

# Основное состояние и возбуждения бозе-эйнштейновского конденсата атомов и их двухатомных связанных состояний

А.С. Пелетминский, С.В. Пелетминский, Ю.М. Полуэктов

*Институт теоретической физики им. А.И. Ахиезера*

*Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт», г. Харьков, 61108, Украина*

E-mail: aspelet@kipt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 4 ноября 2013 г., после переработки 10 января 2014 г., опубликована онлайн 21 апреля 2014 г.

Теоретически изучена многочастичная система атомов с нулевым спином и их связанных двухатомных состояний (молекул), формирующая при нулевой температуре единый бозе-эйнштейновский конденсат. В рамках подхода Гросса–Питаевского исследованы равновесные состояния и динамика такой системы. Показано, что в зависимости от величины энергии связи система может существовать в двух фазах: атомарно-молекулярного конденсата и конденсата молекул. Найдены основные термодинамические характеристики фаз и критерии их устойчивости. Показано, что в обеих фазах имеются две ветви коллективных возбуждений: звуковая и с энергией активации.

Теоретично вивчено багаточастинкову систему атомів з нульовим спіном та їх зв'язаних двоатомних станів (молекул), що формує при нульовій температурі єдиний бозе-ейнштейнівський конденсат. У рамках підходу Гросса–Пітаєвського досліджено рівноважні стани та динаміку такої системи. Показано, що залежно від величини енергії зв'язку система може існувати в двох фазах: атомарно-молекулярного конденсату і конденсату молекул. Знайдено основні термодинамічні характеристики фаз і критерії їх стійкості. Показано, що в обох фазах є дві гілки колективних збуджень: звукова та з енергією активації.

PACS: 03.75.Kk Динамические свойства конденсатов; коллективные и гидродинамические возмущения, сверхтекучий поток;  
03.75.Mn Многокомпонентные конденсаты, спинорные конденсаты;  
03.75.Nh Статические свойства конденсатов; термодинамические, статистические и структурные свойства;  
05.30.Jr Бозонные системы.

Ключевые слова: бозе-система, атомарно-молекулярный конденсат, термодинамика, устойчивость, спектр возбуждений.

## 1. Введение

Эксперименты по бозе-эйнштейновской конденсации в ультрахолодных разреженных газах щелочных металлов [1–3] стимулировали большой теоретический и экспериментальный интерес к этому явлению [4–7]. Ультрахолодные газы предоставляют уникальную возможность изучать на макроскопическом уровне различные квантовые эффекты, которые трудно исследовать в других системах. При теоретическом описании конденсатов существенным является учет межатомного взаимодействия, отвечающего за коллективные явления в таких системах [8].

Как известно, при парном взаимодействии, потенциал которого имеет достаточно глубокую потенциальную яму, пары атомов могут образовывать связанные со-

стояния с дискретными значениями энергии. В этом случае при конечных температурах существуют как свободные атомы, так и молекулы. В пренебрежении взаимодействием между молекулами, при нулевой температуре все атомы должны соединиться в молекулы с наименьшей энергией. Если же учитывать парное взаимодействие не только между атомами, но и между атомами и молекулами, а также межмолекулярное взаимодействие, то при нулевой температуре как число атомов, так и молекул может быть конечно, и определяться из условия минимальности полной энергии системы. Таким образом, бозе-эйнштейновский конденсат при нулевой температуре, вообще говоря, будет формироваться как атомами, так и их связанными двухатомными состояниями, число которых будет зависеть от параметров потенциала взаимодействия и энергии связи.

Межатомное взаимодействие в бозе-эйнштейновских конденсатах с хорошей степенью точности моделируется длиной рассеяния [4,5]. Важным свойством таких систем является возможность контролируемо изменять в них межатомное взаимодействие с помощью магнитного поля вблизи резонанса Фешбаха [9,10]. В частности, таким образом может быть реализовано условие образования молекулы, когда система двух атомов имеет энергетический уровень, близкий к нулю. Использование резонанса Фешбаха является наиболее удобным способом создания ультрахолодных двухатомных связанных состояний, называемых фешбаховскими молекулами [11,12]. Именно таким образом были получены молекулы  $^{23}\text{Na}_2$  [13] и  $^{133}\text{Cs}_2$  [14]. Существуют и другие методы получения ультрахолодных молекул: молекулы  $^{23}\text{Na}_2$  также создавались путем однофотонной фотоассоциации бозе-эйнштейновского конденсата атомов натрия [15], а молекулы  $^{87}\text{Rb}_2$  были образованы в конденсате атомов рубидия путем индуцированного двухфотонного рамановского перехода [16]. Недавнее обнаружение фешбаховского резонанса в смеси атомов  $^{23}\text{Na}$  и  $^{87}\text{Rb}$  [17] открывает возможность создания двухатомных молекул, состоящих из разных сортов атомов. Отметим, что в работе [18] наблюдалась атомарно-молекулярная когерентность в бозе-эйнштейновском конденсате. В связи с подобными экспериментами несомненный интерес представляет теоретическое изучение когерентной системы атомов и формируемых ими двухатомных связанных состояний.

Для последовательного микроскопического описания такой системы следовало бы водить полевые операторы связанных состояний, которые строятся из полевых операторов исходных атомов. Такой подход был реализован в низкоэнергетическом приближении, когда кинетическая энергия частиц мала по сравнению с энергией связи составных частиц [19] и применялся к изучению замедления света в бозе-эйнштейновском конденсате, где необходимо учитывать внутреннюю структуру атомов [20].

Возможно и более простое полуфеноменологическое описание [21,22], при котором атомы и фешбаховские молекулы описываются различными полевыми операторами, коммутирующими между собой и подчиняющимися бозевским соотношениям коммутации. Получаемая в рамках такой модели система нелинейных уравнений является обобщением стандартного уравнения Гросса–Питаевского на случай атомарно-молекулярного конденсата. Однако в работах [21,22] не затрагивался вопрос об устойчивости возможных равновесных состояний и не были получены спектры коллективных возбуждений. Этим вопросам, в основном, и посвящена настоящая статья.

В предлагаемой работе на основе подхода Гросса–Питаевского проанализировано основное состояние атомарно-молекулярного бозе-эйнштейновского кон-

денсата и показано, что в зависимости от величины энергии связи и параметров взаимодействия система может существовать в двух фазах: атомарно-молекулярного конденсата и конденсата одних молекул. Найдены критерии устойчивости фаз и показано, что в области параметров, где возможно существование атомарно-молекулярного конденсата, он всегда оказывается стабильным. Молекулярный конденсат стабилен только при тех значениях параметров, когда существование атомарно-молекулярной фазы невозможно. Вычислены энергия, давление, сжимаемость и концентрация связанных пар в системе. Изучены малые колебания конденсата и продемонстрировано, что как в атомарно-молекулярной, так и в молекулярной фазах имеются две ветви коллективных возбуждений. Наряду со звуковой ветвью существуют возбуждения с энергией активации, в которых колеблются плотности атомарного и молекулярного конденсатов при постоянной полной плотности.

Найденные спектры коллективных возбуждений совпадают с соответствующими выражениями статьи [23], которые были получены с использованием метода Боголюбова [8]. Таким образом, настоящая работа не только демонстрирует эквивалентность двух различных подходов к исследуемой проблеме, но и содержит новые результаты, которые дополняют работу [23]. В частности, показана согласованность термодинамики со следствием динамических уравнений: скорость звука, рассчитанная на основе найденного выражения для давления, совпадает со скоростью звука, получаемой из спектров в длинноволновом пределе. Построены зависимости концентрации конденсатных молекул от энергии связи, а также давления от концентрации молекул в конденсате. Проведено сравнение энергий различных фаз.

## 2. Основное состояние

Рассмотрим многочастичную систему взаимодействующих бозе-атомов массы  $m$ , которые могут образовывать связанные парные состояния (молекулы) с массой  $2m$ , характеризующиеся одним значением параметра размерности энергии  $\varepsilon_0$ , который будем называть энергией связи. Отметим, что в двухканальной модели фешбаховского резонанса  $\varepsilon_0 = \Delta - \nu$ , где  $\Delta$  — разность энергий между наименьшими уровнями непрерывного спектра и  $\nu$  — так называемый параметр расстройки, который может изменяться магнитным полем и принимать как положительные, так и отрицательные значения [22]. Число атомов и молекул в конденсате, наряду с энергией связи, будет определяться также параметрами взаимодействия атомов и молекул и полной плотностью.

Исследуемую систему будем описывать полевыми операторами  $\hat{\psi}_a(\mathbf{r}) \equiv \hat{\psi}_a$  и  $\hat{\psi}_b(\mathbf{r}) \equiv \hat{\psi}_b$ , где  $\hat{\psi}_a$  — оператор уничтожения атома в точке  $\mathbf{r}$ , а  $\hat{\psi}_b$  — опера-

тор уничтожения двухатомного связанного состояния в точке  $\mathbf{r}$  (координата центра масс). Для этих полевых операторов справедливы обычные бозевские коммутационные соотношения, причем предполагается, что операторы, относящиеся к атомам и молекулам, коммутируют между собой. Гамильтониан такой системы запишем в виде [21,22]

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_a + \hat{H}_b + \hat{H}_{ab} + \hat{V}_{ab}, \quad (1)$$

где

$$\hat{H}_0 = \int d^3r \hat{\psi}_a^\dagger \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \right) \hat{\psi}_a + \int d^3r \hat{\psi}_b^\dagger \left( -\frac{\hbar^2}{4m} \Delta + \varepsilon_0 \right) \hat{\psi}_b, \quad (2)$$

$$\hat{H}_a = \frac{g_a}{2} \int d^3r \hat{\psi}_a^\dagger \hat{\psi}_a^\dagger \hat{\psi}_a \hat{\psi}_a, \quad \hat{H}_b = \frac{g_b}{2} \int d^3r \hat{\psi}_b^\dagger \hat{\psi}_b^\dagger \hat{\psi}_b \hat{\psi}_b, \quad (3)$$

$$\hat{H}_{ab} = g_{ab} \int d^3r \hat{\psi}_b^\dagger \hat{\psi}_a^\dagger \hat{\psi}_a \hat{\psi}_b,$$

$$\hat{V}_{ab} = g \int d^3r \left[ \hat{\psi}_a^\dagger \hat{\psi}_a^\dagger \hat{\psi}_b + \hat{\psi}_b^\dagger \hat{\psi}_a \hat{\psi}_a \right]. \quad (4)$$

Здесь  $\hat{H}_0$  — оператор кинетической энергии системы. Полное взаимодействие включает в себя взаимодействия атомов  $\hat{H}_a$ , связанных состояний  $\hat{H}_b$ , а также операторы  $\hat{H}_{ab}$  и  $\hat{V}_{ab}$ , которые обеспечивают связь атомарной и молекулярной подсистем, причем  $\hat{V}_{ab}$  описывает переходы атомов в состояние молекулы и ее распад на отдельные атомы. Таким образом, число атомов и число молекул в отдельности, вообще говоря, не сохраняется.

Возникновение состояния с атомарно-молекулярным конденсатом приводит к отличным от нуля средним  $\langle \hat{\psi}_a \rangle = \psi_a$ ,  $\langle \hat{\psi}_b \rangle = \psi_b$ , нарушающим глобальную фазовую симметрию. Следствием такого нарушения является появление свойства сверхтекучести. Для получения уравнения Гросса–Питаевского усреднение полевого оператора следует проводить по когерентному (глауберовскому) состоянию  $|\psi\rangle$ , которое является собственным вектором оператора уничтожения [24]. В данном случае это состояние удовлетворяет условию

$$\hat{\psi}_i |\psi\rangle = \psi_i |\psi\rangle, \quad (5)$$

где  $\psi_i = \langle \psi | \hat{\psi}_i | \psi \rangle$ . Когерентное состояние для атомарно-молекулярной системы имеет вид  $|\psi\rangle = |\psi_a\rangle |\psi_b\rangle$ , причем

$$|\psi_i\rangle = \exp(\beta_i^\dagger - \beta_i) |0\rangle, \quad \beta_i = \int d^3r \psi_i^* \hat{\psi}_i, \quad (6)$$

где  $i = a, b$  и  $|0\rangle$  — вектор вакуумного состояния.

Усредняя уравнения Гайзенберга

$$i\hbar \dot{\hat{\psi}}_a = [\hat{\psi}_a, \hat{H}], \quad i\hbar \dot{\hat{\psi}}_b = [\hat{\psi}_b, \hat{H}]$$

по введенному глауберовскому состоянию (5), (6), где гамильтониан  $\hat{H}$  дается выражениями (1)–(4), приходим к связанной системе нелинейных уравнений [21], обобщающих известное уравнение Гросса–Питаевского для бесструктурных частиц:

$$i\hbar \dot{\psi}_a = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + g_a |\psi_a|^2 + g_{ab} |\psi_b|^2 \right) \psi_a + 2g \psi_a^* \psi_b, \quad (7)$$

$$i\hbar \dot{\psi}_b = \left( -\frac{\hbar^2}{4m} \Delta + \varepsilon_0 + g_b |\psi_b|^2 + g_{ab} |\psi_a|^2 \right) \psi_b + g \psi_a^2. \quad (8)$$

Отметим, что при используемом усреднении среднее от произведений пар операторов распадается на произведение средних, например,  $\langle \hat{\psi}_a \hat{\psi}_a \rangle = \psi_a^2$ . Таким образом, в данном приближении пренебрегается парными корреляциями [25,26]. Роль парных корреляций для рассматриваемых систем изучалась в работе [27].

В полученных уравнениях удобно перейти к новым функциям  $\varphi_a$ ,  $\varphi_b$ , которые определяются соотношениями

$$\psi_a = \varphi_a \exp[-i\mu t/\hbar], \quad \psi_b = \varphi_b \exp[-2i\mu t/\hbar], \quad (9)$$

где параметр  $\mu$ , как будет показано ниже, является химическим потенциалом. Структура равновесного однородного состояния находится из уравнений (7), (8) с учетом формул (9), где  $\varphi_a$ ,  $\varphi_b$  не зависят от координат и времени. В этом случае приходим к уравнениям

$$(-\mu + g_a |\varphi_a|^2 + g_{ab} |\varphi_b|^2) \varphi_a + 2g \varphi_a^* \varphi_b = 0, \quad (10)$$

$$(\varepsilon_0 - 2\mu + g_b |\varphi_b|^2 + g_{ab} |\varphi_a|^2) \varphi_b + g \varphi_a^2 = 0. \quad (11)$$

Выделяя в комплексных функциях модуль и фазу,  $\varphi_a = \sqrt{n_a} \exp\{i\alpha\}$ ,  $\varphi_b = \sqrt{n_b} \exp\{i\beta\}$ , где  $n_a$  и  $n_b$  — равновесные плотности атомов и их связанных состояний в конденсатах, получаем следующие уравнения для нахождения вещественных величин  $n_a$ ,  $n_b$  и разности фаз  $\chi = 2\alpha - \beta$ :

$$(-\mu + g_a n_a + g_{ab} n_b + 2g \sqrt{n_b} \cos \chi) \sqrt{n_a} = 0,$$

$$2g \sqrt{n_b} \sin \chi = 0, \quad (12)$$

$$(\varepsilon_0 - 2\mu + g_{ab} n_a + g_b n_b) \sqrt{n_b} + g n_a \cos \chi = 0,$$

$$g n_a \sin \chi = 0. \quad (13)$$

Связь химического потенциала  $\mu$  с полной плотностью  $n$  находится из соотношения

$$n = n_a + 2n_b. \quad (14)$$

Из полученных уравнений следует, что разность фаз может иметь два существенно различных значения,  $\chi = 0$  и  $\chi = \pi$ . Поэтому в уравнениях (12), (13)  $\cos \chi = \pm 1$ . Важным является то, что в уравнения (12), (13) и во все наблюдаемые величины разность фаз всегда входит в виде комбинации  $g \cos \chi$ . Условия термодинамической устойчивости, которые будут рассмотрены в следующем разделе, требуют, чтобы

$$g \cos \chi = -|g|. \quad (15)$$

Отметим, что уравнения (12), (13) имеют два типа решений. Первый тип решений  $n_a = 0, n_b \neq 0$  описывает состояние, в котором существует только конденсат связанных состояний при полном отсутствии конденсата атомов. В этом случае плотность числа молекул связана с химическим потенциалом соотношением

$$n_b = \frac{n}{2} = \frac{2\mu - \varepsilon_0}{g_b}. \quad (16)$$

Второй тип решений  $n_a \neq 0, n_b \neq 0$  соответствует состоянию, в котором оба конденсата сосуществуют. Следует обратить внимание на отсутствие решения, описывающего только конденсат атомов без наличия в нем молекул. Это является следствием учета в полном гамильтониане оператора  $\hat{V}_{ab}$ , ответственного за учет перехода атомов в связанное состояние независимо от знака константы связи  $g$ .

Используя первые два уравнения в (12), (13) и выражение (14) для полной плотности, получаем следующее кубическое уравнение для положительной величины  $y = (n/n_b)^{1/2}$ :

$$y^3 - C_0 y^2 - 6y - C_1 = 0, \quad (17)$$

где

$$C_0 = \frac{(\varepsilon_0/n) - 2g_a + g_{ab} n^{1/2}}{|g|},$$

$$C_1 = \frac{4g_a - 4g_{ab} + g_b n^{1/2}}{|g|}. \quad (18)$$

Данное уравнение с учетом определения величины  $y$  позволяет найти равновесную плотность связанных состояний атомов в конденсате как функцию полной плотности, констант взаимодействия и энергии связи. Условия устойчивости, как будет показано ниже, требуют чтобы  $C_1 > 0$ . В этом случае кубическое уравнение (17) всегда имеет положительное решение. Из того, что при  $n_a = 0, y = \sqrt{2}$ , а при  $n_b \rightarrow 0, y \rightarrow \infty$ , следует, что физически реализуемые решения должны удовлетворять неравенству  $y \geq \sqrt{2}$ . При фиксированном  $C_1$  и допустимых значениях  $y$  параметр  $C_0$  может изменяться в пределах  $-(4\sqrt{2} + C_1)/2 \leq C_0 < \infty$ . Отметим, что величина  $y$  связана с концентрацией молекул  $c_b$  формулой  $c_b = n_b/n = 1/y^2$ , область изменения которой дается неравенствами  $0 < c_b \leq 1/2$ .

### 3. Термодинамика и устойчивость

*Атомарно-молекулярный конденсат.* Найдем основные термодинамические характеристики основного состояния атомарно-молекулярного конденсата и исследуем его на устойчивость. Все величины, относящиеся к этой фазе, будем отмечать индексом А. Энергия основного состояния находится из усреднения гамильтониана (1)–(4) по глауберовскому состоянию (5), (6). В результате имеем следующее выражение для плотности энергии:

$$\varepsilon_A = \varepsilon_0 n_b + \frac{g_a}{2} n_a^2 + g_{ab} n_a n_b + \frac{g_b}{2} n_b^2 + 2g n_a \sqrt{n_b} \cos \chi. \quad (19)$$

Химический потенциал, который появляется в уравнениях (10), (11), определяется соотношениями

$$\mu_A = \left( \frac{\partial \varepsilon_A}{\partial n} \right)_{n_a} = \left( \frac{\partial \varepsilon_A}{\partial n} \right)_{n_b}. \quad (20)$$

Плотность термодинамического потенциала  $\omega_A = \varepsilon_A - \mu_A n$  имеет вид

$$\omega_A = (\varepsilon_0 - 2\mu_A) n_b - \mu_A n_a + \frac{g_a}{2} n_a^2 + g_{ab} n_a n_b + \frac{g_b}{2} n_b^2 + 2g n_a \sqrt{n_b} \cos \chi \quad (21)$$

и с точностью до знака совпадает с давлением  $p_A = -\omega_A$ , которое с учетом уравнений (12), (13) принимает вид

$$p_A = \frac{g_a n_a^2}{2} + \frac{g_b n_b^2}{2} + g_{ab} n_a n_b - |g| n_a \sqrt{n_b}. \quad (22)$$

Необходимые условия устойчивости рассматриваемого равновесного состояния должны получаться из требования минимума плотности термодинамического потенциала по переменным  $n_a, n_b$  и  $\chi$  при фиксированном значении химического потенциала. Такое требование сводится к условию положительности второй вариации,  $\delta^2 \omega_A > 0$ . Из условия положительности получаемой квадратичной формы находим следующие неравенства, дающие необходимые условия устойчивости основного состояния,

$$g_a > 0, \quad g_a v - u^2 > 0, \quad g \cos \chi = -|g| < 0, \quad (23)$$

где

$$v = g_b + \frac{|g|}{2} \frac{n_a}{n_b^{3/2}}, \quad u = g_{ab} - \frac{|g|}{\sqrt{n_b}}. \quad (24)$$

Как видим, последнее неравенство в (23) обеспечивает минимальность плотности энергии относительно выбора разности фаз. Таким образом, доказана справедливость соотношения (15). Отметим, что при  $g = 0$

найденные неравенства совпадают с условиями устойчивости для конденсатов двух сортов атомов, которые не зависят от плотностей отдельных компонент [4]

$$g_a > 0, \quad g_a g_b - g_{ab}^2 > 0. \quad (25)$$

В нашем случае при наличии возможности перехода атомов в связанное состояние условия устойчивости зависят от плотностей. Важно отметить, что требование положительности постоянной межатомного взаимодействия, которая связана с потенциалом межатомного взаимодействия соотношением

$$g_a = \int d^3r V(r),$$

не противоречит возможности возникновения связанных состояний, поскольку потенциал, помимо потенциальной ямы, обычно имеет и отталкивательную сердцевину, за счет которой и может быть обеспечено первое из условий (23).

Из полученных термодинамических соотношений следует выражение для сжимаемости

$$\kappa_A = \frac{1}{n} \frac{dn}{dp_A} = \frac{1}{n^2} \frac{4g_a + v - 4u}{g_a v - u^2}. \quad (26)$$

Положительность данного выражения обеспечивается неравенствами (23). Поскольку сжимаемость связана с квадратом скорости звука соотношением

$$c_A^2 = \frac{1}{mn\kappa_A}, \quad (27)$$

то формула (26) фактически определяет и квадрат скорости звука. Естественно, как будет видно ниже, такое же выражение для скорости звука следует из формулы для спектра одночастичных возбуждений в длинноволновом пределе.

Выполнение неравенств (23) еще не достаточно для того, чтобы равновесие было полностью устойчивым. Необходимо потребовать также выполнения условия положительности давления (22). При выполнении условий (25) первые три слагаемых в (22) дают положительный вклад, в то время как четвертое слагаемое всегда отрицательно. Поэтому возможность возникновения отрицательного давления определяется величиной  $G = |g|/\sqrt{n}$ . При  $G < G_*$  давление положительно при любой концентрации молекул, а при  $G > G_*$  появляется область концентраций  $c_b$ , при которых  $p_A < 0$ . Критическая величина  $G_*$ , при которой давление обращается в нуль, находится из системы алгебраических уравнений:

$$(4g_a + g_b - 4g_{ab})c_{b*} - (2g_a - g_{ab}) = G_* \frac{(1 - 6c_{b*})}{2\sqrt{c_{b*}}}, \quad (28)$$

$$\frac{[(4g_a + g_b - 4g_{ab})c_{b*} - 2(g_a - g_{ab})]^2 + g_a g_b - g_{ab}^2}{(4g_a + g_b - 4g_{ab})} = 2G_* \sqrt{c_{b*}} (1 - 2c_{b*}), \quad (29)$$

где  $c_{b*}$  — концентрация, при которой давление обращается в нуль. Следует подчеркнуть, что в отличие от конденсата двух сортов атомов, где условия устойчивости (25) также обеспечивают положительность давления, в данном случае требование положительности давления при всех концентрациях приводит к дополнительному требованию  $G < G_*$ .

В дальнейшем анализ уравнения (17) естественно проводить в безразмерных переменных. Для этого введем характерные значения плотности  $n_*$  и энергии связи  $\varepsilon_{0*}$ . Удобно в качестве таких характерных значений выбрать те, при которых параметры (18) принимают значения  $C_0 = 0$ ,  $C_1 = 4\sqrt{2}$  (последнее условие получается из уравнения (17) при  $C_0 = 0$ ,  $y = \sqrt{2}$ ). Тогда имеем

$$4\sqrt{2} = \frac{4g_a - 4g_{ab} + g_b}{|g|} \sqrt{n_*}, \quad \varepsilon_{0*} = |2g_a - g_{ab}| n_*. \quad (30)$$

Введенные характерные величины (30) определяются лишь константами связи, входящими в гамильтониан. В принципе, величина  $g$  может изменяться в достаточно широких пределах. Если воспользоваться оценками, относящимися к эффекту фешбаховского резонанса, приведенными в работах [10,22], находим  $g \sim 10^{-30}$  эрг·см<sup>3/2</sup>. Для оценки константы связи  $g_a = 4\pi\hbar^2 a/m$  возьмем массу  $m \sim 10^{-22}$  г и длину рассеяния  $a \sim 10^{-6}$  см, так что  $g_a \sim 10^{-37}$  эрг·см<sup>3</sup>. Полагая, что  $g_{ab} \sim g_b \sim g_a$ , имеем оценки для характерных параметров (30),  $n_* \sim 10^{14}$  см<sup>-3</sup> и  $\varepsilon_{0*} \sim 10^{-23}$  эрг. Полученная оценка характерной плотности близка к типичной плотности числа атомов в экспериментах с атомарными конденсатами [13]. Вне области фешбаховского резонанса для атомарно-молекулярной системы оценки могут быть существенно иными.

Формулы (30) позволяют ввести безразмерные значения плотности и энергии связи

$$\tilde{n} \equiv n/n_*, \quad \tilde{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0/\varepsilon_{0*}.$$

Отметим, что знак величины  $2g_a - g_{ab}$  не фиксирован требованием термодинамической устойчивости, и она может быть как положительной, так и отрицательной. Параметры  $C_0$  и  $C_1$ , определяемые формулами (18), связаны с безразмерными величинами  $\tilde{n}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_0$  следующими соотношениями:

$$C_1 = 4\sqrt{2}\tilde{n}, \quad C_0 = 4\sqrt{2}\lambda \frac{(\tilde{\varepsilon}_0 - \tilde{n} \operatorname{sgn}(2g_a - g_{ab}))}{\sqrt{\tilde{n}}}, \quad (31)$$

где мы ввели безразмерный положительный коэффициент  $\lambda$ ,

$$\lambda = \frac{|2g_a - g_{ab}|}{(4g_a - 4g_{ab} + g_b)} > 0. \quad (32)$$

Величина этого коэффициента не может существенно отличаться от единицы. Подставляя (31) в уравнение (17), находим зависимость энергии связи от концентрации молекул  $c_b = 1/y^2$  и полной плотности атомов  $\tilde{n}$ :

$$\tilde{\varepsilon}_0 = \frac{\sqrt{\tilde{n}}}{\lambda} \left[ \frac{1}{4\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{c_b}} - 6\sqrt{c_b} \right) - c_b \sqrt{\tilde{n}} \right] + \tilde{n} \operatorname{sgn}(2g_a - g_{ab}),$$

$$0 < c_b \leq 1/2. \quad (33)$$

Как видим, энергия связи связана с концентрацией молекул и полной плотностью через единственный безразмерный параметр  $\lambda$ , который строится лишь из констант взаимодействия. Зависимость давления от концентрации молекул и полной плотности дается формулой

$$\frac{p_A}{g_a n^2} = \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{2} |g|}{g_a \sqrt{n_*}} \times$$

$$\times \left[ c_b [c_b - 2\lambda \operatorname{sgn}(2g_a - g_{ab})] + \frac{\sqrt{c_b} (2c_b - 1)}{2\sqrt{2\tilde{n}}} \right]. \quad (34)$$

Согласно приведенным выше оценкам для фешбаховского резонанса, коэффициент перед квадратными скобками порядка единицы.

На рис. 1 представлена зависимость концентрации молекул в конденсате от энергии связи для различных значений полной плотности и фиксированном параметре  $\lambda = 0,5$  в случае  $2g_a - g_{ab} > 0$ . Как видим, с увеличением энергии связи концентрация молекул довольно быстро падает, особенно при малой полной плотности. Отметим, что возможность существования конечной концентрации молекул при положительной энергии связи обусловлена учетом взаимодействий и коллективным характером состояния. Зависимость концентрации молекул в конденсате от энергии связи в противоположном случае, когда  $2g_a - g_{ab} < 0$ , проиллюстрирована на рис. 2. В обоих случаях чисто молекулярный конденсат

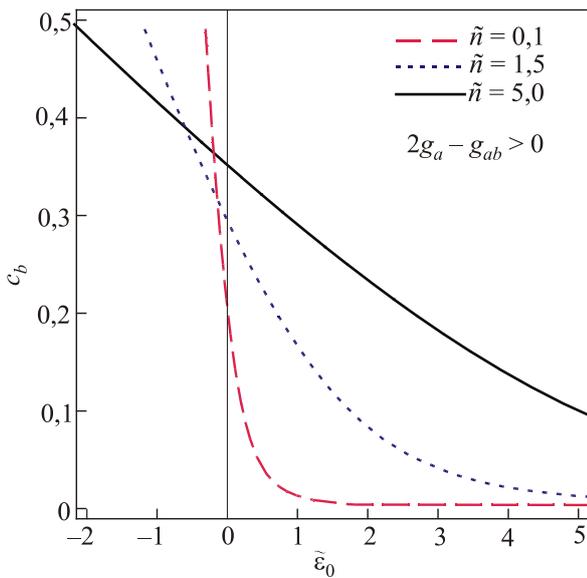


Рис. 1. (Онлайн в цвете) Концентрация молекул  $c_b$  как функция энергии связи  $\tilde{\varepsilon}_0$  для различных значений плотности при  $\lambda = 0,5$  и  $2g_a - g_{ab} > 0$ .

( $c_b = 1/2$ ) может существовать только при отрицательных значениях энергии связи.

Рисунок 3 представляет давление как функцию концентрации молекул в конденсате при различных значениях плотности и  $\lambda = 0,5$  в случае  $2g_a - g_{ab} > 0$ . Видно, что при малых плотностях возникает область отрицательного давления, в которой система неустойчива. Область положительных значений давления соответствует устойчивому состоянию. Для отрицательной разности  $2g_a - g_{ab} < 0$ , отрицательные значения давления реализуются при еще меньших плотностях (см. рис. 4).

*Молекулярный конденсат.* Как отмечалось выше, всегда имеется решение (16), описывающее состояние, в котором все атомы соединены в молекулы:  $n_a = 0$ ,  $n_b = n/2$ . Термодинамические характеристики такой фазы мы будем обозначать индексом  $B$ . Поэтому в формуле (16) следует полагать  $\mu \equiv \mu_B$ . Энергия и давление данного состояния определяются формулами

$$\varepsilon_B = \varepsilon_0 \frac{n}{2} + \frac{g_b n^2}{8}, \quad p_B = \frac{g_b n^2}{8}, \quad (35)$$

так что при  $g_b > 0$  давление всегда положительно. Данное неравенство представляет собой условие термодинамической устойчивости молекулярного конденсата. При значениях параметра  $G > G_*$ , когда давление в атомарно-молекулярной фазе может быть отрицательным и ее существование в равновесии невозможно, стабильной остается только молекулярная фаза.

При  $G < G_*$  механически стабильными оказываются как атомарно-молекулярная, так и молекулярная фазы. Реализовываться будет та из них, которая при одинако-

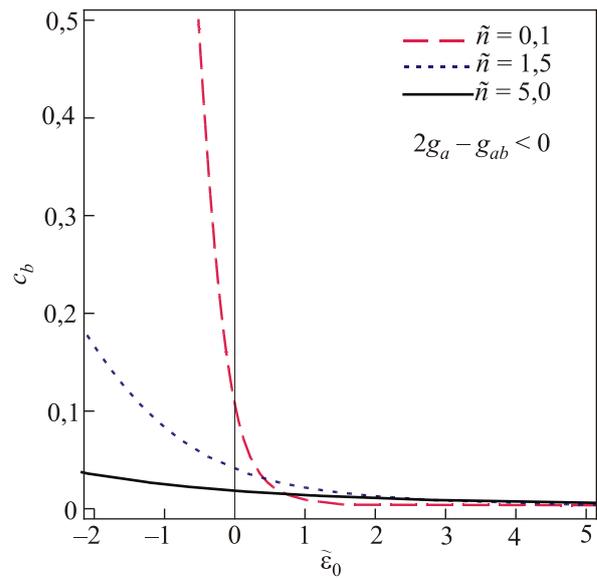


Рис. 2. (Онлайн в цвете) Концентрация молекул  $c_b$  как функция энергии связи  $\tilde{\varepsilon}_0$  для различных значений плотности при  $\lambda = 0,5$  и  $2g_a - g_{ab} < 0$ .

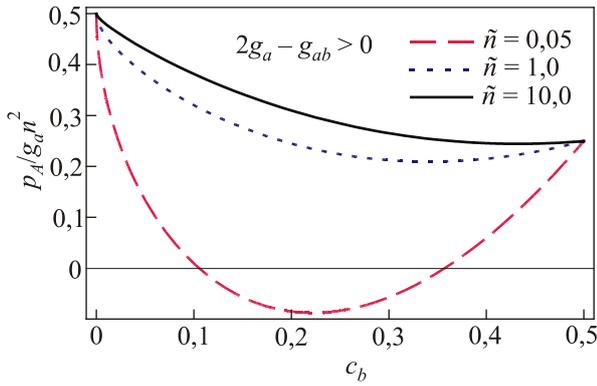


Рис. 3. (Онлайн в цвете) Давление как функция концентрации молекул  $c_b$  для различных значений плотностей при  $\lambda = 0,5$  и  $2g_a - g_{ab} > 0$ .

вой плотности отвечает меньшей энергии. Сравним энергии (19) и (35), выяснив знак их разности:

$$\varepsilon_A - \varepsilon_B = \frac{\varepsilon_0}{2}(2n_b - n) + \frac{g_a}{2}(2n_b - n)^2 - g_{ab}(2n_b - n)n_b + \frac{g_b}{8}(4n_b^2 - n^2) + 2|g|(2n_b - n)\sqrt{n_b}. \quad (36)$$

Разность энергий обращается в нуль при  $n = 2n_b$ , т.е. когда все атомы в конденсате связаны в молекулы. Для установления знака выражения (36) удобно перейти к переменной  $y = \sqrt{n/n_b}$  и воспользоваться формулами (18). В результате имеем

$$\frac{1}{n}(\varepsilon_A - \varepsilon_B) = -\left(1 - \frac{2}{y^2}\right)|g|\sqrt{n}\left[\frac{C_0}{2} + \frac{2}{y} + \left(1 + \frac{2}{y^2}\right)\frac{C_1}{8}\right]. \quad (37)$$

Поскольку  $y$  изменяется в пределах  $\sqrt{2} \leq y < \infty$ , то выражение в круглых скобках всегда положительно. Поэтому необходимо определить знак выражения в квадратных скобках. Используя уравнение (17), можно показать, что данная скобка обращается в нуль только

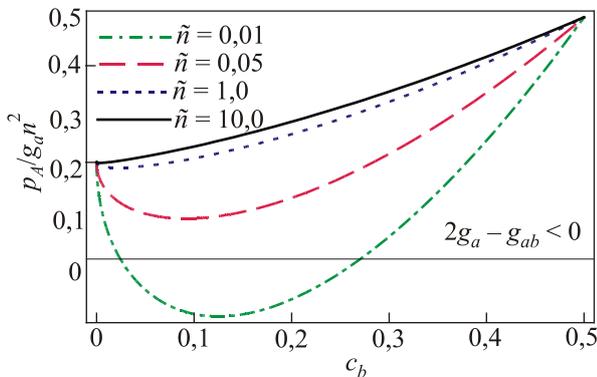


Рис. 4. (Онлайн в цвете) Давление как функция концентрации молекул для различных значений плотностей при  $\lambda = 0,5$  и  $2g_a - g_{ab} < 0$ .

при  $y = \sqrt{2}$  и  $C_0^{\text{cr}} = -2\sqrt{2} - C_1/2$ . Таким образом,  $y = \sqrt{2}$  (или  $n = 2n_b$ ) является единственным значением переменной  $y$ , при котором разность энергий обращается в нуль. Производя совместно линеаризацию уравнения (17) и выражения (37) вблизи равновесных значений  $y = \sqrt{2}$  и  $C_0^{\text{cr}} = -2\sqrt{2} - C_1/2$  и учитывая положительность величины  $C_1$ , приходим к заключению, что  $\varepsilon_A - \varepsilon_B < 0$ . Таким образом, состояние системы с конденсатом атомов и молекул энергетически более выгодно. Используя первую из формул (18), находим критическое значение энергии связи, при котором разность энергий обращается в нуль,

$$\varepsilon_0^{\text{cr}} = \left(g_{ab} - \frac{g_b}{2}\right)n - 2\sqrt{2}|g|\sqrt{n}. \quad (38)$$

Знак данной величины, вообще говоря, может быть как положительным, так и отрицательным. Однако при  $g_{ab} \rightarrow 0$  она всегда отрицательна.

Поэтому при выполнении неравенства  $\varepsilon_0 > \varepsilon_0^{\text{cr}}$ , когда, в принципе, возможно существование как атомарно-молекулярной, так и молекулярной фаз, всегда термодинамически стабильной оказывается атомарно-молекулярная фаза. В противоположном случае  $\varepsilon_0 < \varepsilon_0^{\text{cr}}$ , существование атомарно-молекулярной фазы невозможно, и система находится в состоянии молекулярного конденсата.

#### 4. Спектр коллективных возбуждений

*Атомарно-молекулярный конденсат.* Спектр элементарных возбуждений в атомарно-молекулярном конденсате может быть получен из системы нестационарных уравнений (7), (8) с учетом формул (9) путем рассмотрения малых осцилляций. Для этого удобно записать уравнения (7), (8) в гидродинамическом виде, выделив в комплексных параметрах порядок модуль и фазу:  $\varphi_a = \sqrt{n_a} \exp(i\alpha)$ ,  $\varphi_b = \sqrt{n_b} \exp(i\beta)$ . Определив скорости соотношениями  $\mathbf{v}_a = (\hbar/m)\nabla\alpha$ ,  $\mathbf{v}_b = (\hbar/2m)\nabla\beta$ , приходим к следующей системе уравнений:

$$\dot{n}_a + \text{div}(n_a \mathbf{v}_a) = -\frac{4gn_a\sqrt{n_b}}{\hbar} \sin \chi, \quad (39)$$

$$\dot{n}_b + \text{div}(n_b \mathbf{v}_b) = \frac{2gn_a\sqrt{n_b}}{\hbar} \sin \chi, \quad (40)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_a + (\mathbf{v}_a \nabla) \mathbf{v}_a = \nabla \left[ \frac{\tilde{\mu}_1}{m} - \frac{2g\sqrt{n_b}}{m} \cos \chi \right], \quad (41)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_b + (\mathbf{v}_b \nabla) \mathbf{v}_b = \nabla \left[ \frac{\tilde{\mu}_2}{2m} - \frac{gn_a}{2m\sqrt{n_b}} \cos \chi \right], \quad (42)$$

$$\hbar\dot{\chi} + m[v_a^2 - v_b^2] = 2\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2 - g \cos \chi \frac{4n_b - n_a}{\sqrt{n_b}}, \quad (43)$$

где

$$\tilde{\mu}_1 = \mu_A - g_a n_a - g_{ab} n_b + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \sqrt{n_a}}{\sqrt{n_a}}, \quad (44)$$

$$\tilde{\mu}_2 = 2\mu_A - \varepsilon_0 - g_{ab} n_a - g_b n_b + \frac{\hbar^2}{4m} \frac{\Delta \sqrt{n_b}}{\sqrt{n_b}}. \quad (45)$$

Отметим, что наличие в гамильтониане взаимодействия  $\hat{V}_{ab}$ , которое описывает переходы атомов в связанное состояние и развал этого связанного состояния на отдельные атомы, приводит к появлению нового уравнения для разности фаз  $\chi$ . Подчеркнем также, что согласно уравнениям (39), (40) число атомов и молекул в отдельности не сохраняется.

Производя стандартную линеаризацию полученной системы уравнений вблизи равновесного состояния, можно получить уравнения для малых отклонений, решение которых будем искать в виде, пропорциональном  $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega_A t)$ . Условие существования нетривиального решения такой системы однородных алгебраических уравнений приводит к биквадратному дисперсионному уравнению для определения частоты  $\omega_A$  как функции волнового числа:

$$\omega_A^4 - A\omega_A^2 + B = 0, \quad (46)$$

которое имеет следующие решения [23]:

$$\omega_{A1}^2 = \frac{1}{2} \left( A + \sqrt{A^2 - 4B} \right), \quad (47)$$

$$\omega_{A2}^2 = \frac{1}{2} \left( A - \sqrt{A^2 - 4B} \right), \quad (48)$$

где

$$A \equiv A(k) = \frac{2|g|n_a\sqrt{n_b}}{\hbar^2} (4g_a - 4u + v) + \left[ 2g_a n_a + v n_b + \frac{|g|n_a + 8n_b}{2\sqrt{n_b}} \right] \frac{k^2}{2m} + \frac{5}{16} \frac{\hbar^2 k^4}{m^2}, \quad (49)$$

и

$$B \equiv B(k) = \frac{2|g|n_a\sqrt{n_b}}{\hbar^2} n \left[ g_a v - u^2 \right] \frac{k^2}{m} + \left[ n_a n_b (g_a v - u^2) + |g|v n \sqrt{n_b} + \frac{g_a |g| n n_a}{2\sqrt{n_b}} \right] \frac{k^4}{2m^2} + \left[ g_a n_a + 2v n_b + |g| \frac{n}{\sqrt{n_b}} \right] \frac{\hbar^2 k^6}{16m^3} + \frac{\hbar^4 k^8}{64m^4}. \quad (50)$$

Из приведенных формул следует, что частота пространственно-однородных колебаний ( $k = 0$ ) дается формулой

$$\omega_{A0}^2 = \frac{2|g|n_a\sqrt{n_b}}{\hbar^2} (4g_a - 4u + v). \quad (51)$$

Эта формула определяет частоту колебаний плотностей атомов и молекул при постоянной полной плотности. Положительность  $\omega_{A0}^2$  обеспечивается условиями устойчивости (23). Таким образом, при  $k = 0$  имеем  $\omega_{A1}^2 = \omega_{A0}^2$  и  $\omega_{A2}^2 = 0$ . Следовательно, в изучаемой фазе существуют две ветви возбуждений — одна с энергией активации (щелью)  $\omega_{A0}$ , а вторая — звуковая. Заметим, что при равной нулю константе связи  $g$ , которая ответственна за процессы слияния атомов в связанное состояние и его распад на два атома, энергетическая щель отсутствует.

В случае, когда взаимодействие между атомами и их связанными состояниями отсутствует,  $g_{ab} = g = 0$ , мы имеем несвязанные одночастичные возбуждения боголубовского типа:

$$\omega_{A1}^2 = \frac{k^2}{2m} \left[ \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2g_a n_a \right],$$

$$\omega_{A2}^2 = \frac{k^2}{4m} \left[ \frac{\hbar^2 k^2}{4m} + 2g_b n_b \right], \quad (52)$$

причем  $\omega_{A1}^2$  соответствует спектру для атомов, а  $\omega_{A2}^2$  — для связанных состояний.

Если равна нулю только константа связи  $g$ , то спектры (47), (48) совпадают со спектром одночастичных возбуждений в конденсате из двух сортов атомов (см., например, [4]).

При малых  $k$ , для звуковой ветви имеем

$$\omega_{A2}^2 = c_A^2 k^2, \quad (53)$$

где

$$c_A^2 = \frac{n}{m} \frac{g_a v - u^2}{4g_a + v - 4u}. \quad (54)$$

Отметим, что такое же выражение для скорости звука следует из найденной ранее формулы (26) для сжимаемости.

Вторая ветвь в области малых волновых векторов описывается формулой

$$\omega_{A1}^2 = \omega_{A0}^2 + \frac{k^2}{2m} \left[ 2g_a n_a + v n_b + |g| \frac{(n_a + 8n_b)}{2\sqrt{n_b}} - 2m c_A^2 \right]. \quad (55)$$

При больших импульсах имеем  $\omega_{A1} \sim \hbar k^2 / 2m$  и  $\omega_{A2} \sim \hbar k^2 / 4m$ , так что бесщелевая ветвь спектра лежит всегда ниже ветви со щелью.

*Молекулярный конденсат.* Для получения спектра элементарных возбуждений молекулярного конденсата необходимо провести линеаризацию уравнений (7), (8)

с учетом формул (9) вблизи состояния  $\varphi_a = 0, \varphi_b \neq 0$ .  
Линейные уравнения имеют вид

$$i\hbar\delta\dot{\varphi}_a + \left( \mu_B + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta - g_{ab}|\varphi_b|^2 \right) \delta\varphi_a - 2g\varphi_b\delta\varphi_a^* = 0, \quad (56)$$

$$i\hbar\delta\dot{\varphi}_b + \left( 2\mu_B + \frac{\hbar^2}{4m}\Delta - \varepsilon_0 - 2g_b|\varphi_b|^2 \right) \delta\varphi_b - g_b\varphi_b^2\delta\varphi_b^* = 0. \quad (57)$$

Видно, что выписанные уравнения для малых отклонений  $\delta\varphi_a$  и  $\delta\varphi_b$  не перепутываются. Будем искать решение уравнения (56) в виде

$$\delta\varphi_a = u_k \exp[i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega_{B1}t] - v_k^* \exp[-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega_{B1}t].$$

Тогда из условия совместности получаемых уравнений для функций  $u_k$  и  $v_k$  приходим к следующему спектру возбуждений [23]:

$$\omega_{B1}^2 = \frac{1}{\hbar^2} \left[ \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\varepsilon_0}{2} + \left( g_{ab} - \frac{g_b}{2} \right) n_b \right]^2 - \frac{4g^2 n_b}{\hbar^2}, \quad (58)$$

где учтено выражение для химического потенциала  $2\mu_B = \varepsilon_0 + g_b n_b$ , которое следует из уравнения (11) при  $n_a = 0$ . Полученный спектр имеет энергетическую щель, величина которой дается выражением

$$\omega_{B0}^2 = \frac{1}{\hbar^2} \left[ \frac{\varepsilon_0}{2} - \left( g_{ab} - \frac{g_b}{2} \right) n_b \right]^2 - \frac{4g^2 n_b}{\hbar^2}, \quad (59)$$

или

$$\omega_{B0}^2 = \frac{1}{4\hbar^2} (\varepsilon_0 - \varepsilon_0^{cr})(\varepsilon_0 - \varepsilon_0^-),$$

где  $\varepsilon_0^{cr}$  определяется формулой (38) и

$$\varepsilon_0^- = \left( g_{ab} - \frac{g_b}{2} \right) n - 2\sqrt{2} |g| \sqrt{n},$$

причем  $\varepsilon_0^{cr} < \varepsilon_0^-$ . Поскольку фаза с молекулярным конденсатом стабильна при  $\varepsilon < \varepsilon_0^{cr}$ , то щелевой спектр (58) в этом случае всегда устойчив. При  $\varepsilon_0 > \varepsilon_0^{cr}$  состояние с молекулярным конденсатом неустойчиво и квадрат щели  $\omega_{B0}^2$  становится отрицательным.

Проводя аналогичную процедуру линеаризации для уравнения (57), приходим к другой ветви спектра

$$\omega_{B2}^2 = \frac{k^2}{4m} \left[ \frac{\hbar^2 k^2}{4m} + 2g_b n_b \right], \quad (60)$$

которая является акустической и совпадает со спектром Боголюбова для частиц с массой  $2m$ . Квадрат частоты спектра положителен при  $g_b > 0$ , что нахо-

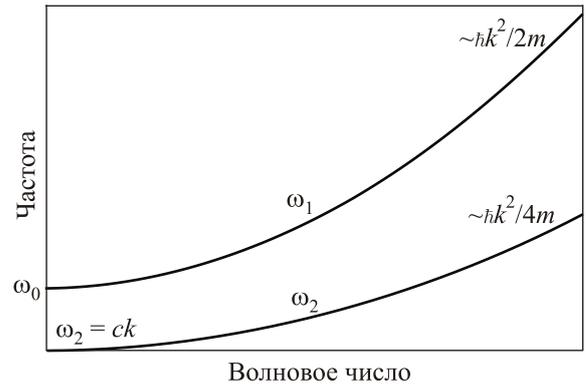


Рис. 5. Схематический вид спектра элементарных возбуждений. В обоих фазах спектр имеет две ветви — щелевую  $\omega_1$  и акустическую  $\omega_2$ . В случае атомарно-молекулярного конденсата указанные ветви и щель  $\omega_0$  определяются формулами (47), (48), (51) соответственно. Для молекулярного конденсата щелевая и акустическая ветви спектра даются выражениями (58)–(60).

дится в соответствии с вышеупомянутым условием устойчивости рассматриваемого состояния. Для скорости звука имеем

$$c_B^2 = \frac{g_b n_b}{2m}. \quad (61)$$

Таким образом, в случае молекулярного конденсата мы также имеем две ветви спектра — щелевую и акустическую, причем щелевая ветвь лежит всегда выше акустической моды. Вид спектров схематически представлен на рис. 5.

Отметим, что такие же спектры возбуждений авторы получили также, используя метод Боголюбова, основанный на замене операторов конденсатных частиц на  $c$  — числа в гамильтониане с последующей диагонализацией его квадратичной части. Когда настоящая работа была уже написана, авторам стало известно, что метод Боголюбова к данной проблеме применялся в [23]. Разработанный в настоящей работе подход, основанный на обобщении уравнения Гросса–Питаевского, позволяет существенно более просто получать многие результаты теории, в частности спектры элементарных возбуждений. Таким образом, как отмечено во Введении, данная работа демонстрирует эквивалентность двух различных подходов к исследуемой проблеме и содержит новые результаты, дополняющие [23].

## 5. Заключение

В рамках подхода Гросса–Питаевского теоретически изучено основное состояние, устойчивость и коллективные возбуждения бозе-эйнштейновского конденсата, состоящего из атомов и их двухатомных связанных состояний. Показано, что в зависимости от

величины энергии связи и параметров взаимодействия, основное состояние может формироваться как единым конденсатом атомов и молекул (атомарно-молекулярная фаза), так и конденсатом только молекул (молекулярная фаза). Для обеих фаз вычислены основные термодинамические характеристики: энергия, давление, сжимаемость, концентрация пар. Получены условия устойчивости атомарно-молекулярного и молекулярного конденсатов. Для атомарно-молекулярного конденсата условия устойчивости накладывают ограничения не только на величины постоянных взаимодействия, но и на плотности числа атомов и молекул в конденсате. В случае атомарно-молекулярного конденсата проанализирована зависимость концентрации молекул от энергии связи и полной плотности, а также зависимость давления от концентрации молекул и полной плотности. Показано, что при фиксированной полной плотности атомов фаза с атомарно-молекулярным конденсатом всегда имеет меньшую энергию в сравнении с молекулярным конденсатом. Молекулярная фаза существует в области тех параметров, при которых не может существовать атомарно-молекулярная фаза.

Изучены коллективные возбуждения в обеих фазах и показано, что в каждой фазе имеется по две ветви возбуждений. Одна мода имеет звуковой характер, а во второй моде в пределе малых волновых чисел имеется энергетическая щель, определяющая частоту пространственно-однородных колебаний. Продемонстрировано, что скорости звука, полученные из акустических мод спектра, совпадают с соответствующими скоростями, найденными из термодинамики.

Развитый подход, основанный на обобщенном уравнении Гросса–Питаевского, позволяет достаточно просто описать равновесное состояние и возбуждения конденсата атомов и их двухатомных связанных состояний. Однако для последовательного описания динамики такой системы с учетом релаксационных и диссипативных процессов данный подход должен быть модифицирован. В этом случае система должна описываться связанными уравнениями эволюции, учитывающими как динамику конденсата, так и динамику функции распределения квазичастичных возбуждений [28,29].

Авторы благодарны Ю.В. Слюсаренко за обсуждение полученных результатов.

1. M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, and E.A. Cornell, *Science* **269**, 198 (1995).
2. K.B. Davis, M.-O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Druten, D.S. Durfee, D.M. Kurn, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
3. C.C. Bradley, C.A. Sackett, J.J. Tollett, and R.G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995).
4. C.J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge University Press, Cambridge (2002).

5. L.P. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, Oxford University Press, Clarendon (2003).
6. J.O. Andersen, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 599 (2004).
7. V.I. Yukalov, *Laser Phys. Lett.* **1**, 435 (2004).
8. N.N. Bogolyubov, *J. Phys. USSR* **11**, 23 (1947).
9. P. Courtteille, R. Freeland, D. Heinzen, F. van Abeelen, and B. Verhaar, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 69 (1998).
10. S. Inouye, M. Andrews, J. Stenger, H.J. Meisner, S. Stamper-Kurn, and W. Ketterle, *Nature* **392**, 151 (1998).
11. C. Chin, R. Grimm, P. Julienne, and E. Tiesinga, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1225 (2010).
12. T. Köhler, K. Góral, and P.S. Julienne, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 1311 (2006).
13. K. Xu, T. Mukaiyama, J.R. Abo-Shaeer, J.K. Chin, D.E. Miller, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 210402 (2003).
14. J. Herbig, T. Kraemer, M. Mark, T. Weber, C. Chin, and H.-C. Nägerl, *Science* **301**, 1510 (2003).
15. C. McKenzie, J.H. Denschlag, H. Häffner, A. Browaeys, L.E. de Araujo, F.K. Fatemi, K.M. Jones, J.E. Simsarian, D. Cho, A. Simoni, E. Tiesinga, P.S. Julienne, K. Helmerson, P.D. Lett, S.L. Rolston, and W.D. Phillips, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 120403 (2002).
16. R. Wynar, R.S. Freeland, D.J. Han, C. Ryu, and D.J. Heinzen, *Science* **287**, 1016 (2000).
17. F. Wang, D. Xiong, X. Li, D. Wang, and E. Tiemann, *Phys. Rev. A* **87**, 050702(R) (2013).
18. E.A. Donley, N.R. Claussen, S.T. Thompson, and C.E. Wieman, *Nature* **417**, 529 (2002).
19. S.V. Peletminskii and Yu.V. Slyusarenko, *J. Math. Phys.* **46**, 022301 (2005).
20. Yu. Slyusarenko and A. Sotnikov, *Phys. Rev. A* **78**, 053622 (2008); Yu. Slyusarenko and A. Sotnikov, *Phys. Rev. A* **80**, 053604, (2009).
21. E. Timmermans, P. Tommasini, R. Côté, M. Hussein, and A. Kerman, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2691 (1999).
22. E. Timmermans, P. Tommasini, M. Hussein, and A. Kerman, *Phys. Rep.* **315**, 199 (1999).
23. L. Radzihovsky, P.B. Weichman, and J.I. Park, *Ann. Phys.* **323**, 2376 (2008).
24. Yu.M. Poluektov, *Fiz. Nizk. Temp.* **37**, 1239 (2011) [*Low Temp. Phys.* **37**, 986 (2011)].
25. A.I. Akhiezer, V.V. Krasil'nikov, S.V. Peletminskii, and A.A. Yatsenko, *Phys. Rep.* **245**, 1 (1994).
26. A.S. Peletminskii, S.V. Peletminskii, and Yu.M. Poluektov, *Condens. Matter Phys.* **16**, 13603 (2013).
27. M. Holland, J. Park, and R. Walser, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 1915 (2001).
28. S.V. Peletminskii, A.I. Sokolovskii, and V.S. Shchelokov, *Teor. Mat. Fiz.* **30**, 57 (1977) [*Theor. Math. Phys.* **30**, 35 (1977)]; *Teor. Mat. Fiz.* **34**, 81 (1978) [*Theor. Math. Phys.* **34**, 51 (1978)].
29. T.R. Kirkpatrick and J.R. Dorfman, *J. Low Temp. Phys.* **58**, 301 (1985).

**Ground state and excitations of a Bose–Einstein condensate of atoms and their diatomic bound states**

A.S. Peletminskii, S.V. Peletminskii,  
and Yu.M. Poluektov

We study theoretically a many-body system of spinless atoms and their diatomic bound states (or molecules) which form a single Bose–Einstein condensate at zero temperature. The equilibrium states of such a system and its dynamics are analyzed within the Gross–Pitaevskii approach. It is shown that the system exhibits two phases depending on binding energy value: it can be in the states with atomic-molecular condensate or molecular condensate. The basic thermodynamic characteristics of the two phases

and their stability conditions are obtained. Both phases are characterized by two branches of collective excitations. The first branch is acoustic mode and the second one is gapfull.

PACS: 03.75.Kk Dynamic properties of condensates; collective and hydrodynamic excitations, superfluid flow;  
03.75.Mn Multicomponent condensates; spinor condensates;  
03.75.Hh Static properties of condensates; thermodynamical, statistical, and structural properties;  
05.30.Jp Boson systems.

Keywords: Bose system, atomic-molecular condensate, thermodynamics, stability, excitation spectrum.