Low Temperature Physics/Физика низких температур, 2011, т. 37, № 9/10, с. 985–991

Нерелятивистская квантовая теория вынужденных черенковского излучения и комптоновского рассеяния в плазме

М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе

Институт общей физики им. А.М. Прохорова, РАН, ул. Вавилова, 38, г. Москва, 119991, Россия
E-mail: rukh@fpl.gpi.ru

Статья поступила в редакцию 1 декабря 2010 г.

Обсуждена роль квантовых эффектов в теории ленгмюровских волн в бесстолкновительной плазме. Показано, что квантовые эффекты действительно могут быть существенны при резонансных взаимодействиях потоков квантовых частиц с собственными колебаниями плазмы.

Обговорено роль квантових ефектів у теорії ленгмюрівських хвиль у беззіштовхувальній плазмі. Показано, що квантові ефекти дійсно можуть бути суттєві при резонансних взаємодіях потоків квантових часток з власними коливаннями плазми.

PACS: **41.60.–m** Излучение, обусловленное движением зарядов;
52.35.–g Волны, колебания и неустойчивости в плазме и интенсивность излучений;
52.40.Mj Взаимодействия излучения частицы в плазме.

Ключевые слова: волна де Бройля, черенковское излучение, комптоновское рассеяние, трехволновой и четырехволновой распады волн де Бройля.

1. Введение. Высокочастотные волны в квантовой плазме

Применимость кинетических уравнений с самосогласованным полем для описания бесстолкновительной плазмы (в классическом случае это уравнение Власова, а в квантовом — уравнение Вигнера) была обоснована Н.Н. Боголюбовым в его знаменитом труде [1]. Условие применимости в случае электронного газа сводится к виду

$$e^2 n^{1/3} << \varepsilon_0 , \qquad (1)$$

где e — заряд электрона, n — концентрация электронов, $\varepsilon_0 = mV_0^2/2$ — средняя энергия их хаотического движения, m — масса электрона, а V_0 — средняя скорость электронов (для невырожденного максвелловского газа $V_0 = V_T$, где $V_T = \sqrt{k_B T/m}$ — тепловая скорость; при наличии вырождения $V_0 = V_F$, где $V_F = (3\pi^2)^{1/3}\hbar n^{1/3}/m$ — скорость Ферми; T — температура, $\hbar$ — постоянная Планка). Для дальнейшего условие (1) удобно переписать с использованием газового параметра η:

$$\eta = \frac{\hbar\omega_L}{\varepsilon_0} \le \frac{\hbar\omega_L}{\varepsilon_F} \approx \left(\frac{e^2}{\langle r\rangle\, \varepsilon_F}\right)^{1/2} << 1 , \qquad (2)$$

где $\varepsilon_F = mV_F^2/2$ — энергия Ферми, $\omega_L = \sqrt{4\pi e^2 n/m}$ — электронная ленгмюровская частота, $\langle r\rangle = n^{-1/3}$ — среднее расстояние между электронами. Малость параметра (2) обязательно должна учитываться при рассмотрении квантовых эффектов в плазме.

Рассматриваемые в настоящей работе электромагнитные процессы определяются высокочастотным диэлектрическим откликом плазмы на электромагнитное поле. Поэтому выпишем известные выражения для поперечной и продольной диэлектрических проницаемостей электронной квантовой плазмы [2] (см. также [3]):

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mathrm{tr}}(\omega,\mathbf{k}) &= 1 - \frac{\omega_L^2}{\omega^2}\left(1 + \int \frac{[\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}]^2 f(\mathbf{p})}{(\omega-\mathbf{kv})^2 - \omega_\hbar^2}\, d\mathbf{p}\right), \\ \varepsilon^{l}(\omega,\mathbf{k}) &= 1 - \omega_L^2 \int \frac{f(\mathbf{p})}{(\omega-\mathbf{kv})^2 - \omega_\hbar^2}\, d\mathbf{p} . \end{aligned} \qquad (3)$$

Здесь $f(\mathbf{p})$ — функция распределения электронов плазмы по импульсам $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, ω и $\mathbf{k}$ — частота и волновой вектор электромагнитных возмущений в плазме,

$$\omega_\hbar = \frac{\hbar k^2}{2m} \; - \qquad (4)$$

квантовая частота, определяющая одночастичный спектр колебаний электрона (собственная частота уравнения Шредингера для плоской волны де Бройля с импульсом $\hbar\mathbf{k}$*). В невырожденной равновесной (максвелловской) плазме $f(\mathbf{p})$ — функция распределения Максвелла, а в вырожденной плазме — это распределение Ферми. В любом случае характерная «ширина» функции распределения $f(\mathbf{p})$ определяется величиной mV_0.

В случае холодной плазмы, рассмотрением которого мы здесь и ограничимся, имеем $f(\mathbf{p}) = \delta(\mathbf{p})$, поэтому формулы (3) преобразуются к виду

$$\varepsilon^{\mathrm{tr}}(\omega,\mathbf{k}) = 1 - \frac{\omega_L^2}{\omega^2}, \quad \varepsilon^l(\omega,\mathbf{k}) = 1 - \frac{\omega_L^2}{\omega^2 - \omega_\hbar^2}. \qquad (5)$$

Структура выражений (3) (наличие разностей квадратов в знаменателях) подсказывает, что формулы (5) справедливы только в высокочастотном пределе, когда выполнены условия

$$|\,\omega \pm \omega_\hbar\,| >> kV_0. \qquad (6)$$

Их обязательно нужно учитывать при анализе спектров колебаний квантовой плазмы.

Выражение для высокочастотной поперечной диэлектрической проницаемости (5) не содержит квантового члена, а следовательно, и спектр поперечных электромагнитных волн такой же, как и в классическом пределе [2,4]. Спектр продольных волн, определяемый нулями продольной диэлектрической проницаемости $\varepsilon^l(\omega,\mathbf{k}) = 0$, дается выражением

$$\omega = \pm\sqrt{\omega_L^2 + \omega_\hbar^2}. \qquad (7)$$

Именно эта формула как спектр продольных квантовых волн в плазме приведена в работе [2]. Однако в [2] условия применимости формулы (7) не указаны. Найдем эти условия.

Подставляя (7) в неравенство (6), преобразуем его к виду

$$\sqrt{1 + \left(\frac{1}{4}\eta\kappa^2\right)^2} - \frac{1}{4}\eta\kappa^2 >> \kappa, \qquad (8)$$

где $\kappa = kV_0/\omega_L$ — безразмерное волновое число, η — малый газовый параметр (2). Поскольку функция $\sqrt{1+x^2} - x$ монотонно убывает от единицы до нуля, неравенство (8) может быть выполнено только при $\kappa << 1$, т.е. при

$$kV_0 << \omega_L. \qquad (9)$$

Неравенство (9) как условие применимости формул (5), а значит, и спектра (7) сохраняет свой вид при любой величине газового параметра η**.

В свете неравенства (9) оценим величину квантовой поправки в спектре (7). Из (9) находим максимальное значение волнового числа $k_{\max} = \omega_L/V_0$, что определяет максимально допустимое значение квантовой частоты (4) $\omega_{\hbar\max} = \hbar k_{\max}^2/2m$. Тогда, поскольку $k << k_{\max}$ и выполнено условие (2), имеют место следующие неравенства:

$$\frac{\omega_\hbar}{\omega_L} << \frac{\omega_{\hbar\max}}{\omega_L} = \frac{1}{4}\eta << 1, \quad \frac{\omega_\hbar}{kV_0} << \frac{\hbar k_{\max}}{2mV_0} = \frac{1}{4}\eta << 1. \qquad (10)$$

Таким образом, квантовая поправка в спектре (7) в пределах применимости приближения бесстолкновительной плазмы мала. Более того, в силу второго неравенства (10), квантовая поправка в (7) меньше неучтенной классической тепловой поправки, т.е. фактически является превышением точности***.

Заметим, что неравенство (6), приведшее к неравенству (9), непринципиально, поскольку является всего лишь условием применимости в квантовой теории приближения холодной плазмы, т.е. формул (5). Для применимости общих формул (3) требуется только неравенство (2). Из структуры формул (3) видно, что квантовый вклад в диэлектрические проницаемости всегда определяется частотой $\omega_\hbar$, а тепловые эффекты — величиной kV_0. Поэтому имеет смысл оценить величины (10), не предполагая неравенство (6) выполненным. Снимая ограничение на величину волнового числа k, имеем

$$\frac{\omega_\hbar}{kV_0} \le \frac{\omega_\hbar}{kV_F} \approx \frac{\langle r\rangle}{\lambda}, \quad \frac{\omega_\hbar}{\omega_L} \approx \frac{\langle r\rangle^2}{\eta\lambda^2}, \qquad (11)$$

где $\lambda = 2\pi/k$ — длина ленгмюровской волны. В случае ленгмюровских волн, обусловленных нарушением квазинейтральности в объемах, содержащих большое число частиц, отношение $\langle r\rangle/\lambda$ мало по определению. Поэтому квантовая поправка в спектре ленгмюровских волн меньше тепловой поправки, обусловленной хаотическим движением электронов плазмы, безотносительно к неравенству (6).

* Говорить о такой волне имеет смысл, поскольку при взаимодействии с электромагнитным полем импульс электрона плазмы меняется на величину кратную $\hbar\mathbf{k}$.

** При определенных усилиях, возможно, кинетические уравнения Власова и Вигнера можно использовать и при невыполненном неравенстве (2).

*** Учет хаотического движения электронов вместо (7) дает выражение [2] $\omega^2 = \omega_L^2 + \alpha k^2 V_0^2 + \omega_\hbar^2$, где $\alpha \sim 1$.

Из второй оценки (11) видно, что квантовая частота, в принципе, может превосходить электронную ленгмюровскую частоту (поскольку $\eta << 1$). Однако в максвелловской плазме это не совсем так. Действительно, из-за малости отношения $\langle r \rangle / \lambda$ имеет место неравенство $\omega_\hbar < kV_T$, но одновременно должно быть $kV_T < \omega_L$, так как в противном случае ленгмюровские волны в плазме фактически не существуют из-за их сильного затухания Ландау. Поэтому в максвелловской плазме слабозатухающие ленгмюровские волны возможны только при $\omega_\hbar < kV_T < \omega_L$, когда квантовые эффекты малы. Однако в вырожденной плазме, где затухание ленгмюровских волн, согласно классической теории, отсутствует и при $kV_F > \omega_L$ (нулевой звук), возможны случаи, когда вторая величина в (11) не является малой. Квантовая кинетическая теория ленгмюровских волн в электронной плазме с учетом теплового движения электронов развита в работе [5], где показано, что квантовые поправки в спектрах частот действительно всегда малы, хотя и могут приводить к качественно новым эффектам (например, к бесстолкновительному затуханию нулевого звука в вырожденной плазме).

Следует заметить, что в обзорной работе [6] (см. также цитированную там литературу) исследовались спектры колебаний электронной плазмы с использованием как квантового кинетического уравнения [2], так и модели квантовой гидродинамики [3]. Правда, здесь не оговорены условия применимости полученных результатов. Нам представляется, что многие результаты работы [6] выходят за рамки условий их применимости. В работах [7–9] впервые такие условия оговорены и показано, когда квантовые эффекты могут проявиться в холодной плазме в высокочастотной области. В них исследованы квантовое вынужденное черенковское излучение продольных и поперечных электромагнитных волн электронными пучками в средах и квантовое вынужденное рассеяние электромагнитных волн на пучке. Ниже мы воспользуемся результатами указанных работ.

Можно высказать предположение о структуре частотных спектров квантовых ленгмюровских волн в более коротковолновой области, когда отношение $\langle r \rangle / \lambda$ является большим и представление о самосогласованном поле становится некорректным. В этом случае взаимодействие электронов плазмы происходит только за счет столкновений. Если же таковые отсутствуют (поскольку выполнено неравенство (2)), то частота продольных квантовых колебаний плазмы определяется формулой

$$\omega = \omega_\hbar . \tag{12}$$

В отличие от коллективных ленгмюровских колебаний волны (12) одночастичные [2,5].

2. Вынужденное черенковское излучение нерелятивистского электронного пучка в плазме. Трехволновой процесс с участием квантовых мод

Из анализа неравенств (2) и (6), казалось бы, следует, что квантовые эффекты в теории плазмы (по крайней мере холодной электронной плазмы) проявляются как малые несущественные поправки. В действительности это не совсем так. Например, известен [2] хорошо наблюдаемый квантовый эффект в электронной плазме — диамагнетизм свободного электронного газа, определяемый величиной

$$\frac{\omega^2}{k^2 c^2}(\varepsilon^l - \varepsilon^{\mathrm{tr}})_{(\omega/k)\to 0} , \tag{13}$$

дающей вклад электронов в статическую магнитную проницаемость. При вычислении (13) большие слагаемые, имеющие классическое происхождение, сокращаются, и остающиеся квантовые члены становятся заметными. Аналогичная ситуация имеет место в процессах вынужденного черенковского излучения пучком электронов продольных плазменных колебаний и вынужденного рассеяния поперечной электромагнитной волны на продольных колебаниях плотности электронов в плазме. В дисперсионных уравнениях, описывающих эти процессы, при выполнении резонансных условий большие классические слагаемые сокращаются, а в оставшихся малых слагаемых квантовые эффекты могут оказаться существенными и дать значительный вклад во времена развития (инкременты) процессов.

Рассмотрим задачу возбуждения нерелятивистским моноэнергетическим электронным пучком продольных колебаний в плотной холодной электронной плазме. Плотную плазму будем описывать классически, а электронный пучок, учитывая его малую плотность, — квантово. В этих условиях дисперсионное уравнение пучково-плазменного взаимодействия, или, что то же самое, вынужденного черенковского излучения электронным пучком продольных плазменных волн, записывается в виде [7]

$$\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) \equiv 1 - \frac{\omega_{Lp}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{Lb}^2}{(\omega - \mathbf{ku})^2 - \omega_\hbar^2} = 0 . \tag{14}$$

Здесь $\mathbf{u}$ — скорость электронов пучка, ω_{Lb} и ω_{Lp} — ленгмюровские частоты электронов пучка и плазмы соответственно, а частота $\omega_\hbar$ определена выше. Поясним, что левая часть уравнения (14) представляет собой продольную диэлектрическую проницаемость пучково-плазменной системы. В частности, пучковый вклад в диэлектрическую проницаемость получается из второй формулы (5) путем замен $\omega_L \to \omega_{Lb}$ и $\omega \to \omega - \mathbf{ku}$. Последняя замена учитывает доплеровский сдвиг частоты, обусловленный движением электронов. В целях упрощения конкретных формул запишем их для случая возмущений, распространяющихся вдоль направления движения пучка, т.е. при $\mathbf{ku} = ku$, в общих формулах этого делать не будем.

В одночастичном пределе $\omega_{Lb} \to 0$ из (14) находим известное квантовое условие черенковского резонанса между электроном и продольной волной [10]:

$$\omega = \mathbf{ku} \mp \omega_{\hbar} . \tag{15}$$

Условие (15) со знаком минус дает условие черенковского излучения, а со знаком плюс — квантовое условие черенковского поглощения.

При анализе дисперсионного уравнения (14) предположим, что выполнено сильное неравенство

$$\omega_{Lp} >> \omega_{Lb} . \tag{16}$$

Подставляя в (15) $\omega = \omega_{Lp}$, находим точки одночастичного черенковского резонанса пучка с плазменной волной

$$k_{1,2} = \frac{mu}{\hbar}\left(1 \mp \sqrt{1-\mu}\right), \quad k_{3,4} = -\frac{mu}{\hbar}\left(1 \pm \sqrt{1+\mu}\right), \tag{17}$$

где

$$\mu = \frac{\hbar\omega_{Lp}}{mu^2/2} \tag{18}$$

— важный для дальнейшего квантовый параметр. Величины $k_{1,2}$ в (17) определяют волновые числа излучаемых плазменных колебаний, а $k_{3,4}$ — волновые числа колебаний плазмы, которые поглощаются электронами пучка. Если выполнено неравенство $\mu > 1$, то резонансы в точках $k_{1,2}$ отсутствуют. Поскольку при резонансах в точках $k_{3,4}$ излучения нет (см. далее), неравенство $\mu > 1$ — условие устойчивости пучка малой плотности в плазме, в чем можно убедиться и из анализа дисперсионного уравнения (14) — при $\mu > 1$ у него отсутствуют комплексные относительно ω корни. Нас интересует только случай $\mu < 1$. Более того, будем считать это неравенство сильным. Физический смысл неравенства $\mu < 1$ как условия неустойчивости состоит в том, что при излучении плазмона электрон теряет энергию $\hbar\omega_{Lp}$. Но это возможно, только если энергия плазмона меньше кинетической энергии электрона. Таким образом, неравенство $\mu < 1$ — принципиальный квантовый порог по энергии электрона для развития черенковской пучковой неустойчивости в плазме.

В окрестности резонансных точек $k_{1,2}$ дисперсионное уравнение (14) при выполнении неравенств (16) и $\mu << 1$ преобразуется к виду

$$\delta\omega^2\left(\delta\omega - 2\omega_{\hbar 1,2}\right) = \frac{1}{2}\omega_{Lb}^2\omega_{Lp} , \tag{19}$$

где $\delta\omega = \omega - \omega_{Lp}$ — комплексный инкремент неустойчивости, а $\omega_{\hbar 1,2} = \hbar k_{1,2}^2 / 2m$. Если выполнено неравенство $|\delta\omega| >> 2\omega_{\hbar 1,2}$, то из уравнения (19) следует инкремент обычной классической пучковой неустойчивости в плазме [4,10]. Этот случай нас не интересует. При выполнении обратного неравенства из уравнения (19) для инкремента получается следующее выражение:

$$\delta\omega_{1,2} = i\left(\frac{\omega_{Lb}^2\omega_{Lp}}{4\omega_{\hbar 1,2}}\right)^{1/2} \to \begin{cases} \delta\omega_1 = i\left(\dfrac{\omega_{Lb}^2}{\omega_{Lp}^2}\dfrac{mu^2}{2\hbar\omega_{Lp}}\right)^{1/2}\omega_{Lp} , \\ \delta\omega_2 = i\,\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\omega_{Lb}^2}{\omega_{Lp}^2}\dfrac{2\hbar\omega_{Lp}}{mu^2}\right)^{1/2}\omega_{Lp} . \end{cases} \tag{20}$$

Инкременты (20), очевидно, являются чисто квантовыми. В классическом пределе (при $\hbar \to 0$) $\delta\omega_1$ возрастает и переходит в инкремент классической пучковой неустойчивости в плазме, а $\delta\omega_2$ обращается в нуль.

Заметим, что (15) имеют вид условий резонанса при аномальном и нормальном эффектах Доплера:

$$\omega = \mathbf{ku} \mp \Omega , \tag{21}$$

где Ω — собственная частота колебаний электрона. Например, во внешнем магнитном поле Ω — это электронная циклотронная частота $\omega_H = eB/mc$, где B — индукция внешнего продольного магнитного поля*. В случае пучка большой плотности $\Omega \sim \omega_{Lb}$. В рассматриваемом здесь случае частота Ω — это квантовая частота $\omega_{\hbar}$. Таким образом, квантовые пучковые неустойчивости в плазме аналогичны пучковым неустойчивостям в условиях аномального эффекта Доплера, или неустойчивостям типа коллективного вынужденного эффекта Черенкова [10]. Поэтому неустойчивость реализуется только в резонансных точках $k_{1,2}$, поскольку именно они попадают в область аномального эффекта Доплера. При резонансе в области нормального эффекта (точки $k_{3,4}$) неустойчивости нет.

Перейдем к вопросу о применимости полученных в этом разделе результатов. Заметим, что условия (1) и (2) сохраняются и в рассматриваемом случае. Условие (6) вместе с условием квантовости режима неустойчивости дает следующее:

$$\omega_{\hbar 1,2} >> |\delta\omega_{1,2}| >> k_{1,2}V_0 , \tag{22}$$

где V_0 — скорость теплового разброса электронов пучка**. При неустойчивости на волновом числе $k_1 \approx \omega_{Lp}/u$, с учетом (20), из (22) имеем

* Уравнение (14) при замене $\omega_{\hbar} \to \omega_H$ переходит в дисперсионное уравнение пучково-плазменного взаимодействия в классическом случае в условиях, когда пучок замагничен, а плазма нет [4].

** При записи условия (6) для пучка следует сделать замену $\omega \to \omega - \mathbf{ku}$.

$$\mu^3 >> \frac{\omega_{Lb}^2}{\omega_{Lp}^2} >> \mu \frac{V_0^2}{u^2}, \qquad (23)$$

а в случае неустойчивости на волновом числе $k_2 \approx 2mu/\hbar$ неравенства (22) сводятся к

$$1 >> \mu^3 \frac{\omega_{Lb}^2}{\omega_{Lp}^2} >> \frac{V_0^2}{u^2}. \qquad (24)$$

Оба неравенства (23), (24) могут быть выполнены. Поэтому квантовая черенковская пучковая неустойчивость в плазме вполне реализуема, правда, при очень малых плотностях пучка и больших плотностях плазмы.

Может показаться, что утверждение о возможности квантовой черенковской пучковой неустойчивости в плазме противоречит результатам разд. 2, где показано, что ленгмюровские волны, в том числе и ленгмюровские волны электронного пучка, можно описывать без учета квантовых эффектов, поскольку роль этих эффектов мала. Дело в том, что при рассматриваемой здесь пучковой неустойчивости ленгмюровские волны в пучке вообще не возбуждаются, поэтому их свойства в данной ситуации роли не играют. Чтобы пояснить, о чем идет речь, запишем дисперсионное уравнение (14) в виде

$$(1+\delta\varepsilon_p^l)(1+\delta\varepsilon_b^l) = \delta\varepsilon_p^l \delta\varepsilon_b^l, \qquad (25)$$

где $\delta\varepsilon_p^l$ и $\delta\varepsilon_b^l$ — вклады электронов плазмы и электронов пучка соответственно в общую продольную диэлектрическую проницаемость, т.е. в левую часть уравнения (14).

При такой форме записи уравнение (25) явно описывает взаимодействие волн плазмы и пучка. Уравнения $1+\delta\varepsilon_p^l = 0$ и $1+\delta\varepsilon_b^l = 0$ являются дисперсионными уравнениями ленгмюровских волн невзаимодействующих плазмы и пучка. При черенковской пучково-плазменной неустойчивости $\omega \approx \omega_{Lp}$, поэтому $1+\delta\varepsilon_p^l \approx 0$, и ленгмюровские волны в плазме действительно возбуждаются, причем описываются нами эти волны классически. Можно показать, что при выполнении левых неравенств (23), (24) (точнее, при $\omega_{Lb}^2/\omega_{Lp}^2 << \mu^3$ в случае (23) и $\mu^3 \omega_{Lb}^2/\omega_{Lp}^2 << 1$ в случае (24)) будет $|\delta\varepsilon_b^l| << 1$, поэтому о возбуждении ленгмюровских волн в пучке вообще говорить не приходится. Рассматриваемая черенковская пучковая неустойчивость является одночастичной, а проявление квантовых эффектов обусловлено квантованием энергии, передаваемой свободным электроном пучка классической плазменной волне, в чем можно убедиться на основе следующих простых рассуждений.

Запишем законы сохранения энергии и импульса при излучении электроном некоторой волны с частотой ω и волновым вектором $\mathbf{k}$:

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{mu'^2}{2} + \sigma_0, \quad m\mathbf{u} = m\mathbf{u}' + \boldsymbol{\pi}_0, \qquad (26)$$

где $\mathbf{u}'$ — скорость электрона после излучения, σ_0 и $\boldsymbol{\pi}_0$ — энергия и импульс кванта излучения (в нашем случае плазмона). Из общей теории волн $\boldsymbol{\pi}_0 = (\mathbf{k}/\omega)\sigma_0$. Тогда, исключая из (26) $\mathbf{u}'$, имеем соотношение

$$\omega = \mathbf{ku} - \frac{(\sigma_0/\omega)k^2}{2m}. \qquad (27)$$

Если положить $\sigma_0 = \hbar\omega$, то получится условие (15) со знаком минус, т.е. квантовое условие черенковского излучения.

Квантовой черенковской пучковой неустойчивости в плазме можно дать иную физическую интерпретацию [7]. В электрическом поле плазменной волны с потенциалом

$$\phi(t,z) = \frac{1}{2}[A \exp(-i\omega t + i\mathbf{kr}) + A^* \exp(i\omega t - i\mathbf{kr})] \qquad (28)$$

волновая функция электрона пучка имеет следующую структуру:

$$\psi(t,r) = a_0 \exp(-i\omega_0 t + \mathbf{k}_0\mathbf{r}) +$$
$$+ a_- \exp[-i(\omega_0 - \omega)t + i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})\mathbf{r}] +$$
$$+ a_+ \exp[-i(\omega_0 + \omega)t + i(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k})\mathbf{r}]. \qquad (29)$$

Здесь $\omega = \omega_{Lp}$ — частота плазменной волны, $\omega_0 = \hbar k_0^2/2m$, $\hbar\mathbf{k}_0 = m\mathbf{u}$. Представление (29) в линейном приближении следует непосредственно из уравнения Шредингера для электрона пучка. Первое слагаемое в (29) описывает волну де Бройля невозмущенного электрона, второе слагаемое — волна де Бройля электрона, испустившего плазмон, а третье слагаемое дает волну де Бройля электрона, поглотившего плазмон (энергия и импульс плазмона $\hbar\omega$ и $\hbar\mathbf{k}$ соответственно). Квантовое черенковское излучение можно трактовать как процесс распада первичной волны де Бройля пучка на плазменную волну и вторичную волну де Бройля с частотой $\omega' = \omega_0 - \omega$ и волновым вектором $\mathbf{k}' = \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}$ (второе слагаемое в (29)). Условия распада можно записать в виде

$$\omega_0 = \omega + \omega', \quad \mathbf{k}_0 = \mathbf{k} + \mathbf{k}'. \qquad (30)$$

Однако физический смысл условия (30) имеют только тогда, когда каждая из входящих в них величин характеризует реальную волну. В частности, вторичная волна должна быть реальной волной де Бройля, а поэтому должно удовлетворяться дисперсионное соотношение

$$\omega' = \hbar k'^2/2m. \qquad (31)$$

Если подставить в (31) соотношения (30) и учесть определения ω_0 и $\mathbf{k}_0$, то получится условие (15) со знаком минус, т.е квантовое резонансное условие черенковского излучения. Таким образом, с квантовой точки зрения, черенковское излучение — это процесс резонансного взаимодействия волн (трехволновой процесс): двух волн де Бройля свободного электрона и плазменной волны*. Заметим, что реальной волны де Бройля $\omega = \omega_\hbar$ нет (см. сноску на стр. 986): это некая виртуальная волна, определяющая порции энергии и импульса (σ_0 и $\boldsymbol{\pi}_0$ в (26)), теряемые электроном при излучении.

Аналогично можно трактовать и обратный процесс черенковского поглощения как слияние (обратный распад)

$$\omega_0 + \omega = \omega', \ \mathbf{k}_0 + \mathbf{k} = \mathbf{k}' \tag{32}$$

первичной волны де Бройля и плазменной волны во вторичную волну де Бройля, описываемую третьим слагаемым в (29). Действительно, если подставить (32) в (31), то получится условие (15) со знаком плюс, т.е. резонансное условие черенковского поглощения.

Обратим внимание на различие в подходах. Если при выводе соотношения (27) предполагается квантование поля излучения, то при подходе, основанном на взаимодействии волн, квантовым является электрон (формула (29)), а поле не квантуется. Результат получается один и тот же.

3. Вынужденное комптоновское рассеяние в плазме. Четырехволновой процесс с участием квантовых мод

Рассмотрим вынужденное комптоновское рассеяние поперечной электромагнитной волны на электронах холодной плазмы (или на электронном пучке) с возбуждением квантовых мод. В классической теории в линейном приближении такой процесс описывается известным дисперсионным уравнением трехволнового распада падающей поперечной электромагнитной волны (частота ω_1, волновой вектор $\mathbf{k}_1$) на рассеянную поперечную волну (частота ω, волновой вектор $\mathbf{k}$) и продольную ленгмюровскую волну [4]:

$$[1 + \delta\varepsilon^l(\omega_1 - \omega, \mathbf{k}_1 - \mathbf{k})]\left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon^{\text{tr}}(\omega, \mathbf{k})\right] =$$
$$= \frac{1}{4}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k})^2 \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\frac{[\mathbf{k}\times\mathbf{V}_E]^2}{k^2c^2}\delta\varepsilon^l(\omega_1 - \omega, \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}). \tag{33}$$

Здесь $\mathbf{V}_E = e\mathbf{E}_1 / m\omega_1$, где $\mathbf{E}_1$ — амплитуда падающей волны. Согласно (33), плазма модулируется волной биений на частоте $\omega_1 - \omega$ с волновым вектором $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}$. Оказывается, уравнение (33) справедливо и в квантовом случае, причем ε^{tr} и $1 + \delta\varepsilon^l \equiv \varepsilon^l$ определяются формулами (5) (в случае пучка в ε^l следует вместо ω подставить $\omega - \mathbf{ku}$).

В дальнейшем ограничимся высокочастотным случаем, когда частоты ω_1 и ω намного превосходят электронную ленгмюровскую частоту и плазма прозрачна для электромагнитных волн, т.е. ε^{tr} и ε^l близки к единице ($|\delta\varepsilon^l| << 1$, как и в случае (25)). При этом дисперсионное уравнение (33) преобразуется к виду [9]

$$\omega^2 - k^2c^2 = \frac{1}{4}\frac{\omega_L^2(\mathbf{e}_1\mathbf{e})^2(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k})^2 V_E^2}{[(\omega_1 - \omega) - (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k})\cdot\mathbf{u}]^2 - \hbar^2(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k})^4 / 4m^2}, \tag{34}$$

где $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}$ — единичные векторы поляризации падающей и рассеянной электромагнитных волн.

Условие резонансного рассеяния волн дается нулями знаменателя правой части уравнения (34) и имеет вид

$$(\omega_1 - \omega) - (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k})\cdot\mathbf{u} = \pm\hbar(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k})^2 / 2m. \tag{35}$$

Проанализируем (35) для частного случая $\mathbf{u} = 0$ — рассеяние на электронном газе. С точностью до квантового члена, который считаем малым, видно, что $\omega \approx \omega_1$. Поэтому условие (35) записывается следующим образом:

$$\omega = \omega_1 \mp \omega_1 \frac{\hbar\omega_1}{mc^2}(1 - \cos\theta), \tag{36}$$

где θ — угол рассеяния (угол между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_1$). Условие (36) со знаком минус — известное условие комптоновского рассеяния света.

В резонансной точке решение уравнения (34) (при $\mathbf{u} = 0$) ищем в виде

$$\omega = kc + \delta\omega = \omega_1 \mp \Omega_\hbar + \delta\omega,$$
$$\Omega_\hbar = \omega_1(\hbar\omega_1 / mc^2)(1 - \cos\theta). \tag{37}$$

Подставляя (37) в (34), получаем следующее уравнение для инкремента $\delta\omega$:

$$\delta\omega^2(\delta\omega \mp 2\Omega_\hbar) = \frac{1}{4}\frac{\tilde{V}_E^2}{c^2}\omega_L^2\omega_1(1 - \cos\theta). \tag{38}$$

Для сокращения последующих записей введено обозначение $\tilde{V}_E^2 = V_E^2(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2$. Последнее уравнение целесообразно сравнить с аналогичным уравнением (19). Если выполнено неравенство $|\delta\omega| >> 2\Omega_\hbar$, то из уравнения (38) следует инкремент обычной классической плазменной неустойчивости, обусловленной вынужденным томсоновским рассеянием света. Этот случай нас не интересует. При выполнении обратного неравенства из уравнения (38) для инкремента получается следующее выражение [9]:

$$\delta\omega = i\frac{1}{2}\frac{\tilde{V}_E}{c}\omega_L\left(\frac{mc^2}{2\hbar\omega_1}\right)^{1/2}. \tag{39}$$

Инкремент (39), очевидно, чисто квантовый. Он характеризует квантовую плазменную неустойчивость, обусловленную вынужденным комптоновским рассеянием света. В классическом пределе (при $\hbar \to 0$) инкремент

* Вместо плазменной волны может фигурировать волна любой природы, лишь бы удовлетворялось условие резонанса (15).

(39) возрастает и переходит в инкремент классического томсоновского рассеяния.

При вычислении (39) в уравнении (38) был взят верхний знак минус. Если в квантовом пределе в (38) (а значит, и в формуле (36)) взять нижний знак плюс, то $\delta\omega^2 > 0$, что означает отсутствие неустойчивости. Это понятно, поскольку в данном случае $\omega > \omega_1$, а рассеяние с повышением частоты на неподвижном электроне невозможно. Несложно видеть, что полученные результаты справедливы и при рассеянии на пучке, с той только разницей, что из-за эффекта Доплера выражение (36) становится более сложным (подробнее см. [9]).

Условие применимости полученных в этом разделе результатов следует из неравенств $\Omega_\hbar >> |\delta\omega| >> >> |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}| V_0$ и сводится к следующему (см. (23)):

$$\left(\frac{\hbar\omega_1}{mc^2}\right)^3 >> \frac{V_E^2}{c^2}\frac{\omega_L^2}{\omega_1^2} >> \left(\frac{\hbar\omega_1}{mc^2}\right)\frac{V_0^2}{c^2}. \tag{40}$$

Эти условия довольно жесткие, но вполне выполнимы в случае сильных полей, когда $V_E >> V_0$, и плотность плазмы довольно высока, так, что ω_1 ненамного превышает ω_L.

Рассмотренный квантовый эффект вынужденного комптоновского рассеяния можно интерпретировать как процесс резонансного взаимодействия электромагнитных волн и волн де Бройля свободного электрона. Для этого в распадные условия (32) подставим вместо ω и $\mathbf{k}$ частоту $\omega_1 - \omega$ и волновой вектор $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}$ волны биений, обусловленной тем, что электрон движется в поле двух электромагнитных волн — падающей и рассеянной. Получим следующие резонансные условия:

$$\omega_0 + \omega_1 - \omega = \omega', \ \mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k} = \mathbf{k}'. \tag{41}$$

Подставляя (42) в формулу (31), получаем условие (35) со знаком плюс, т.е. квантовое условие комптоновского рассеяния. Таким образом, эффект Комптона является резонансным взаимодействием четырех волн — двух электромагнитных и двух де Бройля.

4. Выводы

1. При описании ленгмюровских волн в газовой плазме квантовые эффекты всегда приводят к малым поправкам, в лучшем случае сопоставимым с поправками, обусловленными тепловым движением электронов плазмы. Работы по теории квантовой плазмы, выполненные без оценки реальной роли квантовых эффектов, представляются сомнительными.

2. Квантовые эффекты проявляются при резонансных взаимодействиях свободных электронов плазмы с электромагнитными волнами разной природы. При этом существенно квантование электромагнитной энергии, передаваемой электронам в процессе взаимодействия.

3. При распространении пучка малой плотности в плотной электронной плазме возможно развитие квантовой черенковской пучковой неустойчивости. При увеличении плотности пучка квантовая неустойчивость переходит в обычный классический одночастичный вынужденный эффект Черенкова. Квантовая черенковская пучковая неустойчивость — трехволновой процесс распада волны де Бройля электрона пучка на ленгмюровскую волну плазмы и другую волну де Бройля.

4. При распространении интенсивной высокочастотной электромагнитной волны в плотной плазме реализуется квантовый эффект ее комптоновского рассеяния на электронах плазмы. Его классический аналог — эффект вынужденного томсоновского рассеяния, имеющий место в области более низких частот. Квантовый эффект Комптона является резонансным четырехволновым взаимодействием двух электромагнитных волн и двух волн де Бройля свободных электронов плазмы.

1. Н.Н. Боголюбов, *Проблемы динамической теории в статистической физике*, Гостехиздат, Москва (1946).
2. В.П. Силин, А.А. Рухадзе, *Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред*, Атомиздат, Москва (1961).
3. М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе, *УФН* **169**, 400 (1999).
4. А.Ф. Александров, Л.С. Богданкевич, А.А. Рухадзе, *Основы электродинамики плазмы*, Высшая Школа, Москва (1988); англ. издание: Springer (1984).
5. М.В. Кузелев, *ЖЭТФ* **137**, 807 (2010).
6. П.К. Шукла, Б. Элиасон, *УФН* **180**, 55 (2008).
7. М.В. Кузелев, *Физика плазмы* **36**, 132 (2010).
8. М.В. Кузелев, *Квантовая электроника* **40**, 83 (2010).
9. М.В. Кузелев, *Физика плазмы* **36**, 627 (2010).
10. М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе, *УФН* **178**, 1025 (2008).

Nonrelativistic quantum theory of induced Cherenkov radiation and Compton scattering in plasma

M.V. Kuzelev and A.A. Rukhadze

The role of quantum effects in the theory of Langmuir waves in collisionless plasma is considered. It is shown that the quantum effects may be really significant under resonant interactions between quantum particles fluxes and an oscillatory system.

PACS: **41.60.–m** Radiation by moving charges;
52.35.–g Waves, oscillations, and instabilities in plasmas and intense beams;
52.40.Mj Particle beam interactions in plasmas.

Keywords: de Broglie waves, Cherenkov radiation, Compton scattering, three-wave and four-wave disintegrations of de Broglie waves.