Low Temperature Physics/Физика низких температур, 2011, т. 37, № 9/10, с. 1107–1112

Об электрических полях, порождаемых квантованными вихрями

А.С. Рукин, С.И. Шевченко

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Ленина, 47, г. Харьков, 61103, Украина
E-mail: shevchenko@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 13 мая 2011 г.

Показано, что в магнитном поле квантованные вихри в сверхтекучей жидкости приобретают реальный квантованный электрический заряд, сосредоточенный в сердцевине вихря. Этот заряд компенсируется поверхностным зарядом противоположного знака, расположенным на макроскопическом расстоянии от оси вихря. Установлено, что поляризация, связанная с полем скоростей вихря, не вызывает появления электрического поля вне бесконечного цилиндра. Наблюдение создаваемого вихрями электрического поля возможно только вблизи торцевых поверхностей цилиндра, которые для предотвращения вытекания сверхтекучей жидкости должны быть закрыты диэлектрическими крышками. Исследовано влияние свойств крышки на потенциал, создаваемый вихрем. Рассчитан потенциал, создаваемый вихрями на точечном и кольцеобразном электродах.

Показано, що в магнітному полі квантовані вихорі в надплинній рідині набувають реального квантованого електричного заряду, який зосереджений у серцевині вихора. Цей заряд компенсується поверхневим зарядом протилежного знаку, що розташований на макроскопічній відстані від осі вихора. Встановлено, що поляризація, яка пов’язана з полем швидкостей вихора, не викликає появи електричного поля ззовні нескінченного циліндра. Спостереження створюваного вихорами електричного поля можливе лише поблизу торцевих поверхонь циліндра, які для запобігання витікання надплинної рідини повинні бути закриті діелектричними кришками. Досліджено вплив властивостей кришки на потенціал, що створюється вихором. Розраховано потенціал, що створюється вихорами на точковому та кільцеподібному електродах.

PACS: **67.90.+z** Другие темы в квантовых жидкостях и твердых телах;
67.25.D– Сверхтекучая фаза.

Ключевые слова: сверхтекучесть, квантованные вихри, поляризация.

В серии экспериментов [1,2], выполненных во ФТИНТе в последние несколько лет, обнаружено, что протекание потоков в сверхтекучем ^{4}He сопровождается появлением в нем электрических полей. Были предприняты значительные усилия [3–13], чтобы понять природу наблюдаемых явлений, но до сих пор эти усилия не увенчались успехом. Был, однако, получен ряд интересных результатов, касающихся механизмов поляризации как нормальных, так и сверхтекучих систем. Например, в работе Мельниковского [4] установлено, что неравномерное движение диэлектрической среды приводит к ее поляризации, пропорциональной ускорению среды. Нацик изучил особенности поляризации сверхтекучих систем и, развивая идею Мельниковского, показал [5–7], что вихревое движение атомов в сверхтекучей жидкости должно сопровождаться их поляризацией, обусловленной действием на них центробежной силы. При этом вектор поляризации направлен нормально к скорости жидкости, движущейся вокруг вихревой нити, так что возникает «поляризационный ёж». К сожалению, наблюдение электрических полей, связанных с этим «ежом», весьма затруднительно ввиду быстрого их спадания при удалении от оси вихря (обратно пропорционально кубу расстояния до оси). В работах авторов [14–16] установлено, что в магнитном поле на оси вихря возникает реальный электрический заряд, величина которого пропорциональна циркуляции вихря, и, как и циркуляция, этот заряд квантуется. Компенсирующий заряд противоположного знака возникает на поверхности системы. Макроскопическая разнесенность в пространстве заряда вихря и компенсирующего заряда позволяет измерять связанные с этими зарядами электрические поля и следить за движением вихрей в жидкости. Обсуждению существенных аспектов измерения порождаемых вихрями полей посвящено настоящее сообщение.

Напомним кратко аргументацию работ [14–16]. В магнитном поле $\mathbf{H}$ в разреженной среде, движущейся со скоростью $\mathbf{v}$, возникает поляризация

$$\mathbf{P} = n\alpha \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{H}}{c}. \quad (1)$$

Здесь α — поляризуемость атомов, n — плотность среды, c — скорость света. Из общего выражения для индукции движущейся среды (см., например, [17])

$$\mathbf{D} \equiv \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = \varepsilon\mathbf{E} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}, \quad (2)$$

где μ — магнитная проницаемость, следует, что выражение (1) для дипольного момента $\mathbf{P}$ справедливо при $\mu = 1$ и $\varepsilon = 1 + 4\pi n\alpha$.

В сверхтекучей среде существует «характерная конфигурация» поля скоростей $\mathbf{v}$, связанная с вихрем,

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{M}\nabla\phi. \quad (3)$$

Здесь ϕ — фаза параметра порядка. В случае прямолинейного вихря в однородном магнитном поле это поле скоростей порождает поляризационный заряд

$$\rho_{\text{pol}} \equiv -\operatorname{div}\mathbf{P} = -\frac{\alpha}{c} n_s H_z (\operatorname{rot}\mathbf{v}_s)_z = \\ = -\frac{\alpha n_s}{c} H_z \frac{2\pi\hbar}{M} s\delta_2(\mathbf{r}-\mathbf{r}_v), \quad (4)$$

где $s = \pm 1$, $\delta_2(\mathbf{r}-\mathbf{r}_v)$ — двумерная δ-функция в плоскости, перпендикулярной оси вихря, которую мы принимаем за ось z, и считаем, что магнитное поле направлено параллельно этой оси. Таким образом, на оси вихря возникает заряд, плотность которого на единицу длины вихря равна

$$q_v = -\alpha n_s H \frac{2\pi\hbar}{M} s. \quad (5)$$

Компенсирующий заряд возникает на поверхности, и его плотность равна нормальной к поверхности составляющей вектора $\mathbf{P}$

$$\sigma_s = \alpha n_s \frac{\left[\mathbf{v}_s(\mathbf{r})\times\mathbf{H}\right]_n}{c}. \quad (6)$$

Полный поверхностный заряд равен

$$\int \sigma_s dS = \frac{\alpha n_s \hbar}{Mc}\int \left(\nabla\phi\times\mathbf{H}\right)\cdot d\mathbf{S}. \quad (7)$$

Ниже ограничимся рассмотрением случая, когда сосуд со сверхтекучим ^{4}He представляет собой цилиндр, и будем считать, что вихри являются прямолинейными нитями, направленными параллельно оси цилиндра. Также будем считать, что магнитное поле $\mathbf{H}$ параллельно оси цилиндра. В этом случае элемент поверхности dS можно заменить на $L_z d\mathbf{l}$, где L_z — длина сосуда, а $d\mathbf{l}$ — вектор в плоскости xy. При этом полный поверхностный заряд на единицу длины вдоль оси z равен

$$\frac{\alpha n_s \hbar}{Mc}\int \left(\nabla\phi\times\mathbf{H}\right)_n \cdot d\mathbf{l}_n = \frac{\alpha n_s \hbar}{Mc} H_z \int \nabla\phi\cdot d\mathbf{l}_\tau = \frac{\alpha n_s \hbar}{Mc} H_z 2\pi s. \quad (8)$$

Мы учли, что набег фазы при обходе вокруг вихря равен $2\pi s$. Сравнение этого результата с результатом (4) показывает, что условие электронейтральности выполняется и полный поляризационный заряд, как это и должно быть, равен нулю.

Следует подчеркнуть, что расстояние от вихря до стенки сосуда в общем случае является макроскопически большим. Однако наблюдение полей, связанных с вихрем, является непростой экспериментальной задачей. Дело в том, что в случае бесконечного цилиндра электрическое поле, порождаемое дипольным моментом $\mathbf{P}$ из (1), отлично от нуля только внутри цилиндра. Действительно, в отсутствие сторонних зарядов индукция $\mathbf{D}$ удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 0. \quad (9)$$

С другой стороны, компоненты $\operatorname{rot}\mathbf{D}$, с учетом того, что в стационарном случае $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$, равны

$$\operatorname{rot}_z \mathbf{D} = -4\pi\frac{\alpha n_s}{c} H_z \left(\frac{\partial v_{sx}}{\partial x} + \frac{\partial v_{sy}}{\partial y}\right); \quad (10)$$

$$\operatorname{rot}_x \mathbf{D} = 4\pi\frac{\alpha n_s}{c} H_z \frac{\partial v_{sx}}{\partial z}; \quad (11)$$

$$\operatorname{rot}_y \mathbf{D} = 4\pi\frac{\alpha n_s}{c} H_z \frac{\partial v_{sy}}{\partial z}. \quad (12)$$

В случае бесконечного цилиндра поле скоростей вихря не зависит от z. При этом $\operatorname{rot}_x \mathbf{D} = \operatorname{rot}_y \mathbf{D} = 0$. Равняется также нулю и $\operatorname{rot}_z \mathbf{D}$ в силу того, что в стационарном случае $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$. Отсюда следует, что в этом случае вектор $\mathbf{D}$ равняется константе, которая равна нулю, поскольку на бесконечности вне цилиндра поляризация $\mathbf{P}$ равна нулю и электрическое поле $\mathbf{E}$ также равно нулю. В результате внутри бесконечного цилиндра электрическое поле равно

$$\mathbf{E} = -4\pi\mathbf{P}, \quad (13)$$

а вне цилиндра оно равно нулю. Наблюдение электрического поля возможно только для цилиндра конечных размеров вблизи его торцевых поверхностей.

Прежде чем привести соответствующее выражение, напомним, что в сверхтекучем гелии имеет место явление, которое называется «течением по пленке». Оно состоит в том, что сверхтекучий гелий, налитый в лабораторный стакан, начинает ползти вверх по его стенкам и выливаться через край. Поэтому эксперименты по изучению поведения прямолинейных вихрей в цилиндрическом сосуде следует производить в закрытой системе, т.е. торец цилиндрического сосуда должен быть закрыт крышкой. Ниже будем считать это условие выполненным и рассмотрим отдельно два случая: а) измерительный электрод (с помощью которого будет производиться измерение электрического потенциала, связанного с вихрем) находится вне крышки и вне цилиндра с гелием; б) электрод вделан внутрь крышки. Будем считать, что диэлектрическая проницаемость крышки равна ε, а ее толщина есть d. Наличие диэлектрика вблизи системы зарядов, связанных с вихрем, приводит к изменению электрического поля в пространстве. Рассмотрим влияние диэлектрической крышки (ниже пластины) на электрическое поле на примере точечного заряда.

Задача о точечном заряде e вблизи диэлектрической пластины конечной толщины имеет точное решение [18]. В случае а) потенциал вне пластины по другую сторону от заряда равен

$$\phi(\rho, z) = \int_0^\infty e \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2 \exp(-2kd)} J_0(k\rho) \exp(-kz) dk \,. \quad (14)$$

Здесь $\beta = (\varepsilon - 1)/(\varepsilon + 1)$, J_0 — функция Бесселя. Интеграл удается вычислить при $z \gg d$. В этом случае из-за наличия множителя $\exp(-kz)$ существенные k порядка $1/z$. Это позволяет использовать разложение $\exp(-2kd) \approx 1 - 2kd$ и после простого интегрирования получить

$$\phi(\rho, z) = \frac{e}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} - \frac{e(\varepsilon-1)^2 zd}{\varepsilon (z^2+\rho^2)^{3/2}} \,. \quad (15)$$

При получении этого выражение также предполагалось, что $\dfrac{(\varepsilon-1)^2}{\varepsilon}\dfrac{d}{z} \ll 1$. Из (15) следует, что при сделанных предположениях поле за пластиной в нулевом приближении совпадает с полем точечного заряда в вакууме. Поправка увеличивается с ростом ε.

В случае б) потенциал внутри пластины дается выражением [18]:

$$\phi(\rho, z) = \int_0^\infty e \frac{(1-\beta)}{1-\beta^2 \exp(-2kd)} \times$$
$$\times \left\{ \exp(-kz) + \exp\left[-2k(d+z') + kz\right] \right\} dk, \quad (16)$$

где z' — расстояние от заряда до той поверхности пластины, которая смачивается гелием. Интегралы в (16) удается вычислить при $z \ll d$. При этом существенные $k \sim 1/z$ и $\exp(-2kd) \ll 1$. Раскладывая знаменатель по этой малой добавке, получаем после интегрирования

$$\phi = \frac{2}{\varepsilon+1}\frac{e}{\sqrt{z^2+\rho^2}} + \frac{2e(\varepsilon-1)}{(\varepsilon+1)^2}[\rho^2 + (z+2z'+2d)^2]^{-1/2} +$$
$$+ \frac{2e(\varepsilon-1)^2}{(\varepsilon+1)^3}[\rho^2 + (z+2d)^2]^{-1/2}. \quad (17)$$

Этот результат в нулевом приближении согласуется с результатом, который может быть получен для диэлектрического полупространства по методу изображений (см., например, [17]): потенциал внутри диэлектрика сводится к потенциалу точечного заряда в вакууме, умноженному на постоянный коэффициент $2/(\varepsilon+1)$.

Из (15), (17) следует, что в пренебрежении поправками нахождение потенциала системы зарядов в обоих случаях сводится к нахождению потенциала той же системы зарядов в вакууме. В случае электрода, вмонтированного в крышку, результат надо умножить на $2/(\varepsilon+1)$.

Найдем сначала потенциал, создаваемый вихрем на торцевой поверхности цилиндра с гелием, точнее, в точке $z = +0$.

$$\phi(\rho, +0) = \int \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d\mathbf{r}' =$$
$$= \int_{-\infty}^0 \int \frac{\mathbf{P}(\boldsymbol{\rho}') \cdot (\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')}{\left[(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')^2 + z'^2\right]^{3/2}} d^2\rho' dz' =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \int \frac{\mathbf{P}(\boldsymbol{\rho}') \cdot (\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')}{\left[(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')^2 + z'^2\right]^{3/2}} d^2\rho' dz' \,. \quad (18)$$

Задача, таким образом, сводится к нахождению потенциала, создаваемого вихрем в бесконечном цилиндре. Однако вместо того, чтобы находить $\phi(\rho, +0)$ путем вычисления интегралов в (18), значительно проще найти создаваемое вихрем электрическое поле. В силу соотношения (13) поле равно $\mathbf{E} = -4\pi\mathbf{P}$. Ниже ограничимся случаем, когда цилиндр является круговым, и его радиус равняется R. Будем считать, что длина цилиндра L и радиус R связаны неравенством $L \gg R$. Поле скоростей прямолинейного вихря представляет собой сумму полей скоростей вихревой нити с циркуляцией $\oint \mathbf{v}_s d\mathbf{l} = 2\pi\kappa$, расположенной в точке $\mathbf{r}_0 = (r_0, \theta_0)$, и «изображения» с циркуляцией $-2\pi\kappa$, расположенного в точке $\mathbf{r}_0' = (R^2/r_0, \theta_0)$:

$$\mathbf{v}_s = \frac{\kappa}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\hat{\mathbf{e}}_\theta - \frac{\kappa}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0'|}\hat{\mathbf{e}}_{\theta'} \,, \quad (19)$$

где $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ и $\hat{\mathbf{e}}_{\theta'}$ — единичные векторы, касательные к окружности с центром на оси вихревой нити и изображения соответственно. В (19)–(24) $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$ — двумерные векторы. В декартовых координатах это выражение равно

$$\mathbf{v}_s(\mathbf{r}) = \kappa\hat{\mathbf{z}} \times \nabla \ln \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0'|}. \qquad (20)$$

Подставляя полученный результат в (1), находим электрическое поле $\mathbf{E}$ внутри цилиндра

$$\mathbf{E} = -\frac{4\pi\alpha n_s \kappa H_z}{c} \nabla \ln \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0'|}. \qquad (21)$$

Учитывая, что $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, получаем из (21)

$$\phi = 4\pi \frac{\alpha n_s \kappa H_z}{c} \ln \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0'|} + C. \qquad (22)$$

Константа интегрирования C должна быть выбрана из условия, что на боковой поверхности цилиндра со сверхтекучим гелием потенциал электрического поля, создаваемого вихрем и его «изображением», в сумме равняется нулю. Это граничное условие является следствием того факта, что вне цилиндра электрическое поле и его потенциал равны нулю, а поскольку потенциал ϕ должен быть непрерывной функцией координат (в противном случае это привело бы к появлению бесконечного электрического поля в точках разрыва ϕ), то и на поверхности цилиндра $\phi \equiv 0$. Полагая $\phi = 0$ при $\mathbf{r} = \mathbf{R}$, где $\mathbf{R}$ — произвольный радиус-вектор в плоскости *xy*, проведенный от оси цилиндра к его боковой поверхности, находим, что

$$C = 4\pi \frac{\alpha n_s \kappa H_z}{c} \ln \frac{R}{r_0}. \qquad (23)$$

Интересующий нас электрический потенциал, создаваемый в полубесконечном цилиндре на внутренней поверхности диэлектрической крышки, равен

$$\phi = \frac{4\pi}{\varepsilon+1} \frac{\alpha n_s \kappa H_z}{c} \ln \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0'|} \frac{R}{r_0}. \qquad (24)$$

Этот потенциал зависит от положения вихря относительно электрода. И хотя изменение потенциала при изменении положения вихря является слабым, оно доступно измерению. Для жидкого гелия (плотность $n = 2\cdot10^{22}$ см$^{-3}$, поляризуемость $\alpha = 2\cdot10^{-25}$ см^3) в магнитном поле 10^5 Гс потенциал имеет порядок величины 10^{-8} В.

Измерение потенциала точечным электродом не всегда является простой экспериментальной задачей, в особенности при вращении сосуда с гелием. Поэтому рассмотрим также ситуацию, которая имеет место в случае, когда электрод представляет собой тонкое металлическое кольцо, вмонтированное в крышку и лежащее в плоскости *xy*. Пусть радиус кольца равен r, а его центр лежит на оси цилиндра. Потенциал в произвольной точке $\mathbf{r}$ на кольце выражается через заряды на кольце $q(\mathbf{r})$, на боковой поверхности цилиндра $Q(\mathbf{R})$ и заряд вихря q_v следующим образом:

$$\phi(\mathbf{r},0) = \int \frac{q(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' + \int \frac{Q(\mathbf{R})}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|} d\mathbf{R} + \int \frac{q_v(\mathbf{r}_v)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_v|} d\mathbf{r}_v. \qquad (25)$$

Здесь $q(\mathbf{r})$ — заряд, наводимый на измерительном кольце зарядом вихря и поверхностным зарядом боковой поверхности цилиндра $Q(\mathbf{R}) = P_n(\mathbf{R})$, где $P_n(\mathbf{R})$ — нормальная составляющая вектора поляризации; $q_v(\mathbf{r}) = -\operatorname{div}\mathbf{P}(\mathbf{r})$ — объемная плотность заряда вихря.

С первого взгляда кажется, что для нахождения потенциала на кольце необходимо знать распределение заряда $q(\mathbf{r})$ вдоль кольца. Но оказывается, что в случае металлического кольца эквипотенциальность кольца позволяет избежать вычисления $q(\mathbf{r})$. Действительно, используя при интегрировании в (25) полярные координаты, это соотношение можно записать в виде

$$\phi = \int \frac{q(\theta')d\theta'}{\sqrt{2[1-\cos(\theta-\theta')]}} + \int \frac{Q(\theta')Rd\theta' dZ}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta'-\theta)+Z^2}} +$$

$$+\int \frac{q_v dz}{\sqrt{r_0^2+r^2-2r_0 r\cos\theta+z^2}}. \qquad (26)$$

Проинтегрируем обе стороны этого уравнения по θ по всему кольцу. В интегралах в правой части делаем замену переменных $\theta-\theta' \to \alpha$, в результате чего угловые переменные разделяются. Учитывая независимость ϕ от угла θ, получаем

$$\phi\int d\theta = \int q(\theta')d\theta' \int \frac{d\alpha}{\sqrt{2(1-\cos\alpha)}} +$$

$$+\int Q(\theta')d\theta' R \int \frac{d\alpha dz}{\sqrt{r^2-2rR\cos\alpha+R^2+z^2}} +$$

$$+ q_v \int \frac{d\theta dz}{\sqrt{r^2-2rr_0\cos\theta+r_0^2+z^2}}. \qquad (27)$$

Поскольку измерительное кольцо в целом остается электронейтральным, то полный индуцированный на нем заряд равен нулю, т.е. $\int q(\theta')d\theta' = 0$. Тем самым неизвестное распределение заряда по кольцу $q(\theta)$ выпадает из задачи.

С другой стороны, из условия электронейтральности гелия следует, что $\int Q(\theta)Rd\theta = q_v$. В результате после интегрирования по z (от $-\infty$ до 0) в двух оставшихся интегралах в (27) получим

$$2\pi\phi =$$

$$= \frac{q_v}{2}\int_0^{2\pi} \ln\left\{\left(1-2\frac{r_0}{r}\cos\theta+\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right)\Big/\left(1-2\frac{R}{r}\cos\theta+\left(\frac{R}{r}\right)^2\right)\right\}d\theta. \qquad (28)$$

Для вычисления входящих в это выражение интегралов

$$I(a)=\int_0^{2\pi}\ln\,(1-2a\cos\theta+a^2)d\theta \tag{29}$$

поступим следующим образом. Продифференцируем по a обе стороны написанного соотношения. Тогда

$$\frac{dI}{da}=\int_0^{2\pi}\frac{-2\cos\theta+2a}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta\,. \tag{30}$$

Теперь интегрирование по углу θ легко выполнить и найти, что

$$\frac{dI}{da}=\frac{\pi}{a}[1-a\,\mathrm{sign}\,(1-a^2)]\,. \tag{31}$$

Интегрируя это уравнение по a от 0 до a, получим

$$I(a)=\begin{cases}0, & a\le 1;\\ 2\ln a, & a>1.\end{cases} \tag{32}$$

Возвращаясь к (28) и учитывая этот результат, найдем, что потенциал кольца радиусом r равен

$$\phi=q_v\begin{cases}\ln\dfrac{R}{r_0}, & r_0\ge r;\\[2mm] \ln\dfrac{R}{r}, & r_0<r.\end{cases} \tag{33}$$

Мы видим, что потенциал ϕ зависит от координаты вихря r_0 при условии, что вихрь находится снаружи измерительного кольцевого электрода. Если вихрь находится внутри кольцевого электрода, потенциал ϕ зависит только от радиуса электрода r. В случае системы вихрей полный потенциал равен сумме потенциалов, создаваемых всеми вихрями.

Информация о распределении вихрей по сосуду с гелием будет более полной, если использовать два кольцевых измерительных электрода с радиусами R_1 и R_2 ($R_2>R_1$). Анализ, аналогичный выполненному выше, показывает, что разность потенциалов между электродами равна

$$\delta\phi\equiv\phi_1-\phi_2=q_v\begin{cases}0, & r_0>R_2;\\ \ln(R_2/r_0), & R_2\ge r_0>R_1;\\ \ln(R_2/R_1), & R_1\ge r_0.\end{cases} \tag{34}$$

Видно, что при нахождении вихря снаружи измерительных электродов разность потенциалов между кольцами отсутствует. При прохождении вихрем внешнего кольца (предполагается, что вихрь движется от боковой поверхности цилиндра к его центру) разность потенциалов возрастает и становится постоянной, не зависящей от положения вихря, после того, как он оказывается внутри меньшего из кольцевых электродов. Прохождение вихря внутрь колец обнаруживается тем точнее, чем меньше расстояние между кольцами. Таким образом, устанавливая кольцеобразные электроды разных радиусов, можно следить за количеством, расположением и перемещением вихрей в сосуде.

Полезно привести выражение для среднего потенциала $\phi(r)$, которое измеряет кольцевой электрод в случае системы вихрей с одинаковой циркуляцией (и, значит, с одинаковым зарядом q_v), распределенных по сосуду равномерным образом. Из (33) следует, что потенциал $\phi(r)$ в этом случае равен

$$\phi(r)=q_v\sum_{\mathbf{r}_i}\left\{\Theta\left(\frac{r}{r_i}-1\right)\ln\frac{R}{r}+\Theta\left(\frac{r_i}{r}-1\right)\ln\left(\frac{R}{r_i}\right)\right\}. \tag{35}$$

Здесь $\Theta(x)$ — ступенчатая функция: $\Theta(x<0)=0$ и $\Theta(x\ge 0)=1$. Вводя плотность вихрей n_v и заменяя суммирование по $\mathbf{r}_i$ на двумерное интегрирование, получаем

$$\phi(r)=2\pi q_v n_v\left[\int_0^r\left(\ln\frac{R}{r}\right)r_1dr_1+\int_r^R\left(\ln\frac{R}{r_1}\right)r_1dr_1\right]=$$
$$=\pi q_v n_v(R^2-r^2)\,. \tag{36}$$

Очевидно, что потенциал $\phi(r)$ достигает максимального значения в центре сосуда, т.е. при $r=0$. Равномерно распределенные вихри образуют некоторую (скорее всего, треугольную) решетку. Найденный потенциал ϕ, по существу, представляет собой значение потенциала, усредненное по всем возможным расположениям в пространстве решетки с данной плотностью вихрей n_v.

Как хорошо известно, прямолинейные вихри рождаются в цилиндрическом сосуде при его вращении с угловой скоростью Ω, превышающей критическую скорость $\Omega_c=(\hbar/MR^2)\ln(R/\xi)$, где ξ — длина когерентности. Если $\Omega\gg\Omega_c$, число вихревых нитей будет очень большим, и в пределе $\Omega\to\infty$ они имитируют вращение сверхтекучей компоненты как целого с угловой скоростью Ω. Из условия, что при этом $\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_s=2\Omega$, как известно, следует, что плотность вихрей равна

$$n_v=\frac{M\Omega}{\pi\hbar}\,. \tag{37}$$

Подставляя это выражение для n_v в (36) и заменяя q_v его значением из (5), приходим к результату

$$\phi(r)=\frac{2\pi\alpha n_s H}{c}\Omega(R^2-r^2)\,. \tag{38}$$

Мы получим в точности этот же результат, если будем считать, что жидкость с плотностью ρ_s совершает твердотельное вращение со скоростью $\mathbf{v}_s=\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}$, найдем по формуле (1) поляризацию для этого поля скоростей, соответствующее электрическое поле $\mathbf{E}=-4\pi\mathbf{P}$ и проинтегрируем это поле от r до R. Таким образом, излагаемая теория, которая оперирует с отдельными квантованными вихрями, дает правильное описание поведения системы при переходе к пределу непрерывной среды.

До сих пор мы учитывали лишь движение сверхтекучей компоненты. Но при отличных от нуля температурах всегда имеется нормальная компонента, которая при вращении сосуда с частотой $\mathbf{\Omega}$ совершает твердотельное вращение со скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$. Вычисляя поляризацию $\mathbf{P}$ для этого поля скоростей с помощью (1), находим добавки к электрическому полю и потенциалу $\phi(\mathbf{r})$, обусловленные нормальной компонентой. Добавка к потенциалу получается из (38) заменой сверхтекучей плотности n_s на нормальную плотность n_n. Для наблюдения эффектов, обусловленных отдельными вихрями, эксперименты должны выполняться при температурах, при которых нормальная плотность много меньше сверхтекучей плотности. Для He II это условие выполняется при температурах ниже 1 К.

В эксперименте удобнее измерять не статический потенциал, а изменение потенциала во времени. Когда вихрь проходит внутрь (или наружу) пары измерительных кольцеобразных электродов, разность потенциалов между ними испытывает скачок. Если проходит более одного вихря, изменение потенциала соответственно умножается на количество вихрей. Используя известное выражение для свободной энергии вихря во вращающемся сосуде [19], можно показать, что при угловой скорости вращения $\Omega > \Omega_1 \equiv \kappa / R^2$ энергия имеет максимум на расстоянии $R_0 = \sqrt{R^2 - \kappa/\Omega}$ от оси цилиндра и минимум на оси. Вихри, образуясь у стенок цилиндра, будут пытаться преодолеть потенциальный барьер и скапливаться с внешней стороны барьера. Поэтому целесообразно установить кольцевые электроды с радиусами, близкими к R_0.

Чтобы наблюдать прохождение вихрей по сосуду, а не статическое их распределение, необходимо вращать сосуд с переменной угловой скоростью. Численный расчет показывает, что при количестве вихрей от одного до шести они располагаются симметричным образом вокруг оси цилиндра, т.е. на окружности с центром на оси и радиусом около половины радиуса цилиндра. При увеличении угловой скорости (и, следовательно, количества вихрей) радиус этой окружности возрастает, а внутри нее появляется еще одна, после чего процесс повторяется. Установив пару измерительных электродов соответствующего радиуса, можно наблюдать периодический выход большого числа вихрей за пределы колец. Вопросы эти требуют дальнейшего изучения, к которому мы предполагаем вернуться.

1. А.С. Рыбалко, *ФНТ* **30**, 1321 (2004) [*Low Temp. Phys.* **30**, 994 (2004)].
2. А.С. Рыбалко, С.П. Рубец, *ФНТ* **31**, 820 (2005) [*Low Temp. Phys.* **31**, 623 (2005)].
3. А.М. Косевич, *ФНТ* **31**, 50 (2005) [*Low Temp. Phys.* **31**, 37 (2005)].
4. L.A. Melnikovsky, *J. Low Temp. Phys.* **148**, 559 (2007).
5. В.Д. Нацик, *ФНТ* **31**, 1201 (2005) [*Low Temp. Phys.* **31**, 915 (2005)].
6. В.Д. Нацик, *ФНТ* **33**, 1319 (2007) [*Low Temp. Phys.* **33**, 999 (2007)].
7. В.Д. Нацик, *ФНТ* **34**, 625 (2008) [*Low Temp. Phys.* **34**, 493 (2008)].
8. Э.А. Пашицкий, С.М. Рябченко, *ФНТ* **33**, 12 (2007) [*Low Temp. Phys.* **33**, 8 (2007)].
9. В.М. Локтев, М.Д. Томченко, *ФНТ* **34**, 337 (2008) [*Low Temp. Phys.* **34**, 262 (2008)].
10. V.M. Loktev and M.D. Tomchenko, *Phys. Rev.* **B82**, 172501 (2010).
11. M.D. Tomchenko, *Phys. Rev.* **B83**, 094512 (2011).
12. В.П. Минеев, *Письма в ЖЭТФ* **90**, 866 (2009) [*JETP Lett.* **90**, 768 (2009)].
13. Э.А. Пашицкий, *ЖЭТФ* **138**, 1103 (2010) [*JETP* **111**, 975 (2010)].
14. С.И. Шевченко, А.С. Рукин, *Письма в ЖЭТФ* **90,** 46 (2009) [*JETP Lett.* **90**, 42 (2009)].
15. С.И. Шевченко, А.С. Рукин, *ФНТ* **36**, 186 (2010) [*Low Temp. Phys.* **36**, 146 (2010)].
16. С.И. Шевченко, А.С. Рукин, *ФНТ* **36**, 748 (2010) [*Low Temp. Phys.* **36**, 596 (2010)].
17. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
18. В. Смайт, *Электростатика и электродинамика*, Изд–во иностранной литературы, Москва (1954).
19. С. Паттерман, *Гидродинамика сверхтекучей жидкости*, Мир, Москва (1978).

On electric fields created by quantized vortices

A.S. Rukin and S.I. Shevchenko

It is shown that in a magnetic field the quantized vortices in a superfluid acquire a real quantized electric charge concentrated in the vortex core. This charge is compensated by an opposite surface charge located at a macroscopic distance from the vortex axis. It is found that the polarization caused by the vortex velocity field does not give rise to electric fields outside an infinite cylinder. The vortex-created electric fields can be observed only near the cylinder end surfaces which must be closed with dielectric covers to prevent superfluid leaking. The influence of cover properties on the vortex-created potential is studied. The potentials created by vortices on point and ring electrodes are calculated.

PACS: **67.90.+z** Other topics in quantum fluids and solids;
67.25.D– Superfluid phase.

Keywords: superfluidity, quantized vortices, polarization.