

## О намагниченности низкоразмерного электронного газа в сильных магнитных полях

В.М. Гохфельд

*Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина НАН Украины,  
ул. Розы Люксембург, 72, г. Донецк, 83114, Украина  
E-mail: gokhfeld@teor.fti.ac.donetsk.ua*

Статья поступила в редакцию 19 мая 2003 г., после переработки 9 июля 2003 г.

Вычислен магнитный момент электронного газа с модельным — двумерным и одномерным — энергетическим спектром частиц в квантовых случаях, когда заполнены лишь нижние магнитные подзоны.

Обчислено магнітний момент електронного газу з модельним — двовимірним та одно-  
вимірним — енергетичним спектром частинок у квантовому випадку, коли лише найнижчі  
магнітні підзони є заповненими.

PACS: 51.50.+v

1. Свойства электронных систем в сильных магнитных полях  $\mathbf{H}$  привлекают неизменный интерес исследователей, особенно если речь идет о резко анизотропных системах с эффективно сниженной размерностью движения носителей заряда: о «синтетических» проводниках слоистой либо цепочечной кристаллической структуры, инверсионных слоях, электронах на поверхности жидкого гелия и т.д. [1–3]. Так, известные осцилляционные эффекты де Гааза — ван Альфена и Шубникова — де Гааза, обычно наблюдаемые при

$$T < \beta H \ll \varepsilon_F, \quad (1)$$

широко использовались для изучения квазидвумерного электронного спектра современных органических проводников [4] (здесь  $T$  — температура\*;  $\beta \equiv e\hbar/2mc$  — магнетон Бора;  $\varepsilon_F$  — энергия Ферми). Низкоразмерная ситуация специфична: в одномерном случае квантовые осцилляции вообще отсутствуют из-за невозможности орбитального движения носителей. То же самое имеет место и для двумерного электронного газа в магнитном поле,

параллельном плоскости движения частиц; при общем же направлении  $\mathbf{H}$  эффект зависит от соответствующего угла [3,5]. В двух первых случаях магнитное поле действует лишь на спин, и электроны проводимости представляют собой простую двухуровневую систему, для которой можно найти явные аналитические выражения термодинамических функций, справедливые практически при любых значениях температуры и напряженности поля. В третьей система становится двухуровневой лишь в квантовом пределе, т.е. в сильных полях  $H \simeq \simeq \varepsilon_F/\beta$ ; здесь представляет интерес положение и форма последней квантовой осцилляции с учетом ориентации  $\mathbf{H}$  и конечной температуры.

Вычисление магнитного момента электронной подсистемы в этих частных случаях и является целью данного сообщения. Ради наглядности мы ограничимся приближением эффективной массы\*\* и откажемся от простого, но громоздкого в записи, обобщения задачи на случай нескольких (неэквива-

\* Точнее — эффективная температура  $T + \hbar/\tau$ , учитывающая столкновительное уширение уровней Ландау (см. [1]).

\*\* Иными словами, электронный газ предполагается идеальным с фермиевской статистикой, а все взаимодействия — учтенными перенормировкой масс в одночастичном спектре. Более тонкие аспекты электрон-электронного взаимодействия, например возникновение композитных фермионов [6], остаются, естественно, за рамками этого приближения.

лентных) долин в электронном спектре; ионную подсистему считаем немагнитной.

2. Используя известные результаты Шенберга [2], рассмотрим вначале двумерный электронный газ в *наклонном* магнитном поле\*, столь сильном, что при низких температурах можно считать заполненными лишь две нижайшие подзоны,  $\varepsilon_{0,-}$  и  $\varepsilon_{0,+}$  либо  $\varepsilon_{1,-}$ , в спектре

$$\varepsilon_{n,\pm} = \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{e\hbar H_1}{m'c} \pm \beta H \quad (2)$$

( $m'$  — эффективная масса в плоскости движения носителей). Как известно [3,5], орбитальное движение здесь определяется проекцией  $H_1 \equiv H \cos \theta$  магнитного поля на ось, соответствующую циклическому импульсу  $p_1$ ; последний принимает значения в пределах ячейки обратной решетки\*\*:  $|p_1| \leq \pi\hbar/a_1$ . Энергетический интервал между нижайшими подзонами есть

$$\Delta = e\hbar H / [c \max(m, m' / \cos \theta)], \quad (3)$$

а термодинамический потенциал  $\Omega$  для такой системы равен

$$\Omega \cong -T \frac{eH \cos \theta}{2\pi a_1 c \hbar} \left\{ \ln \left( 1 + \exp \frac{\mu'}{T} \right) + \ln \left( 1 + \exp \frac{\mu' - \Delta}{T} \right) \right\}, \quad (4)$$

где

$$\mu' \equiv \mu + (\beta - \beta')H \equiv \mu + \beta H \left( 1 - \frac{m}{m'} \cos \theta \right) \quad (5)$$

— химический потенциал, отсчитанный от  $\varepsilon_{0,-}$ . Его нужно выразить через объемную концентрацию частиц  $N \equiv -\partial\Omega/\partial\mu$ , поскольку в однородном образце последнюю, очевидно, нужно считать заданной\*\*\*. По определению, магнитный момент  $\mathbf{M} \equiv -\partial\Omega/\partial\mathbf{H}$ . Как видно из (4), его предельное значение в сильных полях есть

$$M_{\text{sat}}(\theta) = N(\beta - \beta') = N\beta \left( 1 - \frac{m}{m'} \cos \theta \right), \quad (6)$$

что вполне согласуется с известным результатом

$$M_{\text{sat}} = N\beta(1 - m/m')$$

для изотропного металла [7]. Отметим, что изменение квантовых осцилляций проводимости (эффект Шубникова—де Гааза) с углом  $\theta$  использовалось для оценки соотношения «голой» и эффективной масс (так называемого  $g$ -фактора) в двумерном электронном газе [3,5]. Выражение (6) представляет альтернативную возможность, но в более сильных — ультраквантовых — магнитных полях.

Выходу момента на предельное значение (6) предшествует последняя квантовая осцилляция  $M(H)$ . Используя приведенные выше формулы, можно свести вычисление ее формы к совместному решению уравнений

$$\frac{\delta M(h)}{N} = 2 \frac{\max(\beta, \beta')}{b} \times \left\{ \ln(1 + e^x) + \ln(1 + e^{x-bh}) - \frac{bh}{1 + e^{bh-x}} \right\} \quad (7)$$

и

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{1 + e^{-x}} + \frac{1}{1 + e^{bh-x}}, \quad (8)$$

где введены переменная

$$h \equiv \frac{\beta' H}{\varepsilon_F} \equiv \frac{eH \cos \theta}{2\pi\hbar N a_1 c} \quad (9)$$

и параметр, характеризующий степень вырождения системы:

$$b \equiv \frac{2\varepsilon_F}{T \max(1, m \cos \theta / m')} \quad (\varepsilon_F = N\pi a_1 \hbar^2 / m'). \quad (10)$$

Аналитическое решение оказалось бы слишком громоздким, однако графическое находится без труда, например, с помощью программного пакета MathCAD; оно представлено на рис. 1. Уже для сравнительно небольших значений параметра  $b$  па-

\* В весьма обстоятельной работе [2] не рассмотрен, однако, случай наклонного поля и не приведены явные формулы для квантового предела.

\*\* Для определенности в качестве объекта будем подразумевать объемный, но резко анизотропный кристалл с квазидвумерным (или, ниже, квазиодномерным) законом дисперсии носителей заряда. Если же речь идет о действительно двумерной ситуации (приповерхностные состояния, электроны на поверхности жидкого He, слоистые гетероструктуры), то под  $a_1$  следует понимать размер области локализации электронного монослоя.

\*\*\* Для инверсионного слоя, находящегося в «резервуаре» остальных электронов образца, может реализоваться противоположный случай, когда фиксированным следует считать  $\mu$ , а не  $N$  (см. [2]).

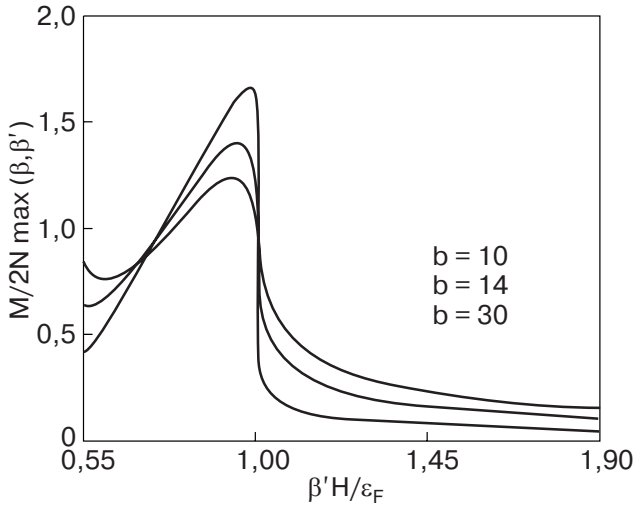


Рис. 1. Зависимость магнитного момента квазидвумерного электронного газа от приведенной напряженности поля  $\beta' H/\varepsilon_F$  (см. (13)) для различных значений параметра  $b \equiv 2\varepsilon_F/[T \max(1, m \cos \theta/m')]$ . Момент (за вычетом постоянной части  $N(\beta - \beta')$ ) отложен в единицах  $2N \max(\beta, \beta')$ .

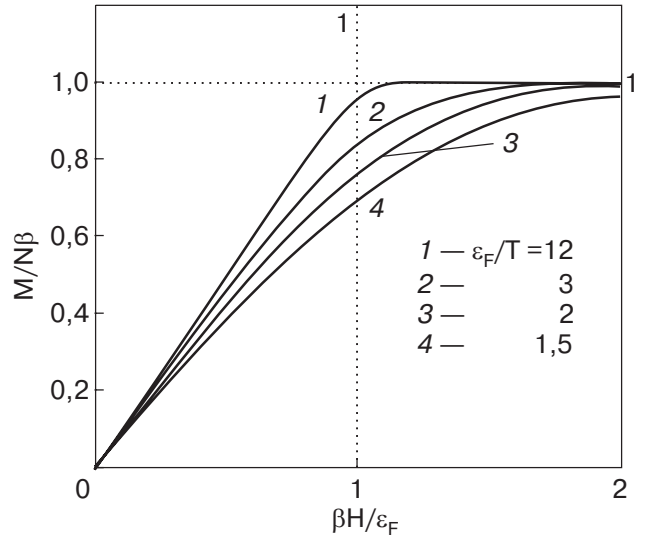


Рис. 2. Зависимость магнитного момента квазидвумерного электронного газа от магнитного поля, приложенного параллельно плоскости движения частиц (19) для различных значений параметра  $\varepsilon_F/T$ . Момент отложен в единицах  $N\beta$ , напряженность поля — в единицах  $\beta H/\varepsilon_F$ .

дение кривой очень резкое; оно имеет место при  $h \cong 1$ , т.е. при  $H \cong 2\pi\hbar c N a_1 / e \cos \theta$ .

Отметим, что это значение напряженности поля не зависит ни от «голой», ни от эффективной массы электрона.

3. Перейдем к случаю параллельного магнитного поля ( $\theta = \pi/2$ ). Очевидно, при конечной температуре допустимы и небольшие отклонения от параллельности:

$$\frac{m}{m'} \cos \theta \ll \frac{T}{2\beta H}. \quad (11)$$

При этом условии движение носителей в плоскости ( $x_2, x_3$ ) можно считать некантованным, так что спектр имеет вид

$$\varepsilon_{\pm}(\mathbf{p}_{\pm}) = \frac{p_2^2 + p_3^2}{2m'} \pm \beta H. \quad (12)$$

Действуя стандартным образом (см. [2,8,9]), запишем термодинамический потенциал

$$\Omega = -\frac{T}{a_1(2\pi\hbar)^2} \times \sum_{\pm} \iint dp_2 dp_3 \ln \left[ 1 + \exp \frac{1}{T} \left( \mu_{\pm} - \frac{p_2^2 + p_3^2}{2m'} \right) \right], \quad (13)$$

где  $\mu_{\pm} \equiv \mu \pm \beta H$ . Вычисляя отсюда магнитный момент, находим

$$M \equiv -\left( \frac{\partial \Omega}{\partial H} \right)_{\mu, T} = \frac{D}{2} T \beta \ln \left( \frac{1 + \exp(\mu_+/T)}{1 + \exp(\mu_-/T)} \right), \quad (14)$$

где  $D = m' / \pi a_1 \hbar^2$  — энергетическая плотность состояний при  $H = 0$ , а химический потенциал  $\mu$  следует определить из уравнения

$$N = \frac{D}{2} T \sum_{\pm} \ln(1 + \exp(\mu_{\pm}/T)). \quad (15)$$

Решение, дающее зависимость  $\mu$  от  $H$  и  $T$ , нетрудно выписать в явном виде:

$$\mu(H, T) = T \ln \left( \sqrt{\text{ch}^2(\beta H/T) + e^{2N/DT}} - 1 - \text{ch}(\beta H/T) \right). \quad (16)$$

В частности,

$$\begin{aligned} \mu(H \rightarrow 0, T) &= T \ln(e^{N/DT} - 1) \equiv T \ln(e^{\varepsilon_F/T} - 1); \\ \mu(H \rightarrow \infty, T) &= T \ln(e^{2\varepsilon_F/T} - 1) - \beta H. \end{aligned} \quad (17)$$

Подставляя (16) в (14) и обозначив

$$y \equiv \beta H/T; \quad \omega \equiv \exp(2\varepsilon_F/T) - 1, \quad (18)$$

находим

$$M(H, T) = \frac{N\beta}{\ln(1+w)} \times \ln \left( \frac{1 + e^y (\sqrt{\text{ch}^2 y + w - \text{ch} y})}{1 + e^{-y} (\sqrt{\text{ch}^2 y + w - \text{ch} y})} \right). \quad (19)$$

Как и следовало ожидать, в магнитном поле, параллельном квазидвумерным электронным слоям, они всегда парамагнитны, причем магнитный момент монотонно растет с  $H$ : в слабых полях ( $\beta H \ll \varepsilon_F$ ) линейно, а затем — приближаясь к насыщающему значению  $M_{\text{sat}} = N\beta$  (см. рис. 2).

4. Рассмотрим случай одномерного движения носителей\* (вдоль оси  $\mathbf{C}$ ). Вне зависимости от взаимной ориентации  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{C}$  орбитальное движение невозможно, и магнитное поле действует лишь на спин, так что спектр имеет вид

$$\varepsilon_{\pm}(p_C) = p_C^2/2m_C \pm \beta H. \quad (20)$$

Ясно, что качественно этот случай аналогичен предыдущему, и здесь мы ограничимся простым пределом низких температур. При этом в слабых полях, когда заполнены обе подзоны,

$$\Omega = -\frac{T}{2\pi\hbar a_{\perp}^2} \sum_{\pm} \int dp_C \ln \left( 1 + \exp \frac{1}{T} (\mu_{\pm} - p_C^2/2m_C) \right) \cong -\frac{2\sqrt{2m_C}}{3\pi\hbar a_{\perp}^2} (\mu_+^{3/2} + \mu_-^{3/2}), \quad (21)$$

где  $a_{\perp}^2$  — площадь ячейки кристалла в плоскости, перпендикулярной оси  $\mathbf{C}$ . Магнитный (очевидно — парамагнитный) момент равен

$$M \cong \frac{\beta}{\pi\hbar a_{\perp}^2} \sqrt{2m_C} (\sqrt{\mu_+} - \sqrt{\mu_-}), \quad (22)$$

а уравнение для химического потенциала можно представить в виде

$$\sqrt{\mu_+} + \sqrt{\mu_-} = 2\sqrt{\varepsilon_F}; \quad \varepsilon_F = N^2 \pi^2 \hbar^2 a^4 / 8m_C. \quad (23)$$

При  $\beta H < 2\varepsilon_F$  его решение есть

$$\mu_{\pm} = \varepsilon_F (1 \pm \beta H / 2\varepsilon_F)^2, \quad (24)$$

а в более сильных полях частицы полностью покидают верхнюю подзону и, как следует из (21) при  $T \rightarrow 0$ , мы должны опустить слагаемые с индексом «-» в выражениях (21)–(23); это дает  $\mu_+ = 4\varepsilon_F$ . В результате

$$M(H, 0) \cong N\beta \begin{cases} \beta H / 2\varepsilon_F, & \beta H < 2\varepsilon_F, \\ 1, & \beta H > 2\varepsilon_F. \end{cases} \quad (25)$$

Из предыдущего ясно, что при ненулевой температуре мы получили бы сглаживание излома при  $\beta H = 2\varepsilon_F$  и более плавный выход на предельное значение  $M_{\text{sat}} = N\beta$  (ср. (19) и рис. 2).

5. Хотя результаты пп. 3, 4 относятся к весьма широкой области магнитных полей, их квантовый предел, а также результат п. 2 предполагают напряженности поля, превышающие

$$H_Q \cong \frac{\varepsilon_F}{\beta} \cong \frac{\hbar c}{ea^2} \begin{cases} (Na^3)^{2/3} & (D=3), \\ Na^3 & (D=2), \\ (Na^3)^2 & (D=1), \end{cases} \quad (26)$$

где  $Na^3$  — число электронов в элементарной ячейке кристалла,  $a$  — некий усредненный ее размер,  $\hbar c/ea^2 \simeq 10^8$  Э — поле, в котором радиус локализации нижней магнитной подзоны сравним с  $a$ . Поскольку современные экспериментальные возможности в статическом режиме не превышают  $H \simeq 10^6$  Э, электронная концентрация должна быть много меньше, чем в обычном металле, причем  $H_Q$  убывает с  $N$  тем быстрее, чем ниже размерность системы  $D$ .

Таким образом, условия наблюдения полученных зависимостей  $M(\mathbf{H}, T)$  могут быть реализованы в проводящих кристаллах со сравнительно малой, но фиксированной (или слабо зависящей от магнитного поля и температуры) концентрацией свободных носителей: например, в слоистых органических металлах на основе BEDT-TTF и квазиодномерных — на основе TCNQ, а также в полупроводниковых инверсионных слоях и гетероструктурах, где  $N$  можно задавать в широких пределах величиной запирающего потенциала. Обобщение используемых однодолинных моделей спектра могло бы существенно изменить картину лишь в случае полуметаллов, где в сильных полях возможен переход в диэлектрическое состояние (см. [11, 12]).

В заключение отметим, что «истинное» предельное значение магнитного момента при  $H \rightarrow \infty$ , т.е. при  $H \gg \hbar c/ea^2$ , не может быть вычислено на основании моделей зонного спектра, поскольку последний имеет смысл лишь для достаточно протяженных пространственных областей, охватывающих много ячеек кристалла. Этот (пока академический) вопрос потребовал бы более подробного квантовомеханического рассмотрения.

\* Как и выше — в однородном, но резко анизотропном кристалле нитевидной структуры (например, NbSe<sub>3</sub> [10]).

Автор благодарен В.Г. Песчанскому и Ю.Г. Пашкевичу за обсуждение этой работы.

1. A.A. Abrikosov, *Phys. Rev.* **B60**, 4231 (1999).
2. D. Shoenberg, *J. Low Temp. Phys.* **56**, 417 (1984).
3. T. Ando, A. Fowler, and F. Stern, *Electronic Properties of Two-Dimensional Systems*, Vol. **54**, No. 2 in: *Reviews of Modern Physics* (1982).
4. J. Vosnitzer, *Fermi Surfaces of Low-Dimensional Organic Metals and Superconductors*, Vol. **134**, in: *Springer Tracts in Modern Physics* (1996).
5. F.F. Fang and P.G. Stiles, *Phys. Rev.* **174**, 823 (1968).
6. R.B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1395 (1983).
7. М.Я. Азбель, Е.Г. Скроцкая, *ЖЭТФ* **47**, 1958 (1964).
8. С.В. Вонсовский, *Магнетизм*, Наука, Москва (1971).
9. И.М. Лифшиц, М.Я. Азбель, М.И. Каганов, *Электронная теория металлов*, Наука, Москва (1971).
10. А.А. Мамалуй, Т.Н. Шелест, Х.Б. Чашка, *ФНТ* **26**, 176 (2000).

11. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1963).
12. М.Я. Азбель, Н.Б. Брандт, *ЖЭТФ* **48**, 1206 (1965).

### On the magnetization of low-dimensional electron gas in high magnetic fields

V.M. Gokhfeld

A magnetic moment of an electron gas with 2D and 1D model energy spectra of particles has been calculated in quantum limits, where only the lowest magnetic subzones are filled.