Физика низких температур, 2004, т. 30, № 3, с. 332–339

Колебания упругой сверхструктуры, образованной решеткой винтовых дислокаций

А.М. Косевич

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины пр. Ленина, 47, г. Харьков, 61103, Украина
E-mail: kosevich@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 18 июля 2003 г.

Сформулированы уравнения малых колебаний дислокационной решетки, образованной периодической системой параллельных прямолинейных винтовых дислокаций. Обсуждена стабильность такой решетки и показано, что она обеспечивается соответствующим спонтанным закручиванием кристаллического образца. Описаны длинноволновые коллективные колебания упругой изотропной среды с дислокационной решеткой, среди которых обнаружены колебания типа плазменных в системе электрических зарядов. Получены законы дисперсии пяти ветвей колебаний, отвечающих пяти степеням свободы изучаемой системы (три степени свободы смещений среды и две — изгибных колебаний дислокаций). Указана возможность наблюдения резонансной частоты в спектре колебаний вблизи аналога плазменной частоты.

Сформульовано рівняння малих коливань дислокаційної гратки, утвореної періодичною системою паралельних прямолініійних гвинтових дислокацій. Обговорено стабільність такої гратки та показано, що вона забезпечується відповідним спонтанним закручуванням кристалічного зразка. Описано довгохвильові колективні коливання пружного ізотропного середовища з дислокаційною граткою, серед яких виявлено коливання типу плазмових у системі електричних зарядів. Отримано закони дисперсії п'яти віток коливань, що відповідають п'яти ступіням вільності системи, яку вивчають (три ступені вільності зміщення середовища та дві — згинальних коливань дислокацій). Зазначено можливість спостереження резонансної частоти у спектрі коливань поблизу аналога плазмової частоти.

PACS: 61.72.Lk

Введение

В последнее время повышенный интерес вызывают физические свойства оптических и акустических сверхрешеток. Под сверхрешеткой понимают некоторую макроскопическую периодическую структуру, созданную на базе упругой или диэлектрической среды. Подобную так называемую $2D$ сверхрешетку возможно создать, например, набором прямолинейных дефектов среды, выстроенных в периодический «лес» параллельных линий. Своеобразной реализацией таких сверхрешеток можно расматривать вихревые решетки в сверхпроводниках II рода и в сверхтекучем гелии (см., например, обзоры [1,2] и одну из последних публикаций по теме [3]).

Винтовые дислокации в кристалле аналогичны вихрям, однако динамика и взаимодействие дислокаций отличаются от таковых для вихрей. Винтовые прямолинейные дислокации взаимодействуют подобно прямолинейным электрическим зарядам, и можно ожидать появления в динамике дислокационных структур колебаний типа плазменных, в принципе, невозможных в решетке вихрей. Действительно, длинноволновые колебания $2D$ дислокационной структуры, называемой дислокационной стенкой, обладают законом дисперсии, типичным для плазменных осцилляций $2D$ электронного газа [4,5]. К сожалению, авторы публикации [6] пропустили плазменные колебания в системе прямолинейных дислокаций.

Под дислокационной решеткой будем понимать систему параллельных винтовых дислокаций одного знака, пересекающих перпендикулярную им плоскость в узлах $2D$ решетки. Естественно, возникает вопрос, чем стабилизируется такая решетка расталкивающихся дислокаций. Этот вопрос обсуждается в статье, и ответ на него сводится к тому, что стабилизация решетки обеспечивается возникающим в кристалле однородным по длине образца закручиванием.

Нам представляется, что узловым моментом при формулировке уравнений динамики системы дислокаций является правильный учет плотности потока дислокаций непосредственно в уравнениях упругого поля (при наличии движущихся дислокаций) [4,7]. Предложенная система уравнений напоминает уравнения электромагнитного поля при наличии движущихся зарядов, но несколько сложнее. Уравнения движения «зарядов», т.е. винтовых дислокаций, взято в самом простом виде — в модели упругой струны. Динамические уравнения упругого поля и уравнения движения дислокаций составляют полную систему, позволяющую описать малые колебания дислокационной решетки.

Изучены длинноволновые колебания дислокационной решетки, при которых длина волны колебаний значительно превосходит период решетки. Получены две независимые ветви колебаний. Одна из ветвей представляет собой связанные колебания плотности дислокационной решетки (волны сжатия—разрежения) и поперечных колебаний упругой среды (волн поворота вокруг направления дислокационных осей). Отвечая двум степеням свободы, эта ветвь характеризуется двумя законами дисперсии. Один из них принадлежит софазному движению решетки и среды, а потому в низкочастотном пределе имеет вид звукового закона дисперсии; второй относится к противофазным колебаниям решетки и упругой среды, поэтому в длинноволновом пределе обладает щелью, частота которой включает и плазменную частоту дислокационной решетки.

Другая ветвь представляет собой связанные поперечные колебания дислокационной решетки и колебания упругой среды, имеющие составляющую скорости смещений вдоль дислокационных осей. Указанные движения имеют три коллективные степени свободы: поперечные колебания дислокационной решетки в плоскости, перпендикулярной дислокационным осям (смещение дислокационных линий происходит в этой плоскости), и две степени свободы, которым отвечают волны разрежения—сжатия упругой среды и волны поворотов в упругой среде вокруг осей, лежащих в упомянутой плоскости. Соответственно, эта ветвь колебаний порождает три дисперсионных соотношения: два из них описывают софазные волны колебаний дислокационной решетки и упругой среды, а одно — противофазные колебания.

Описание аналогичных результатов, полученных в простой так называемой скалярной модели, опубликовано в [8].

2. Стабильность дислокационной решетки

Винтовая дислокация, параллельная оси z, создает чисто сдвиговое однокомпонентное поле смещений: вектор смещений $\mathbf{u} = (0,0,w)$ имеет только одну отличную от нуля компоненту w, зависящую от координат x, y. Если изолированная винтовая дислокация совпадает с осью z, то она создает упругое поле, в котором величина w при обходе вокруг оси дислокации приобретает фиксированное приращение:

$$w = \frac{b}{2\pi}\phi, \qquad \phi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \tag{1}$$

где b — величина вектора Бюргерса дислокации, который направлен по оси z: $\mathbf{b} = (0,0,b)$. Поле смещений (1) связано с напряжениям

$$\sigma^0_{z\phi} = \frac{bG}{2\pi}\,\frac{1}{r}, \tag{2}$$

где $\sigma_{z\phi}$ есть $z\phi$-элемент тензора напряжений в цилиндрических координатах.

Предполагается, что система параллельных винтовых дислокаций, ориентированных вдоль оси z и пересекающих плоскость (x,y) в дискретных, периодически расположенных точках, образует $2D$ решетку, элементарная ячейка которой имеет площадь S_0: $S = NS_0$, где S — площадь сечения образца в плоскости (x,y), а N — полное число дислокаций. Координаты указанных точек в равновесной решетке

$$\mathbf{x}(\mathbf{n}) = \mathbf{R}_\mathbf{n} \equiv \sum_\alpha \mathbf{a}_\alpha n_\alpha, \quad \mathbf{n} = (n_1,\, n_2, 0), \tag{3}$$

где $\mathbf{a}_\alpha$ $(\alpha = 1,2)$ — основные трансляционные векторы решетки ($a_\alpha \sim a$, здесь a — расстояние между соседними дислокациями).

Конструируя подобную решетку винтовых дислокаций, следует вспомнить, что винтовые дислокации одного знака расталкиваются подобно линейным одноименным зарядам [4]. Поэтому такая решетка не может находиться в равновесии без компенсации расталкивания дислокаций. Вихревая решетка в сверхпроводнике стабилизируется магнитным потоком через сверхпроводник. Вихревая решетка в сверхтекучем гелии стабилизируется вращательным моментом сосуда с гелием. Аналогичное «внешнее поле» существует и в случае решетки вихревых дислокаций в образце, свободном от внешних воздействий.

Пусть рассматриваемый кристалличесий образец имеет форму цилиндра большого радиуса R (в пределе $R \to \infty$). Большое число винтовых дислокаций, параллельных оси цилиндра, образуют $2D$ решетку с площадью S_0 элементарной ячейки в плоскости (x,y). Интересуясь прежде всего макроскопическими (усредненными) свойствами решетки, допустим, что дислокации распределены непрерывно с плотностью $1/S_0$. Вспомним, что дислокация, совпадающая с осью цилиндра, создает вокруг себя поле напряжений (2). Но так как поле напряжений винтовых дислокаций подобно электрическому полю линейных зарядов или токов, то напряжения на расстоянии r от оси цилиндра создаются всеми дислокациями, пересекающими площадь $S = \pi r^2$ вокруг оси цидиндра, и равны напряжениям вокруг одной расположенной на оси цилиндра ($x = y = 0$) дислокации с суммарным «зарядом» (вектором Бюргерса bS/S_0) всех этих дислокаций:

$$\sigma_{z\phi} = \frac{S}{S_0}\sigma^0_{z\phi} = \frac{bG}{2S_0}r. \tag{4}$$

Прежде всего, эти напряжения создают силу, действующую на дислокацию, удаленную на расстояние r от оси цилиндра

$$f_r = b\sigma_{z\phi} = \frac{b^2G}{2S_0}r. \tag{5}$$

Во-вторых, хотя дислокационное поле (4) удовлетворяет граничным условиям $\sigma_{rr} = \sigma_{rz} = \sigma_{r\phi} = 0$ на свободной боковой поверхности образца, оно создает следующий закручивающий момент сил на торце цилиндра

$$M_z = \int r\sigma_{z\phi}dS = 2\pi\int_0^R \sigma_{z\phi}r^2dr = \frac{\pi Gb}{4S_0}R^4. \tag{6}$$

Таким образом, видно, что дислокационная решетка создает напряжения, которые порождают отличный от нуля вращательный момент M_z на концах цилиндра. Если торцы цилиндра свободны, то рассчитанное поле напряжений (4) не удовлетворяет граничным условиям на торцах (даже если последние бесконечно удалены). Следовательно, истинное решение уравнений равновесия цилиндра должно включать дополнительные напряжения, компенсирующие момент M_z, т.е. создающие на торцах цилиндра средний момент M_z [9]. Эти напряжения (а также соответствующие смещения) легко получить из теории кручения стержней. Известно, что при кручении стержня под действием момента M_z возникает компонента вектора смещений u_ϕ, обеспечивающая однородный по длине стержня угол кручения

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u_\phi}{r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial z} = \frac{M_z}{C}, \tag{7}$$

где $C = (1/2)\pi GR^4$ — крутильная жесткость кругового стержня.

Учитывая (6) и (7), легко записать распределение дополнительных смещений и напряжений в цилиндре

$$u_\phi = -\frac{brz}{2S_0}, \qquad \sigma_\phi = -\frac{bG}{2S_0}r. \tag{8}$$

Напряжения, описывамые вторым соотношением в (8), могут рассматриваться как некоторое внешнее поле по отношению к дислокационной решетке. Сравнивая (8) и (5), видим, что сила взаимодействия выделенной дислокации с остальными непрерывно распределенными дислокациями в точности компенсируется этими «внешними напряжениями». Последнее означает, что ожидаемое расталкивание дискретных дислокаций, рассчитанное по формуле (5) с использованием (2), в среднем исключается правильным учетом граничных условий и симметрией задачи с непрерывным распределением дислокаций. Другими словами, равновесное состояние дислокационной решетки стабилизируется закручиванием образца.

Поскольку происходит компенсация средних напряжений, созданных всей решеткой, то необходимо исключить средние дислокационные напряжения из силы взаимодействия каждой дислокации с остальными дислокациями в решетке. Следовательно, в предлагаемой схеме решетка винтовых дислокаций одного знака рассматривается как бы на фоне непрерывно распределенных дислокаций противоположного знака.

3. Динамические уравнения упругого поля с винтовыми дислокациями

Упругое поле дислокаций определяется, естественно, пространственным распределением дислокаций (тензором плотности дислокаций $\alpha_{ik}(\mathbf{x},t)$, $i,k = 1,2,3$) и их потоков (тензором плотности потока вектора Бюргерса [4,7] $j_{ik}(\mathbf{x},t)$). В общем случае указанные плотности связаны аналогом уравнения непрерывности:

$$\frac{\partial\alpha_{ik}}{\partial t} + e_{ilm}\nabla_i j_{mk} = 0, \tag{9}$$

где e_{ikl} — единичный антисимметричный тензор третьего ранга, а $\nabla_i = \partial/\partial x_i$. В случае отдельной дислокации, пересекающей плоскость $z = \text{const}$ в точке $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$, указанные плотности равны:

$$\alpha_{ik} = \tau_i b_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x} = (x, y), \tag{10}$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор касательной к линии дислокации, а $\mathbf{b}$ — вектор Бюргерса дислокации и

$$j_{ik} = e_{ilm} \tau_l V_m b_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \tag{11}$$

где $\mathbf{V}$ — вектор скорости элемента дислокации (в случае прямолинейных дислокаций, направленных вдоль оси z, этот вектор имеет только две составляющих: $V_\alpha = 1, 2$).

Если в кристалле распределены дислокации, то невозможно ввести вектор смещения среды $\mathbf{w}$ как однозначную функцию координат, и деформация среды описывается тензором дисторсии [4,7] u_{ik} ($i = 1, 2, 3$). Тензор дисторсии является первичной самостоятельной характеристикой деформации среды (его симметричная часть определяет тензор деформации) и входит в основное уравнение теории упругости кристалла с дислокациями:

$$e_{ilm} \nabla_l u_{mk} = -\alpha_{ik}. \tag{12}$$

Если дислокации движутся, то уравнение (12) не меняется, но возникает вектор $\mathbf{j}$. Введение плотности потока дислокаций есть узловой момент построения динамического упругого поля, так как он определяет одно из основных уравнений теории движущихся дислокаций [4,7]:

$$\frac{\partial u_{ik}}{\partial t} = \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + j_{ik}, \quad i, k = 1, 2, 3. \tag{13}$$

В интересующем нас случае винтовых дислокаций, выстроенных вдоль оси z, вектор Бюргерса имеет единственную отличную от нуля компоненту $b_z = b$, поэтому индекс k в (10) и (11) входит как параметр, и удобно ввести векторное обозначение для плотности потока вектора Бюргерса:

$$j_i = j_{iz}. \tag{14}$$

Кроме того, учтем, что в задаче о колебаниях дислокационной решетки скорость дислокации является малой величиной, и в линейном по $\mathbf{V}$ приближении вектор $\boldsymbol{\tau}$ в определении (11) можно считать направленным постоянно параллельно оси z (удобно положить $\tau_z = -1$). Тогда $j_z = 0$ и

$$j_\alpha = b \varepsilon_{\alpha\beta} V_\beta \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad \alpha = 1, 2, \tag{15}$$

где матрица $\varepsilon_{\alpha\beta}$ равна

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1, 2. \tag{16}$$

Тогда уравнение (13) примет вид

$$\frac{\partial u_{iz}}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial x_i} + j_i, \ i = 1, 2, 3; \quad \frac{\partial u_{i\alpha}}{\partial t} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_i}, \quad \alpha = 1, 2. \tag{17}$$

Плотность дислокационного потока в решетке есть сумма величин (15) по всей решетке:

$$j_\alpha = b \varepsilon_{\alpha\beta} \sum_{\mathbf{n}} V_\beta(\mathbf{n}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}(\mathbf{n})). \tag{18}$$

В проблеме малых колебаний решетки винтовых дислокаций соотношение (18) содержит достаточную информацию для вычисления вклада движущихся дислокаций во временную зависимость упругого поля. Действительно, скорость смещения элемента упругой среды $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ является решением следующего уравнения, согласованного с основным уравнением динамической теории упругости и уравнением (13) [4,7]:

$$\rho \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} - \lambda_{iklm} \nabla_k \nabla_l v_m = \lambda_{iklm} \nabla_k j_{lm}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{19}$$

где ρ — плотность вещества (масса единицы объема), а λ_{iklm} — тензор упругих модулей кристалла.

Однако уравнение (19) не учитывает ни в какой мере дискретности среды и наличия так называемого рельефа Пайерлса. Последний связан с тем очевидным физическим обстоятельством, что даже малые смещения дислокации относительно кристаллической решетки требуют совершения определенной работы. Поэтому возникает дополнительная сила, приложенная в точке нахождения дислокации и пропорциональная величине относительного смещения среда—дислокация. Нам удобнее ввести эту силу позже при обсуждении уравнения движения дислокации. А сейчас заметим, что для решетки винтовых дислокаций в изотропной среде уравнение (19) упрощается:

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} - c_t^2 \Delta v_i - (c_l^2 - c_t^2) \nabla_i \operatorname{div} \mathbf{v} = $$
$$= c_t^2 (\nabla_z j_i + \nabla_\alpha j_\alpha \delta_{iz}), \ i = 1, 2, 3, \tag{20}$$

где c_t и c_l — это скорости поперечного и продольного звука соответственно. Удобно переписать (20) в компонентах:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_t^2 \Delta \right) v_z - (c_l^2 - c_t^2) \nabla_z \operatorname{div} \mathbf{v} = c_t^2 \nabla_\alpha j_\alpha, \tag{21}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_t^2 \Delta \right) v_\alpha - (c_l^2 - c_t^2) \nabla_\alpha \operatorname{div} \mathbf{v} = c_t^2 \nabla_z j_\alpha, \ \alpha = 1, 2. \tag{22}$$

Поскольку тензор Грина для динамического уравнения теории упругости изотропной среды известен в явном виде, то уравнения (20)—(22) позволяют выразить скорость смещения элементов среды непосредственно через пространственные производные плотности дислокационного потока.

4. Динамика дислокационной решетки

Итак, если известно распределение потоков дислокаций, то имеются уравнения, описывающие динамические упругие поля в образце. Чтобы замкнуть эту систему, необходимо записать уравнения, определяющие скорости дислокаций, т.е. уравнения движения дислокаций под действием упругих полей. Простейшая форма такого уравнения — это уравнение колебаний упругой струны. Пусть $\mathbf{U}(\mathbf{n}, z, t)$ — вектор смещения элемента n-й дислокации $\mathbf{U}(U_1, U_2, 0)$, зависимость которого от времени определяет скорость дислокации: $V_\alpha = \partial U_\alpha / \partial t$, $\alpha = 1, 2$. Тогда упомянутое уравнение имеет вид («номер» дислокации опускаем) [4,7]

$$m\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial t^2} = \eta\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial z^2} + f_\alpha + S_\alpha. \qquad (23)$$

Здесь m — эффективная масса единицы длины дислокации. Основную часть эффективной массы в так называемом логарифмическом приближении представляет полевая масса (масса инерции упругого поля, созданного дислокацией):

$$m_* = \frac{\rho b^2}{4\pi}\ln\left(\frac{R_{\text{cur}}}{r_0}\right), \qquad (24)$$

где R_{cur} — это либо радиус кривизны дислокационной линии, либо длина волны изгибных колебаний, а r_0 — межатомное расстояние. Однако истинная масса единицы длины дислокации превышает эту величину, так как перестройка в ядре движущейся дислокации вовлекает в движение часть атомов в окрестности оси дислокации на расстояниях порядка r_0 от нее. Порядок величины массы атомов внутри трубки радиусом $r_0 \sim b$ на единице длины дислокации можно оценить как $\rho r_0^2 \sim \rho b^2$. Сравнивая эту оценку с (24) и понимая необходимость добавить эту массу к (24), будем помнить, что эффективная масса единицы длины дислокации $m > m_*$.

Далее, η — линейное натяжение винтовой дислокации, созданное упругим взаимодействием рассматриваемого элемента дислокации с другими частями той же дислокации:

$$\eta = \frac{\rho c_t^2 b^2}{4\pi}\ln\left(\frac{R_{\text{cur}}}{r_0}\right). \qquad (25)$$

Соответствующая сила определяет самодействие искривленной дислокации, она обусловлена собственной энергией отдельной дислокационной петли.

Сила $\mathbf{f}$ описывает упругое взаимодействие рассматриваемой дислокации с остальными непрерывно распределенными дислокациями, она равна

$$f_\alpha = b\varepsilon_{\alpha\beta}\sigma_\beta = bG\varepsilon_{\alpha\beta}(u_{\beta z} + u_{z\beta}), \qquad (26)$$

где σ_β, $u_{\beta z}$ и $u_{z\beta}$ — это напряжения и дисторсии за вычетом упругих полей однородно и непрерывно распределенных дислокаций, сцепленных с упругой средой.

Наконец, $\mathbf{S}$ — это сила, обусловленная дискретностью решетки, включая диссипативные силы. Интересуясь законом дисперсии малых колебаний, пренебрежем последними и берем силу $\mathbf{S}$ в виде

$$\mathbf{S} = -m\omega_0^2\mathbf{U}, \qquad (27)$$

где ω_0 — частота колебаний дислокационной струны в долине рельефа Пайерлса.

Однако следует помнить, что $\mathbf{U}$ — это смещение дислокации, конечно, относительно среды, т.е. та часть смещения элемента среды, которая ответственна за пластическую деформацию [7]. Ее можно представить как $\mathbf{U} = \mathbf{u}_g - \mathbf{u}$, где $\mathbf{u}_g$ — геометрическое смещение среды в точке расположения элемента дислокационной линии, а $\mathbf{u}$ — упругое смещение элемента среды, порождающее упругую дисторсию $u_{ik} = \nabla_i u_k$.

Сила (27) появилась из дополнительной энергии, возникшей за счет упоминавшейся ранее работы смещения дислокации относительно среды, которую удобно засписать в виде

$$\delta E = \frac{1}{2}m\omega_0^2\sum_{\mathbf{n}}\int dz\,\mathbf{U}^2(\mathbf{x}, z). \qquad (28).$$

Ясно, что энергия (28) порождает также плотность силы $f_i^D = -\partial E / \partial u_i$, действующую на элементы объема среды в местах нахождения смещенных из равновесных положений дислокаций. Она равна

$$\mathbf{f}^D = m\omega_0^2\sum_{\mathbf{n}}\mathbf{U}(\boldsymbol{n}, z)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}(\mathbf{n})). \qquad (29).$$

Плотность силы (29) должна быть включена в основное уравнение движения упругой среды, а ее производная по времени

$$\frac{\partial f_i^D}{\partial t} = m\omega_0^2\sum_{\mathbf{n}}V_i(\mathbf{n}, z)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}(\mathbf{n})) \qquad (30)$$

должна быть добавлена (поделенная на ρ) в правую часть уравнения (20).

Имея уравнения движения дислокаций (23) и уравнения упругого поля либо в форме (20), либо в форме (21) и (22), дополненные плотностью силы (29), можно изучать коллективные колебания дислокационной решетки и упругой среды.

5. Длинноволновые коллективные колебания

Исследуем длинноволновые колебания дислокационной решетки, полагая длину волны колебаний, значительно превышающей период решетки a ($ak \ll 1$). В этом приближении распределение дислокаций можно считать непрерывным, характеризуя его плотностью $n(\mathbf{x},t)$. В равновесии $n = n_0$, где $n_0 = 1/S_0 = \mathrm{const}$. Динамика решетки определяется в основном средней плотностью дислокационного потока $\mathbf{j}$, который в линейном приближении имеет отличные от нуля компоненты

$$j_\alpha(\mathbf{x},t) = bn_0\varepsilon_{\alpha\beta}V_\beta(\mathbf{x},t), \quad \alpha = 1, 2, \tag{31}$$

где $\mathbf{V}$ — средняя скорость дислокаций. Скорость $\mathbf{V}$ должна определяться уравнением движения дислокации (23). Интересуясь эффектами чисто полевого происхождения, пренебрежем учетом рельефа Пайерлса, т.е. положим $\omega_0 = 0$. Перепишем уравнение движения (23), используя (26) и (27):

$$\frac{\partial V_\alpha}{\partial t} - s^2\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial z^2} = \frac{bG}{m}\varepsilon_{\alpha\beta}(u_{\beta z} + u_{z\beta}), \tag{32}$$

где s — скорость изгибной волны дислокации ($s^2 = \eta/m$). Помня замечания по поводу эффективной массы единицы длины дислокации, считаем $s < c_t$.

Продифференцируем (32) по времени и воспользуемся уравнением (13), а также выражением (31). После элементарных вычислений получаем

$$\frac{\partial^2 V_\alpha}{\partial t^2} + \omega_{pl}^2 V_\alpha - s^2\frac{\partial^2 V_\alpha}{\partial z^2} = \frac{bG}{m}\varepsilon_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial z}\right), \tag{33}$$

где введено обозначение

$$\omega_{pl}^2 = \frac{b^2 G n_0}{m}. \tag{34}$$

Частота ω_{pl} — это аналог плазменной частоты.

Согласуем запись (33) с уравнениями (21) и (22), для чего введем средний двумерный поток дислокационных линий

$$\mathbf{J} = bn_0\mathbf{V}. \tag{35}$$

Тогда вместо (33) следует писать

$$\frac{\partial^2 J_\alpha}{\partial t^2} + \omega_{pl}^2 J_\alpha - s^2\frac{\partial^2 J_\alpha}{\partial z^2} = \omega_{pl}^2\varepsilon_{\alpha\beta}v_{z\beta}, \tag{36}$$

где обозначено

$$v_{ik} = \nabla_i v_k + \nabla_k v_i, \quad i, k = 1, 2, 3.$$

Легко видеть, что уравнения, связывающие функции $P = \operatorname{div}\mathbf{J} \equiv \nabla_\alpha J_\alpha$ и $(\operatorname{rot}\mathbf{v})_z$, отделяются от остальных динамических уравнений и образуют автономную пару:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{pl}^2 - s^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)P = \omega_{pl}^2\nabla_z(\operatorname{rot}\mathbf{v})_z, \tag{37}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_t^2\Delta\right)(\operatorname{rot}\mathbf{v})_z = c_t^2\nabla_z(\operatorname{rot}\mathbf{j})_z \equiv -c_t^2\nabla_z P. \tag{38}$$

Уравнения (37) и (38) определяют для собственных коллективных колебаний типа $\exp(i\mathbf{kx} - i\omega t)$ ветвь колебаний с анизотропным законом дисперсии, который представим в неявном виде:

$$(\omega^2 - c_t^2k^2)(\omega^2 - \omega_{pl}^2 - s^2k_z^2) = \omega_{pl}^2(c_tk_z)^2. \tag{39}$$

Квадратное уравнение (39) имеет два корня, дающие простую зависимость частоты от волнового вектора в предельно длинноволновом случае ($ck \ll \omega_{pl}$).

1. Анизотропный закон дисперсии низкочастотных колебаний звукового типа:

$$\omega^2 = \sin^2\theta(c_tk)^2 \equiv c_t^2(k_x^2 + k_y^2), \tag{40}$$

где θ — это угол между волновым вектором и осью z ($k_z = k\cos\theta$). Если продолжить дисперсионную зависимость в область больших волновых векторов, то можно убедиться, что с ростом k эта зависимость приближается к $\omega^2 = s^2k_z^2$.

2. Анизотропный закон дисперсии со щелью (высокочастотные колебания):

$$\omega^2 = \omega_{pl}^2 + \cos^2\theta(c_t^2 + s^2)k^2 \equiv \omega_{pl}^2 + (c_t^2 + s^2)k_z^2. \tag{41}$$

Снова проследим за дисперсионной зависимостью ветви в области больших волновых векторов. С ростом k эта зависимость приближается к $\omega^2 = c_t^2k^2$. Видно, что действительно оба закона дисперсии сильно анизотропны.

Итак, одна ветвь коллективных колебаний отвечает связанным колебаниям поперечных компонент упругого поля $(\operatorname{rot}\mathbf{v})_z$ и продольным колебаниям расширения—сжатия дислокационной решетки (P). Естественно, что в характеристику таких колебаний включена плазменная частота. В волне, распространяющейся в плоскости (x,y), поля $\operatorname{rot}\mathbf{v}(x,y,t)$ и $P(x,y,t)$ становятся независимыми и колеблются с законами дисперсии

$$\omega^2 = c_t^2(k_x^2 + k_y^2), \quad \omega = \omega_{pl}.$$

Поперечные колебания решетки связаны с колебаниями векторной переменной $\mathbf{R} = \mathrm{rot}\,\mathbf{J}$, а также с продольными колебаниями упругого поля ($\mathrm{div}\,\mathbf{v}$) и той частью поперечных колебаний упругого поля, которая включена в координатную зависимость компоненты скорости v_z, т.е. в компоненты $(\mathrm{rot}\,\mathbf{v})_\alpha$, $\alpha = 1, 2$. Эта ветвь колебаний описывается уравнением (21), а также следующей очевидной парой уравнений:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_l^2\Delta\right)\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 2c_t^2\nabla_z\,\mathrm{div}\,\mathbf{j} = 2c_t^2\nabla_z R_z, \quad (42)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{pl}^2 - s^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)R_z = -\omega_{pl}^2[\nabla_z\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)v_z]. \quad (43)$$

Решение уравнений (21), (42) и (43) в виде гармонических плоских волн очевидным образом приводит к дисперсионному уравнению третьего порядка относительно ω^2:

$$(\omega^2 - c_l^2k^2)(\omega^2 - c_t^2k^2)(\omega^2 - \omega_{pl}^2 - s^2k_z^2) = \omega_{pl}^2c_t^2 \times [(\omega^2 - c_l^2k^2)(k_x^2 + k_y^2 - k_z^2) + 2k_z^2(\omega^2 - c_t^2k^2)] + 2\omega_{pl}^2(c_tk_z)^2(c_l^2 - c_t^2)(k_x^2 + k_y^2 - k_z^2). \quad (44)$$

Это довольно громоздкое уравнение, но его корни легко анализируются в предельно длинноволновом случае, когда можно ограничиться квадратичными по степеням k членами разложения частоты. Высокочастотная ветвь начинается с разложения

$$\omega^2 = \omega_{pl}^2 + (s^2\cos^2\theta + c_t^2)k^2 \quad (45)$$

и с ростом k приближается к зависимости $\omega^2 = c_l^2k^2$. Характерно, что кривая зависимости (45) расположена выше кривой (41); это значит, что указанные кривые не пересекаются при увеличении k.

В низкочастотной области возникает две ветви звукового спектра $\omega_{1,2} = c_{1,2}k$, скорости звука в которых являются корнями квадратного уравнения

$$(c^2 - c_l^2)(c^2 - c_t^2) = c_t^2(c_l^2\cos^2 2\theta + c_t^2\sin^2 2\theta - c^2). \quad (46)$$

В предельно высокочастотной области одна из последних двух ветвей выходит на закон дисперсии поперечного звука, а вторая приобретает следующий закон дисперсии:

$$\omega = sk\cos\theta \equiv s\,k_z.$$

Обсуждая поведение законов дисперсии при больших значениях волнового вектора, следует быть внимательным, анализируя как высокочастотную, так и низкочастотную ветви. Дело в том, что полученные законы дисперсии справедливы при $\lambda >> a$ (или $ak << 1$). При больших k проявляется периодическая зависимость закона дисперсии решетки от квазиволнового вектора с периодом обратной решетки $\mathbf{G}$: $\omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k} + \mathbf{G})$, где $G = 2\pi/a$. Поэтому полученные законы дисперсии справедливы фактически во всех малых окрестностях любых векторов обратной решетки $\mathbf{g}$, т.е. при $a|\mathbf{k} - \mathbf{g}| << 1$. Воображаемое продолжение графиков нижней ветви при $k \sim \pi/a$, а также неизбежно возникнувшее пересечение графиков верхней ветви при $k = ((p+1)/2)(\pi/a)$, $p = 1, 2, 3, \ldots$ может быть описано лишь на основе изучения динамики дискретной дислокационной решетки. Но это предмет отдельного исследования.

На основе длинноволнового рассмотрения невозможно сказать, имеется ли полоса запрещенных частот между верхней и нижней ветвями (щель в спектре). Однако можно утверждать, что в частотном спектре имеется предельная частота ω_{pl}, отмечающая нижний край верхней ветви колебаний, которая заведомо может проявляться в резонансных акустических свойствах кристалла с дислокационной решеткой. Важной отличительной особенностью этой частоты является зависимость ее положения от плотности дислокаций в решетке (от величины периода решетки). Экспериментальное обнаружение указанного свойства резонансной предельной частоты было бы прямым подтверждением наличия плазменно-подобных коллективных колебаний в дислокационной решетке.

Автор благодарен Оксане Чаркиной за помощь в оформлении статьи, Василию Нацику за полезные замечания, а также Ali Najafi и Ramin Golestanian, ознакомление с рукописью статьи которых обратило внимание автора на рассмотренную проблему.

1. G. Blatter, M.V. Feigel'man, V.B. Geshkenbein, A.I. Larkin, and V.M. Vinokur, *Rev. Mod. Phys.* **66**, 1125 (1994).
2. Ernst Helmut Brandt, *Rep. Prog. Phys.* **58**, 1465 (1995).
3. Alexander Yu. Galkin and Boris A. Ivanov, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3053 (1999).
4. А.М. Косевич, *Дислокации в теории упругости*, Наукова думка, Киев (1978); A.M. Kosevich, *Crystal Dislocations and the Theory of Elasticity, in: Dislo-*

cations in Solids, F.R.N. Nabarro (ed). North-Holland Publ., Amsterdam (1979) V. 1, p. 31.
5. А.М. Косевич, М.Л. Поляков, *ФТТ* 21, 2941 (1979).
6. В.В. Николаев, А.Н. Орлов, Г.Г. Талуц, *ФММ* 23, 424 (1967).
7. А.М. Косевич, *Теория кристаллической решетки* (*физическая механика кристаллов*), Харьков, Вища шк. (1988); Arnold M. Kossevich, *The Crystal Lattice. Phonons, Solitons, Dislocations*, WILEY-VCH, Berlin (1999).
8. А.М. Косевич, *ФНТ* **29**, 930 (2003).
9. J.D. Eshelby, *Boundary Problems*, in: *Dislocations in Solids*, F.R.N. Nabarro (ed.), North-Holland Publ., Amsterdam (1979), V.1, p. 167.

Oscillations of the elastic superstructure formed by a screw dislocation lattice

A.M. Kosevich

Equations of small vibrations of a dislocation lattice are proposed on the basis of the model of a lattice which consists of a periodically arranged set of parallel screw dislocations. Stability of the dislocation lattice is discussed. The longwave collective vibrations are described. It is shown that some of the vibrations are similar to plasmon vibrations. A possibility for observation of a resonance frequency in the vibrational spectrum of the system under consideration is pointed out.