φ^2 существует в ДК с $l > 11,64$ (см. рис. 8). Следовательно, если $\sigma = 0,07$, $h_B = 1$ и $\gamma = 0$, то при длине $l < 5,23$ контакт является «коротким в целом», и единственное устойчивое распределение в контакте есть мейсснеровское. При $5,23 < l < 11,64$ контакт является «коротким» для Φ^2 , однако в нем есть нетривиальный устойчивый вихрь Φ^1 .

Рассмотрим теперь вопрос о построении численным путем зависимости «критический ток — магнитное поле», определяемой неявным образом для каждого распределения магнитного потока в ДК уравнением (8). Важность такой задачи вытекает из возможности измерения этой зависимости экспериментально [3,5,7–10]. Отметим, что для различных конфигураций магнитного потока в ДК значения критических параметров, в частности критического тока и магнитного поля, могут существенно отличаться. Поэтому следует различать критические параметры для конкретных распределений и для ДК в целом.

На рис. 9,а демонстрируются полученные численным путем зависимости $\lambda_{\min}(h_B)$ для M -распределения и нескольких первых устойчивых вихрей в ДК при токе $\gamma = 0$ и $\sigma = 0$. Для сравнения аналогичные зависимости при $\sigma = 0,07$ показаны на рис. 9,б. Каждая кривая имеет два нуля, расстояние между которыми определяет область устойчивости вихря при изменении магнитного поля h_B . Сами нули являются критическими значениями поля h_B при нулевом токе γ .

Хорошо видно, что роль параметра формы σ наиболее существенна при малых значениях h_B . В част-

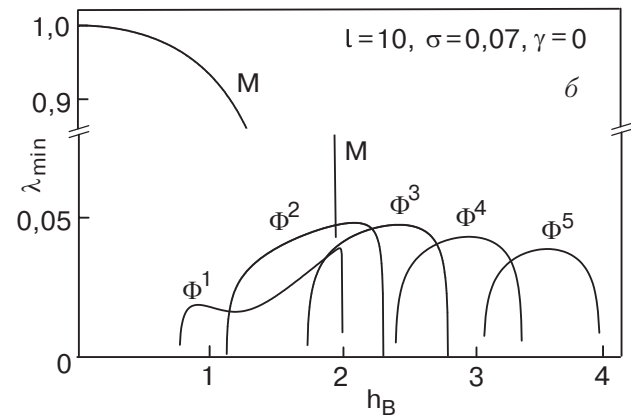
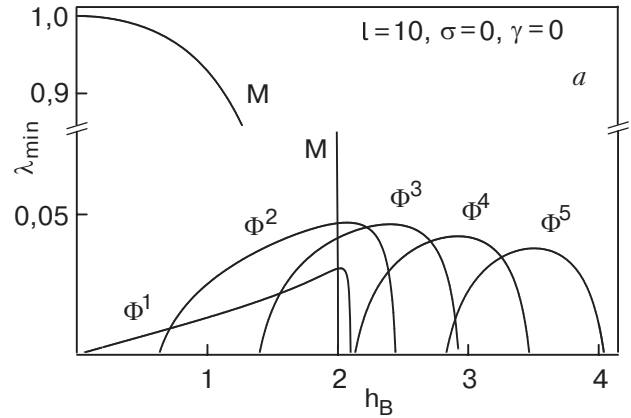


Рис. 9. Зависимость $\lambda_{\min}(h_B)$ при различных σ .

ности, Φ^1 -вихрь при $\sigma = 0$ существует уже при $h_B \approx 0,054$. Однако при $\sigma = 0,07$ область существования по полю h_B значительно сжимается, и вихрь существует, начиная с $h_B > 0,75$. Величина сжатия графиков зависимостей $\lambda_{\min}(h_B)$ для различных вихрей быстро падает с возрастанием h_B .

Для полноты картины на рис. 10 показаны графики полной энергии нескольких распределений магнитного потока в ДК

$$F(p) = \int_0^l \left[\frac{1}{2} \varphi'^2 + (1 - \cos \varphi) \right] dx - h_B \Delta \varphi - l \gamma \varphi(0) \quad (10)$$

как функции внешнего магнитного поля h_B при $\sigma = 0,07$ и токе $\gamma = 0$. Значения энергии отнесены к полной энергии $F[\Phi^1] = 8$ единичного флюксона в бесконечном ДК [5]. Сплошные кривые представляют энергию устойчивых распределений, а пунктирные — неустойчивых. Точки касания сплошных и пунктирных кривых являются точками потери устойчивости магнитного потока.

Рассмотрим теперь ситуацию при $\gamma \neq 0$. Для нахождения зависимости критического тока γ_c от внешнего магнитного поля h_B необходимо определить области устойчивости по току для распределений M , Φ^1 , Φ^2 и т.д. Результаты таких вычисле-

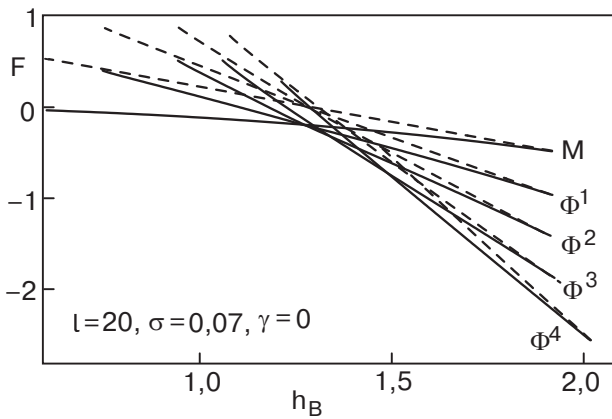


Рис. 10. Зависимость $F(h_B)$ при $\sigma = 0,07$.

ний при определенных значениях h_B приведены на рис. 11–13.

На рис. 11 показаны зависимости $\lambda_{\min}(\gamma)$ для устойчивых решений задачи (3) в поле $h_B = 1,6$. Расстояния между нулями функций представляют собой интервалы устойчивости соответствующих распределений по току γ . Правый и левый нули функции $\lambda_{\min}(\gamma)$ являются соответственно положительным и отрицательным критическими токами распределения в заданном поле h_B . Из-за асимметрии краевых условий (36) и (3в) при $\gamma > 0$ наибольшим является критический ток мейснеровского распределения (обозначим его через $\gamma_c(M)$), но при $\gamma < 0$ наибольшим по модулю является критический ток $\gamma_c(\Phi^1)$ вихря Φ^1 . Следовательно, в поле $h_B = 1,6$ положительный критический ток контакта есть $\gamma_c = \gamma_c(M)$, а отрицательный критический ток — соответственно $\gamma_c = \gamma_c(\Phi^1)$.

Отметим, что в рассматриваемой геометрии контакта кривая для M -распределения имеет характерное плато — «срыв» мейснеровского решения наступает при достаточно большом по модулю внешнем токе.

На рис. 12 демонстрируются зависимости $\lambda_{\min}(\gamma)$ для основного флюксона Φ^1 при $\sigma = 0,07$ и некоторых значениях h_B . Аналогичные зависимости для Φ^2 -распределения показаны на рис. 13. Отметим, что с увеличением внешнего магнитного поля h_B область устойчивости вихрей по току сужается. Следовательно, перебирая h_B , можно с приемлемой точностью строить бифуркационные кривые для отдельных вихрей и по ним определять критические значения тока γ_c для ДК.

Метод непосредственного вычисления точек бифуркаций вихрей в ДК предложен в работах [19,20].

На рис. 14 показаны критические кривые (8) для основного устойчивого флюксона Φ^1 при значениях параметра формы $\sigma = 0$, $\sigma = 0,001$ и $\sigma = 0,07$. Сплошные линии соответствуют току $\gamma > 0$, пунктирные — $\gamma < 0$. Отметим, что при значении $h_B \approx 1,273$ критические кривые, соответствующие $\gamma > 0$, пересе-

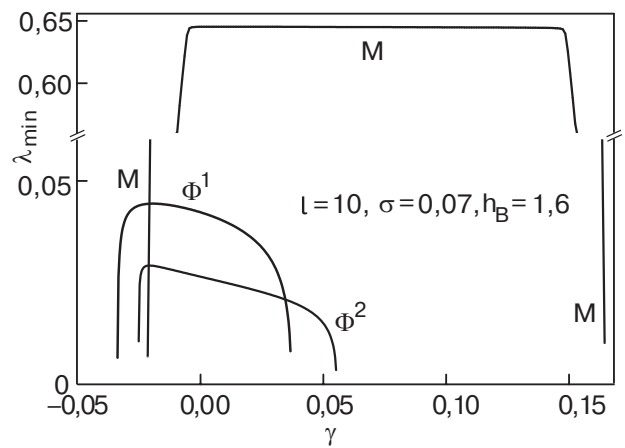


Рис. 11. Зависимость $\lambda_{\min}(\gamma)$ при $h_B = 1,6$.

каются между собой и с кривой, соответствующей $\sigma = 0$, в некоторой узкой области. Это означает, что в этой области h_B критический ток незначительно зависит от формы контакта. Геометрически влияние σ сводится к повороту критических кривых по часовой стрелке относительно кривой с $\sigma = 0$ на некоторый угол, зависящий от σ . Аналогичный эффект имеет место для критических кривых, соответствующих $\gamma < 0$.

Критическая кривая для контакта $\gamma_c(h_B)$ строится как огибающая критических кривых, соответствующих различным распределениям магнитного потока в контакте. Другими словами, критическая кривая состоит из кусков критических кривых для отдельных состояний с наибольшим по модулю при заданном h_B критическим током. Часть критической кривой, соответствующей интервалу $h_B \in [0, 2,8)$, демонстрируется на рис. 15. Пусть, например, $h_B = 1,4$. При токе $\gamma = 0$ в контакте существуют пять различных распределений магнитного поля, описанных выше (см. рис. 2). При увеличении тока γ в сторону положительных значений вихри теряют устойчивость в порядке

$$\Phi^4 \rightarrow \Phi^3 \rightarrow \Phi^2 \rightarrow \Phi^1 \rightarrow M.$$

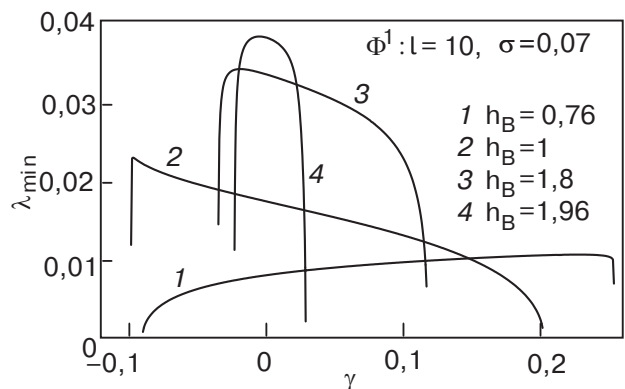


Рис. 12. Зависимость $\lambda_{\min}(\gamma)$ для Φ^1 .

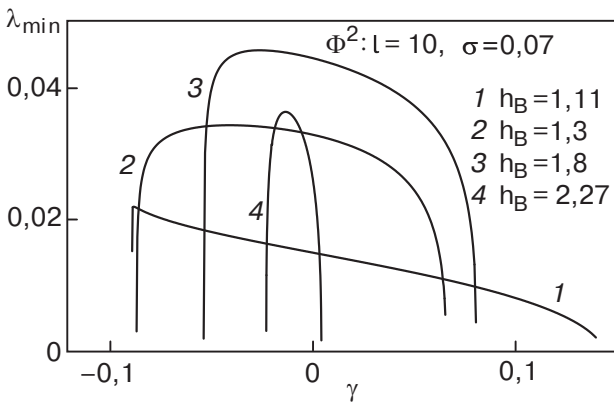


Рис. 13. Зависимость $\lambda_{\min}(\gamma)$ для Φ^2 .

Последним «срывается» мейсснеровское распределение, критический ток которого $\gamma_c(M) \approx 0,156$ и есть критический ток контакта при заданном значении внешнего поля. Следовательно, резистивный режим в контакте при $h_B = 1,4$ существует для $\gamma > 0,156$.

Если увеличивать ток γ от нуля в сторону отрицательных значений, то срыв распределений происходит в обратном порядке: $M \rightarrow \Phi^1 \rightarrow \Phi^2 \rightarrow \Phi^3 \rightarrow \Phi^4$, и критическим для контакта будет критический ток $\gamma_c(\Phi^4) \approx -0,039$ вихря Φ^4 .

Аналогично, например, при $h_B = 2,1$ положительным критическим для контакта является критический ток $\gamma_c(\Phi^5) \approx 0,034$ вихря Φ^5 , а отрицательным критическим — критический ток $\gamma_c(\Phi^6) \approx 0,024$ вихря Φ^6 и т.д.

Конечно, «переключение» вихрей зависит от всех остальных параметров задачи. Например, для контакта с $l = 10$, $\sigma = 0,07$ во внешнем поле $h_B = 1,6$ порядок срыва следующий: $\Phi^1 \rightarrow \Phi^2 \rightarrow M$, если $\gamma > 0$, и $M \rightarrow \Phi^2 \rightarrow \Phi^1$, если $\gamma < 0$, что хорошо заметно на рис. 11.

Отметим, что построенная нами численно критическая кривая ДК, представленная на рис. 15, имеет хорошее совпадение с теоретическими и экспери-

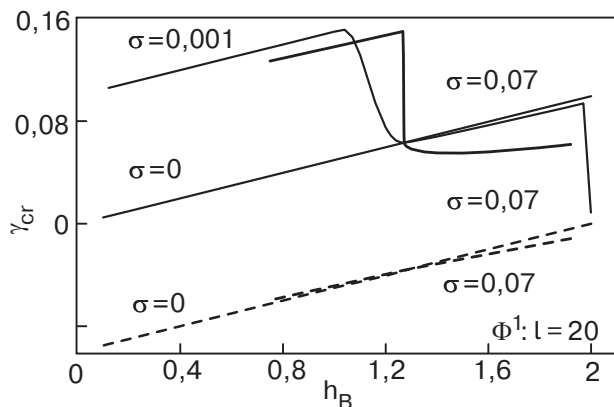


Рис. 14. Критическая кривая флюксона Φ^1 .

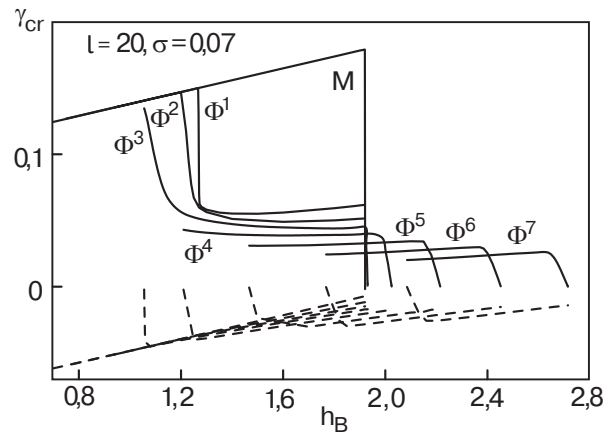


Рис. 15. Критическая кривая контакта.

ментальными результатами, приведенными в работе [3] на рис. 6,а и рис. 7,а.

3. Заключение

В настоящей работе проведено численное моделирование распределений магнитного потока и их бифуркаций при изменении параметров модели в длинном ДК с экспоненциально изменяющейся шириной. Для исследования устойчивости каждому распределению ставится в соответствии ЗШТЛ с потенциалом, определяемым данным распределением. Распределения, а следовательно, и спектр ЗШТЛ зависят от параметров модели. Показано, что при некоторых критических (бифуркационных) значениях одного или нескольких параметров магнитный поток в контакте может менять свою устойчивость. Для вихревых конфигураций в ДК имеются узкие области изменения граничного магнитного поля, в которых критический ток вихрей незначительно зависит от параметра формы. Вихрям магнитного потока соответствует минимальная длина контакта, при которой распределения сохраняют устойчивость. Численным путем построены кривые вида «критический ток — магнитное поле» для первых нескольких устойчивых распределений магнитного потока в ДК. Огибающая критических кривых отдельных распределений представляет собой критическую кривую для контакта в целом.

Авторы выражают благодарность Ю.А. Колесниченко (ФТИНТ, г. Харьков) за полезные обсуждения.

1. A.T. Filippov, T. Boyadjiev, Yu.S. Gal'pern, and I.V. Puzynin, *Comm. JINR* E17-89-106, Dubna (1989).
2. A. Benabdallah, J.G. Caputo, and A.C. Scott, *Phys. Rev.* **B54**, 16139 (1996).
3. G. Carapella, N. Martucciello, and G. Costabile, *cond-mat/0203055*.

4. К.К. Licharev, *Dynamics of Josephson Junctions and Circuits*, Gordon and Breach, New York (1986).
5. Ю.С. Гальперн, А.Т. Филиппов, *ЖЭТФ* **86**, 1527 (1984).
6. Б.М. Левитан, И.С. Саргсян, *Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака*, Наука, Москва (1988).
7. Jhy-Jiun Chang and С.Н. Но, *Appl. Phys. Lett.* **45**, 192 (1984).
8. А.Н. Выставкин, Ю.Ф. Драчевский, В.П. Кошелец, И.Л. Серпученко, *ФНТ* **14**, 646 (1988).
9. В.Н. Larsen, J. Mygind, and A.V. Ustinov, *Phys. Lett.* **A193**, 359 (1994).
10. В.Н. Larsen, J. Mygind, and A.V. Ustinov, *Physica* **B194–196**, 1729 (1994).
11. М.А. Красносельский, *УМН* **IX**, вып. 3(61), 57 (1954).
12. *Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения*, Дж.Б. Келлер и С. Антман (ред.) Мир, Москва (1974).
13. С.С. Owen and D.J. Scalapino, *Phys. Rev.* **164** (2), 538 (1967).
14. Е.Р. Zhidkov, G.I. Makarenko, and I.V. Puzynin, *Sov. J. Particles Nucl.* **4**, July-Sept. (1979), AIP, p. 53.
15. I.V. Puzynin, I.V. Amirkhanov, E.V. Zemlyanaya, V.N. Pervushin, T.P. Puzynina, T.A. Strizh, and V.D. Lakhno, *Physics of Elementary Particles and Atomic Nuclei* (JINR, Dubna) (1999) v. **30**, No 1, p. 97.
16. Т.Л. Бояджиев, *Сообщение ОИЯИ P2-2002-101*, Дубна (2002).
17. Т.Л. Бояджиев, Д.В. Павлов, И.В. Пузынин, *Сообщение ОИЯИ P11-88-409*, Дубна (1988).
18. Т.Л. Бояджиев, Д.В. Павлов, И.В. Пузынин, in: *Numerical Methods and Applications, Proc. Int. Conf. Num. Math. and Appl.*, Sofia, August 22–27, (1988), Bl. Sendov, R. Lazarov, and I. Dimov (eds.)
19. D.W. McLaughlin and A.C. Scott, *Phys. Rev.* **A18**, 1652 (1978).
20. Т. Boyadjiev and M. Todorov, *Supercond. Sci. Technology* **14**, 1 (2002).

Static vortices in long Josephson contacts of exponentially variable width

E.G. Semerdzhieva, T.L. Boyadzhiev, and Yu.M. Shukrinov

A numerical simulation of static vortices in a long Josephson contact of a width variable by the exponential law is made. Variations in the contact width result in a magnetic flux redistribution as compared to the case of linear one-dimensional model. The effect of the model parameters, in particular, the shape parameter, on stability of magnetic flux states is examined in details. The critical current-external magnetic field relation is plotted numerically.