Low Temperature Physics/Физика низких температур, 2011, т. 37, № 9/10, с. 1040–1045

Двумерный оператор Паули в магнитном поле

П.Г. Гриневич[1], А.Е. Миронов[2], С.П. Новиков[1,3]

[1] *Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН*
просп. Акад. Семенова, 1а, г. Черноголовка, Московская область, 142432, Россия
E-mail: novikov@itp.ac.ru

[2] *Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН*
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск, 630090, Россия

[3] *University of Maryland at College Park, College Park, MD, 20742, USA*

Статья поступила в редакцию 1 марта 2011 г.

Двумерный чисто магнитный оператор Шредингера для нерелятивистской частицы со спином 1/2 в магнитном поле обладает замечательными свойствами, открытыми в конце 70-х годов: его основное состояние сильно вырождено; он обладает суперсимметрией. Исследуется особый случай, когда магнитный поток периодического поля сквозь элементарную ячейку равен нулю. Этот случай не был рассмотрен ранее. Здесь вскрыта любопытная связь с теорией солитонов, в частности, с системами типа Бюргерса и их двумерными аналогами. Они обладают свойствами линеаризуемости более простыми, чем знаменитые системы типа KdV и KP. Члены типа Ааронова–Бома с квантованным магнитным потоком играют особую роль в исследовании данного случая.

Двовимірний чисто магнітний оператор Шредингера для нерелятивістської частки із спіном 1/2 в магнітному полі має чудові властивості, які відкрито у кінці 70-х років: його основний стан є сильно виродженим; він має суперсиметрію. Досліджено особливий випадок, коли магнітний потік періодичного поля крізь елементарну комірку дорівнює нулю. Цей випадок не було розглянуто раніше. Тут розкрито цікавий зв'язок з теорією солітонів, зокрема, з системами типу Бюргерса і їх двовимірними аналогами. Вони мають властивості лінеаризуємості простіші, ніж відомі системи типу KdV та KP. Члени типу Ааронова–Бома з квантованим магнітним потоком грають особливу роль в дослідженні даного випадку.

PACS: 02.30.Tb Теория операторов;
02.30.Ik Интегрируемые системы;
11.30.Pb Суперсимметрия;
73.20.–r Электронные состояния на поверхностях и границах раздела.

Ключевые слова: двумерная система, чисто магнитный оператор Паули, основное состояние, суперсимметрия, иерархия Бюргерса.

Много лет назад Паули вывел красивую нерелятивистскую аппроксимацию для гамильтониана частицы со спином 1/2, движущейся в электрическом и магнитном полях [1]. Особенно любопытными математическими свойствами этот оператор обладает в двумерном случае, когда электрическое поле равно нулю, а магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости. В 1979–80 гг. в работах [2–4] была обнаружена и исследована своеобразная «инстантонная» точная решаемость основного состояния. Было установлено в ряде случаев, что физическим основным состоянием здесь является энергия $\varepsilon_0 = 0$. Сам оператор Паули $L = \frac{1}{2m}[(p_1\sigma_1)^2 + (p_2\sigma_2)^2] - (e\hbar/2mc)B\sigma_3 + eU$ при выборе соответствующих единиц $\hbar = c = 1$ и $e = 1$, $m = 1/2$ имеет, как было обнаружено в конце 70-х годов, вид пары чисто факторизуемых скалярных операторов:

$$L = L^+ \oplus L^-,\ p_\alpha = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \frac{e}{c}A_\alpha,\ \alpha = 1, 2,$$

где L^+ и L^- таковы:

$$L^+ = QQ^+,\ L^- = Q^+Q, \tag{1}$$

$$Q = \partial - (\ln c)_z,\ -Q^+ = \bar\partial + (\ln c)_{\bar z},$$

$$\partial = \partial_x - i\partial_y,\ \bar\partial = \partial_x + i\partial_y.$$

Магнитное поле имеет вид $B = \frac{1}{2}\Delta \ln c$, $c = e^{\Phi}$ в нашей системе единиц. Очевидно, что основное состояние всегда $\varepsilon_0 \geq 0$. Для наиболее интересных классов магнитных полей — быстроубывающих и периодических с ненулевым потоком сквозь элементарную ячейку — формулы основных состояний получены в [2–4]: физические основные состояния здесь $\varepsilon_0 = 0$, и они лежат только в одном секторе (+) или (–) в зависимости от знака магнитного потока. В другом секторе квадратично интегрируемых состояний нет.

1. Быстроубывающий случай:

$$2\pi[B] = \int\int_{\mathbb{R}^2} B(x,y)\, dxdy, [B] > 0\,, \qquad (2)$$

$$Q^{+}\psi = 0,\ \psi = e^{-S} P_k(z),\ \ k = 0,\ldots,m,\ \ m \leq [B] < m+1,$$

$$S = -\frac{1}{4\pi i}\int\int_{\mathbb{R}^2} \ln|z-w|\, B(w,\overline{w})\, dw \wedge d\overline{w},$$

$P_k(z)$ — полином от z.

2. Периодический случай:

$$[B]_{\text{cell}} = \frac{1}{2\pi}\int\int_{\text{cell}} B(x,y)\, dxdy = n > 0,$$

$$Q^{+}\psi = 0,\ \psi = e^{-S}\sigma(z-a_1)\ldots\sigma(z-a_n)\, e^{az}, \qquad (3)$$

$$S = -\frac{1}{4\pi i}\int\int_{\text{cell}} \ln|\sigma(z-w)|\, B(w,\overline{w})\, dw \wedge d\overline{w}.$$

В случае (2) поле B двояко-периодично с ортогональной решеткой на плоскости с периодами $2\omega, 2\omega'$ по осям x, y, $[B]_{\text{cell}} = n > 0.$ Интеграл берется по элементарной ячейке решетки, n — целое число; $\sigma(z)$ — сигма-функция Вейерштрасса (см. [5]). Случай $n < 0$ аналогичен, $z \to \overline{z}$.

Случай $n = 0$ («топологически тривиальный») ранее не удавалось исследовать: он будет предметом настоящей работы. В этом особом случае имеется связь с нелинейными уравнениями теории солитонов, в частности с двумерным аналогом известного точно решаемого уравнения Бюргерса $u_t = u_{xx} + uu_x$, подробно обсуждаемая в недавних работах авторов [6,7].

В литературе 80-х годов с чисто магнитным оператором Паули (выше) связывалось также свойство «суперсимметрии»: как следует из факторизуемости (1), любому решению $L^{+}\psi^{+} = \varepsilon\psi^{+}$ из сектора (+) сопоставляем решение $L^{-}(R\psi^{+}) = \varepsilon R\psi^{+}$, где $R = Q^{+}$. Полагая $R^{-}\psi^{-} = 0$ на втором секторе $(-)$, имеем оператор «суперсимметрии»

$$R : (\psi^{+}, \psi^{-}) \to (0, Q^{+}\psi^{+}),\ R^2 = 0,$$

такой, что $LR = RL$. Сопряженный оператор

$$R^{+} : (\psi^{+}, \psi^{-}) \to (Q\psi^{-}, 0),\ (R^{+})^2 = 0$$

тоже коммутирует с $L : R^{+}L = LR^{+}.$ Верна формула

$$RR^{+} + R^{+}R = L.$$

Очевидно, оператор суперсимметрии — также как и точная решаемость основного состояния в «инстантонной форме» $Q^{+}\psi^{+} = 0$ — следует из факторизованного вида оператора Паули (выше). Следует обратить внимание, что функции (3) являются магнитноблоховскими, т.е. при «магнитных трансляциях» T_1^{*}, T_2^{*} они умножаются на числа $æ_\alpha \neq 0$:

$$T_1^{*}\psi = æ_1\psi,\ T_2^{*}\psi = æ_2\psi.$$

Здесь

$$T_1^{*}\psi(x,y) = \psi(x+2\omega, y)\, e^{-if_1(x,y)},$$
$$T_2^{*}\psi(x,y) = \psi(x, y+2\omega')\, e^{-if_2(x,y)},$$

где

$$f_{1_x} A_1(x,y) - A_1(x+2\omega, y) = -\Delta_x A_1,$$
$$f_{1_y} = A_2(x,y) - A_2(x+2\omega, y) = -\Delta_x A_2,$$
$$f_{2_x} = A_1(x,y) - A_1(x, y+2\omega') = -\Delta_y A_1,$$
$$f_{2_y} = A_1(x,y) - A_1(x, y+2\omega') = -\Delta_y A_2.$$

Мы имеем для вектор-потенциала в калибровке Лоренца $A = (A_1, A_2)$:

$$A_1 = \Phi_y,\ A_2 = -\Phi_x,\ 2B = \Delta\Phi,\ A_{1_x} + A_{2_y} = 0$$

при нашей нормировке. Функции (3) удовлетворяют уравнению $Q^{+}\psi = 0$ и не имеют особенностей на плоскости xy. Это — многообразие всех неособых комплексных магнитно-блоховских функций для уровня $\varepsilon = 0.$ Физический спектр обслуживают только те из них, где

$$|æ_1| = |æ_2| = 1.$$

Их выделение накладывает соотношения, выражающие (a) через $(a_1, \ldots, a_n)$ (см. [3,4]).

Перейдем теперь к топологически тривиальному случаю $n = 0$, где вектор-потенциал (A_1, A_2) двоякопериодичен и задается периодической вещественной функцией $c = e^{\Phi}$, где $c > 0$, $B = \frac{1}{2}\Delta \ln c.$

Нашей целью является нахождение всех несингулярных (или слабо сингулярных) комплексных решений ($L\psi = 0$):

$$\psi(x+2\omega, y) = æ_1\psi(x,y), \psi(x, y+2\omega') = æ_2\psi(x,y). \quad (4)$$

Оказывается, что в каждом секторе $(\pm)$ имеется два семейства таких решений $L^{\pm}\psi^{\pm} = 0$:

1^{+}. Семейство «инстантонов» вида

$$Q^{+}\psi_{+}'' = 0,\ \ \psi_{+}'' = \frac{1}{\sqrt{c}}\, e^{kz}.$$

2^+. Семейство ψ'_+ вида

$$L^+\psi'_+ = QQ^+\psi'_+ = 0,\ \psi_{+'} = \frac{1}{\sqrt{c}}\,e^{k\bar{z}}P_+(k,x,y)\,,$$

где

$$c = 1+\sum_j æ_j\ e^{p_j z - k_j\bar{z}},\ P_+(k,x,y) = \frac{1}{k}+\sum_j \frac{æ_j\ e^{p_j z-k_j\bar{z}}}{k-k_j}, \tag{5}$$

$$P_+ = \frac{c}{k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\ \text{для}\ k\to\infty\,.$$

Выбор констант $æ_j, p_j \neq 0, k_j\neq 0$ определяется требованием, что c вещественно, положительно и периодично с прямоугольной решеткой периодов $(2\omega, 2\omega')$.

В секторе $(-)$ также имеются два семейства решений, где c заменено на $1/c$ и $\bar{z}$ — на z:

1^-. $Q\psi''_- = 0,\ \psi''_- = \sqrt{c}\ e^{k\bar{z}}$;

2^-. $(Q^+Q)\psi'_- = 0,\ \psi'_- = \sqrt{c}\ e^{kz}P_-(k,x,y)$, где

$$P_-(k,x,y) = \frac{1}{kc}+O\left(\frac{1}{k^2}\right). \tag{6}$$

Можно показать, что $Q^+\psi'_+ = \psi''_-$ и $Q\psi'_- = \psi''_+$. Детальные вычисления приведены в [7]. Особенно простым случаем являются тригонометрические полиномы c, где сумма в формуле (5) конечна

$$c = 1+\sum_{j=1}^{n}æ_j\ e^{p_j z-k_j\bar{z}}\,,$$

$$\psi'_+ = \frac{1}{\sqrt{c}}\,e^{k\bar{z}}\left(\frac{1}{k}+\sum_{j=0}^{n}\frac{æ_j\ e^{p_j z-k_j\bar{z}}}{k-k_j}\right).$$

Но даже в этом случае величина $1/c$ является бесконечным рядом; мы имеем бесконечный ряд с бесконечным числом полюсов по k для величины

$$P_-(k,x,y) = \psi'_-\ e^{-kz}/\sqrt{c}.$$

Блоховские показатели этих решений такие же, как для функций $e^{k\bar{z}}, e^{kz}$, для всех $\psi'_+, \psi''_+, \psi'_-, \psi''_-$:

$$T_1[x\to x+2\omega, y\to y]: T_1^* e^{kz} = e^{2\omega k}e^{kz},\ T_1^* e^{k\bar{z}} = e^{2\omega k}e^{k\bar{z}},$$

$$T_2[x\to x, y\to y+2\omega']: T_2^* e^{kz} = e^{2i\omega' k}e^{kz},\ T_2^* e^{k\bar{z}} = e^{-2i\omega' k}e^{k\bar{z}}.$$

Лишь при $k=0$ имеем $|æ_1| = |æ_2| = 1$. Поэтому для несингулярных периодических функций $c(x,y)$ лишь состояния при $k=0$ принадлежат физическому спектру в гильбертовом пространстве: это $\psi'_{0,+} = \psi''_{0,+} = 1/\sqrt{c}$ в секторе $(+)$ и состояние $\psi'_{0,-} = \psi''_{0,-} = \sqrt{c}$ в секторе $(-)$. В обоих секторах эти состояния являются дном непрерывного спектра операторов $L^{\pm}$ для малых энергий $\varepsilon > 0$. Здесь речь идет о спектре в гильбертовом пространстве квадратично-интегрируемых функций на плоскости xy, требуя самосопряженности квантового оператора Паули.

Замечание. Мы обсудим позднее возможность реализации блоховских решений с неунитарными показателями $æ_1, æ_2$ в задачах с самосопряженными граничными условиями. Подобная интерпретация была известна в теории одномерных периодических потенциалов — операторов Шредингера — для блоховских функций в запрещенных зонах, где они вещественны (и энергия также, очевидно, вещественна).

Укажем здесь особые случаи, представляющие отдельный интерес.

Случай 1. Возникновение особенностей, проистекающих из нулей периодической функции $c\geq 0$. Это предельный случай для описанной выше задачи, где $c_\alpha = 1+\alpha f(x,y)\geq 0$. Магнитное поле $B = \frac{1}{2}\Delta\ln c$ приобретает особенность при критическом $\alpha = \alpha_0, c = c_{\alpha_0}$. В случае, когда $c_{xy} = 0, c_{xx} = c_{yy}\neq 0$ в точке $c=0$, имеем δ-образную сингулярность магнитного поля $B = 2\pi\delta(x-x_0, y-y_0)+\tilde{B}$, где $\tilde{B}$ — непрерывное поле. Тем самым имеем член типа Ааронова–Бома с целочисленным магнитным потоком, равным одному кванту, плюс магнитное поле $\tilde{B}$ с целочисленным отрицательным потоком $n=-1$. В этом случае мы видим следующее.

Функции ψ'_+, ψ''_+ приобретают особенности, поскольку они имеют вид $\frac{1}{\sqrt{c}}\psi', \frac{1}{\sqrt{c}}e^{k\bar{z}}$. Особой становится и функция ψ'_-, как видно из формулы (6). Единственной неособой блоховской функцией остается $\psi''_- = \sqrt{c}\ e^{k\bar{z}}$. Более того, мы можем расширить это блоховское семейство до двумерного семейства вида $(u,k)\in\mathbb{C}^2$:

$$\psi_- = \sqrt{c}\ e^{k\bar{z}}\,\frac{\sigma(\bar{z}+u-\bar{a}_1)}{\sigma(\bar{z}-\bar{a}_1)}, \tag{7}$$

$a_1 = x_0+iy_0$ — это нуль функции $c(x_0,y_0)=0$ и $\zeta(u)$ — эллиптическая функция ([7]). Мы видим, что нуль $\sqrt{c}=0$ и полюс (σ) в знаменателе сокращаются. Функция ψ_- является квадратично-интегрируемой около $x=x_0, y=y_0$. Семейство функций ψ_- таково, что:

а) $Q\psi_- = 0, \psi = \psi_-(u,k,x,y)$;

б) все блоховские показатели $(æ_1, æ_2)$ реализуются в этом семействе;

в) особенность ψ_- слабая; она совместима с гильбертовым пространством.

Требование унитарности показателей $|æ|=1$ выделяет функции, обслуживающие спектр оператора L в гильбертовом пространстве. При $\varepsilon=0$ мы получаем двумерное пространство основных состояний в секторе L^-. В секторе L^+ их нет.

Это семейство представляет собой весь закон дисперсии, где $\varepsilon_0(x_1,x_2)\equiv 0$. Этот закон дисперсии является вырождением закона дисперсии гладкого поля c_α, которое стремится к c при $\alpha \to \alpha_0$, для которого $\sqrt{c_\alpha}$ является основным состоянием — дном спектра. Оператор суперсимметрии хорошо определен для гладких полей и устанавливает изоморфизм спектров $L_\alpha^- \to L_\alpha^+$ (при всех энергиях $\varepsilon > 0$):

$$R^+ : \psi^- \to \psi^+,$$
$$R^+ = Q_\alpha = \partial - (\ln c_\alpha)_z.$$

Нижний закон дисперсии $\varepsilon_0^\alpha(x_1, x_2)$ для $\alpha \neq \alpha_0$ в секторе сходится к вырожденному $\varepsilon_0^\alpha \to 0, \alpha \to \alpha_0$. В секторе $(+)$ соответствующий ему закон дисперсии в силу суперсимметрии также сходится к нулевой энергии, но в пределе $\alpha = \alpha_0$ исчезает из гильбертова пространства. Этот процесс любопытно проследить численно, но пока это не проделано.

Функции

$$\psi_- = \sqrt{c}\, \mathrm{e}^{k\bar{z}} \frac{\sigma(\bar{z} + u - \bar{a}_1)}{\sigma(\bar{z} - \bar{a}_1)}, \ \alpha = \alpha_0$$

квадратично интегрируемы. Интегралы для следующих матричных элементов сходятся (для $c_\alpha > 0$, $c_\alpha = \exp\{\Phi_\alpha\}$):

$$< \psi_-, \psi_- >, < Q_\alpha \psi_-, \psi_- >, < Q_\alpha^+ \psi_-, \psi_- >,$$
$$< \partial\psi_-, \psi_- >, < \bar{\partial}\psi_-, \psi_- >.$$

При этом имеем для $\alpha = \alpha_0$

$$QQ^+\psi_- = Q\psi_- = (\partial - \Phi_z)\psi = 0, \ c = \mathrm{e}^\Phi.$$

Однако матричные элементы вида

$$< Q_\alpha Q_\alpha^+ \psi_-, \psi_- >, \alpha \neq \alpha_0$$

расходятся. Поэтому возникает трудность в сопоставлении предельного оператора QQ^+ и гладкого оператора $Q_\alpha Q_\alpha^+$.

Совершив сингулярное калибровочное преобразование

$$\psi_- \to \psi_- \sqrt{\frac{\sigma(\bar{z} - \bar{a}_1)}{\bar{\sigma}(\bar{z} - \bar{a}_1)}},$$

мы убираем δ-функцию и получаем семейство гладких несингулярных магнитно-блоховских функций с теми же значениями показателей $æ_1, æ_2$, как в формуле (4). Здесь $n = -1$, так что надо заменить z на $\bar{z}$ в формуле (3).

Таким образом, получаем подобные семейства решений как пределы решений для гладких полей с нулевым потоком сквозь элементарную ячейку. Затем мы убираем член Ааронова–Бома (δ-функцию с квантованным потоком), не влияющий на спектр около $\varepsilon = 0$. Это приводит к формулам работ [3,4] для случая $[B]_{\text{cell}} = -1$. Аналог этого вывода для всех целых $n \neq 0$ очевиден.

Случай 2. Следуя работе авторов [6], строим семейства блоховских функций, параметризованные точками римановой поверхности рода $g = 1$ (тора). Получающиеся магнитные поля оказываются суммой δ-функции (квантованной) и гладкого поля $\tilde{B}$ с ненулевым потоком с квантом $n = +1$. Убирая δ-член, мы производим то же самое сингулярное калибровочное преобразование; после этого мы приходим к магнитно-блоховскому базису работы [3,4].

Замечание. Любопытные семейства основных состояний мы получаем для «ламповых» полей, т.е. таких, что $|B| \to 0$ при $|x|^2 + |y|^2 \to \infty$, но поток $\iint_{\mathbb{R}^2} B\, dxdy$ расходится.

Весьма интересен случай

$$c = \sum_{j=1}^k æ_j\, \mathrm{e}^{\alpha_j x + \beta_j y}, \ W_j = \alpha_j x + \beta_j y,$$

где все $æ_j, \alpha_j, \beta_j$ вещественны и $æ_j$ положительны. Мы всегда имеем $c > 0$. Преобразование $c \to \lambda c\, \mathrm{e}^{\alpha x + \beta y} = c'$ приводит к тому же самому магнитному полю (пусть $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$):

$$B = \frac{1}{2} \Delta \ln c = \frac{1}{2} \Delta \ln c'.$$

Возникает класс $\{c' = c\mathrm{e}^W\}$, меняя W, где все функции имеют одно и то же поле. Функциям класса соответствуют точки плоскости $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Обозначим через T область на этой плоскости, где c' растет экспоненциально. Это значит, что «тропическая сумма» (см. ниже) строго положительна $I_{c'}(\varphi) > 0$. Здесь

$$c' = (\sum æ_j\, \mathrm{e}^{W_j'}), \ W_j' = W_j + W = \alpha_j' x + \beta_j' y,$$
$$(\alpha_j', \beta_j') \in \mathbb{R}^2, \ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Тропическая сумма величин W_j', где $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, это предел:

$$\lim_{\rho \to \infty} \left[\frac{1}{\rho} \max_j W_j'(x, y)\,|_{\rho = \text{const}} \right] = I_{c'}(\varphi).$$

Совершив калибровочное преобразование, мы получаем «инстантонные» решения $L\psi = 0$, где $\tilde{\psi} = 1/\sqrt{c'}$, $c' = c\,\mathrm{e}^W$ и $\psi = \mathrm{e}^{-i(\alpha x - \beta y)/2)}\tilde{\psi}$ в секторе $(+)$, $Q^+\psi = 0$. Эти состояния квадратично интегрируемы, если $I_{c'}(\varphi) > 0$ для всех углов. Они не ортогональны. Это — область T в плоскости $\mathbb{R}^2$ линейных форм W, т.е. $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ (рис. 1). На ее границе имеем состояния, где $I_{c'}(\varphi) \ge 0$. Они являются дном непрерывного спектра. Сама эта область имеет вид выпуклого многоугольника T, который является выпуклой оболочкой вершин $(-\alpha_1, \beta_1), (-\alpha_2, \beta_2), \ldots, (-\alpha_k, \beta_k)$, где

$$c = \sum_{j=1}^k æ_j\, \mathrm{e}^{W_j}, \ W_j = \alpha_j x + \beta_j y$$

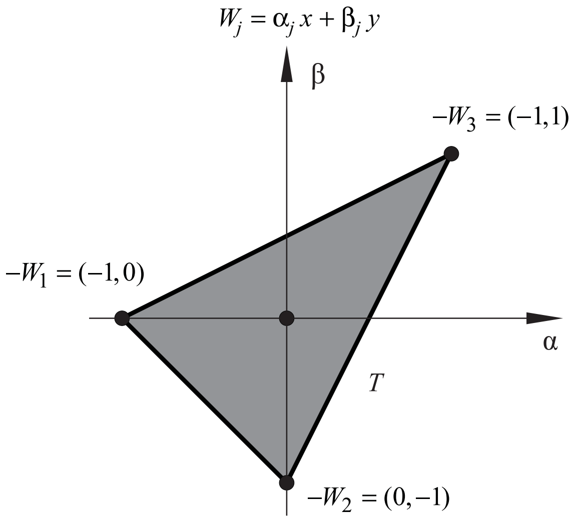

Рис. 1. Область T для $c = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-x-y}$.

Дополнение: Граничные задачи. Обсудим теперь самосопряженные граничные задачи, аналогичные одномерному случаю периодических операторов Шредингера, где блоховские функции запрещенных зон приобретают трактовку физических состояний.

Согласно методу фон Неймана, можно получить полную классификацию самосопряженных граничных задач. Ряд работ М.Г. Крейна был посвящен этой теории фон Неймана. Нам необходимо проделать это для оператора Паули в магнитном и электрическом полях для двумерного случая. Пусть $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ — граничный контур. Несложный анализ показывает, что граничные условия делятся на ультралокальные, локальные и общие нелокальные, которые мы не рассматриваем.

1. Самосопряженные условия, не перемешивающие компонент $(\pm)$

Ультралокальные граничные условия; две вещественные функции $\alpha(t), \beta(t)$ должны быть заданы, где вектор $(\alpha(t), \beta(t)) \neq 0$. Пусть $\nabla_n \psi = \partial_n \psi + iA_n$ — ковариантная производная функции ψ по нормальному направлению к контуру, $A_n = -\Phi_t / 2$ в нашей калибровке. Условие «типа Леонтовича» или «смешанное» имеет вид

$$\alpha(t)\nabla_n \psi(t) + \beta(t)\psi(t) = 0.$$

Частные случаи — это $\alpha \equiv 0$ (Дирихле) и $\beta \equiv 0$ (Неймана, или, точнее, его ковариантный аналог).

Локальные граничные условия; они имеют вид

$$\nabla_n \psi(t) = A\psi(t)$$

или

$$\psi(t) = A\nabla_n \psi(t),$$

где A — самосопряженный дифференциальный оператор на границе. Более общий класс мы напишем в виде

$$A_1 \nabla_n \psi(t) = A_2 \psi(t),$$

где один из дифференциальных операторов A_1, A_2 обратим и оператор $(A_1 A_2^+)^+ = A_1 A_2^+$ самосопряжен.

Из локальных, но не ультралокальных граничных условий выделяется условие «типа $\bar{\partial}$»

$$Q^+ \psi = i\alpha(t)\psi,$$

где $\mathrm{e}^{-i\theta(t)}\alpha = \rho(t)$ вещественно, $-Q^+ = \bar{\partial} + \Phi_{\bar{z}}$, $\theta(t)$ — угол поворота от единичного вектора ∂_x к вектору ∂_t (угол Френе). Мы можем записать условия этого типа так:

$$\nabla_n \psi = A(t)\psi,\ A(t) = i\partial_t + \rho(t),$$

где $\rho(t)$ — вещественная.

Только ультралокальные условия неизбежно приводят к эллиптическим операторам, где все собственные значения конечнократны (для компактных контуров).

Условия «типа $\bar{\partial}$» приводят к возможно бесконечномерным собственным пространствам только для $\varepsilon = 0$. Все остальные уровни конечнократны так же, как и для ультралокальных граничных условий. Они представляют отдельный интерес.

2. Самосопряженные граничные условия, перемешивающие компоненты $(\pm)$

Введем «канонический базис» $(\psi_1^+, \psi_2^+, \psi_1^-, \psi_2^-)$ на границе, где граничная косоэрмитова форма $< L\Psi, \Psi' > - < \Psi, L\Psi' >$ имеет вид для $\psi_1^+ = \nabla_n \psi^+$, $\psi_1^- = \nabla_n \psi^-$, $\psi_2^+ = \psi^+$, $\psi_2^- = \psi^-$:

$$\oint_\gamma \{\psi_1^+ \bar{\psi}_2'^+ - \psi_2^+ \bar{\psi}_1'^+ + \psi_1^- \bar{\psi}_2'^- - \psi_2^- \bar{\psi}_1'^-\}\, dt.$$

Здесь

$$\Psi = (\psi^+, \psi^-),$$
$$< L\Psi, \Psi' > = \iint_D \{(L^+\psi^+)\bar{\psi}'^+ + (L^-\psi^-)\bar{\psi}'^-\}\, dxdy.$$

Ультралокальные условия имеют вид

$$\alpha(t)\Psi_1 + \beta(t)\Psi_2 = 0,\ \Psi_1 = (\nabla_n \psi^+, \nabla_n \psi^-),\ \Psi_2 = (\psi^+, \psi^-),$$

где $\alpha^{-1}\beta$ или $\alpha\beta^{-1}$ — эрмитовы матрицы, то есть одна из них невырождена и матрица $\alpha\beta^+$ эрмитова. Возможны еще вырожденные случаи, которые мы не приводим.

Локальные условия напишем в виде

$$A_1 \psi_1 = A_2 \psi_2,\ \psi_1 = (\nabla_n \psi^+, \nabla_n \psi^-),\ \psi_2 = (\psi^+, \psi^-),$$

где один из операторов A_1, A_2 обратим и $(A_1 A_2^+)$ самосопряжен.

Приведем здесь одно специфическое граничное условие, где ψ^+ и ψ^- неравноправны.

1. Ультралокальное граничное условие:

$$\nabla_n \psi^+ - b(t)\nabla_n \psi^- = a(t)\psi^+,$$

$$0 = \bar{b}(t)\psi^+ + \psi^-$$

2. Локальное условие $\bar{\partial}$-типа для сектора $(+)$:

$$\nabla_n \psi^+ - b(t)\nabla\psi^- = (i\partial_t + a(t))\psi^+,$$

$$0 = \bar{b}(t)\psi^+ + \psi^- .$$

Здесь a вещественно в обоих случаях. Матрица $\alpha\beta^+$ в ультралокальном случае имеет вид $\begin{pmatrix} \bar{a} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, т.е. эрмитова, так что критерий самосопряженности выполнен.

В нашей работе [7] найдены семейства контуров γ, для которых блоховские решения (т.е. $\psi^+ = \frac{1}{\sqrt{c}}\psi'_+$, $\psi^- = \beta Q^+ \psi^+$) удовлетворяют этим самосопряженным граничным условиям. Эти контуры описываются динамическими системами на торе, которые обсуждаются в работе [7].

П.Г. Гриневич был частично поддержан грантом НШ-5413.2010.1 Совета по грантам Президента Российской Федерации, и программой Президиума РАН «Фундаментальные проблемы нелинейной динамики».

А.Е. Миронов был частично поддержан грантом НШ-7256.2010.1 Совета по грантам Президента Российской Федерации и Интрерационным проектом СО РАН (грант 65).

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц, *Теоретическая физика*, Наука, Москва (1968), т. 4; В.Б. Берестецкий, Е.М. Лившиц, Л.П. Питаевский *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1980).
2. Y. Aharonov and A. Casher, *Phys. Rev.* **A19**, 2461 (1979).
3. Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, *ЖЭТФ*, **79**, 1006 (1980).
4. Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, *ДАН СССР* **253**, 1293 (1980).
5. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, Наука, Москва (1965).
6. П.Г. Гриневич, А.Е. Миронов, С.П. Новиков, *ТМФ* **164**, 333 (2010).
7. P.G. Grinevich, A.E. Mironov, and S.P. Novikov, *On the Nonrelativistic 2D Purely Magnetic Supersymmetric Pauli Operator*, arXiv:1101.5678 (2011).

Two-dimensional Pauli operator in magnetic field

P.G. Grinevich, A.E. Mironov, and S.P. Novikov

The 2D purely magnetic Pauli operator for the nonrelativistic particle with spin 1/2 in magnetic field has some remarkable properties discovered in the late 70's: its ground level is highly degenerate; it admits supersymmetry. In the present work we investigate the special case where magnetic flux through the elementary cell is equal to zero. This case was not covered by the previous works. An interesting connection is revealed here with the theory of solitons, in particular with Burgers-like systems and their 2D analogs. They can be linearized by the elementary transformations and are much simpler than KdV or KP. The Aharonov-Bohm type terms with quantized magnetic flux play special important role in our investigation.

PACS: 02.30.Tb Operator theory;
02.30.Ik Integrable systems;
11.30.Pb Supersymmetry;
73.20.–r Electron states at surfaces and interfaces.

Keywords: two-dimensional system, pure magnetic Pauli operator, ground state, supersymmetry, Burgers hierarchy.