

Сверхтекучесть электронно-дырочных пар в случайно неоднородных двухслойных системах

А.И. Безуглый

*Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»
ул. Академическая, 1, г. Харьков, 61108, Украина*

С.И. Шевченко

*Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Ленина, 47, г. Харьков, 61103, Украина
E-mail: shevchenko@ilt.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 20 ноября 2010 г.

В двухслойных системах при понижении температуры электронно-дырочные ($e-h$) пары с пространственно разделенными компонентами могут переходить в сверхтекучее состояние. Рассмотрено влияние случайных неоднородностей на сверхтекучие свойства двухслойных систем. Показано, что ионизированные примеси и искривленность проводящих слоев уменьшают плотность сверхтекучего тока $e-h$ -пар. В случае, когда межслоевое расстояние меньше или порядка магнитной длины, флуктуации межслоевого расстояния приводят к значительному уменьшению температуры перехода в сверхтекучее состояние.

В двошарових системах при зниженні температури електронно-діркові ($e-h$) пари з просторово розділеними компонентами можуть переходити у надплинний стан. Розглянуто вплив випадкових неоднорідностей на надплинність в двошарових системах. Показано, що іонізовані домішки і кривизна шарів зменшують щільність надплинного потоку $e-h$ -пар. У випадку, коли міжшарова відстань менше або порядку магнітної довжини, флуктуації міжшарової відстані призводять до значного зменшення температури переходу у надплинний стан.

PACS: **73.21.-b** Электронные состояния и коллективные возбуждения в многослойных структурах, квантовые ямы, мезоскопические и наномасштабные системы;
71.35.Ji Экситоны в магнитных полях; магнитоэкситоны;
73.43.-f Квантовые эффекты Холла.

Ключевые слова: двухслойные системы, электронно-дырочные пары, сверхтекучесть, неоднородности.

1. Введение

Наблюдающийся в последнее время интерес к двухслойным системам со спариванием электронов из одного слоя с дырками из другого слоя [1–3] главным образом связан с поиском сверхтекучести электронно-дырочных ($e-h$) пар с пространственно разделенными компонентами, которая была предсказана в работах [4,5]. Нетрудно заметить, что такая сверхтекучесть сопровождается особым родом сверхпроводимостью, поскольку сверхтекучий поток $e-h$ -пар, компоненты которых принадлежат разным слоям, проявляет себя в виде текущих по слоям равных по величине и противоположных по направлению недиссипативных элект-

рических токов. Сравнительно недавно эксперименты с антипараллельными токами были проведены на гетероструктурах GaAs/AlGaAs, представлявших собой пару близко расположенных квантовых ям, каждая из которых содержала двумерный слой электронов [6–8]. Было обнаружено, что в перпендикулярном магнитном поле H , когда суммарный по слоям фактор заполнения уровней Ландау ν_T равнялся единице ($\nu_T = \nu_1 + \nu_2$), понижение температуры приводило к существенному (более чем на порядок) падению продольного сопротивления ρ_{xx} и холловского сопротивления ρ_{xy} . Полученные результаты можно интерпретировать в терминах сверхтекучести $e-h$ -пар с пространственно разделен-

ными компонентами (межъямных экситонов) [7,9]. Действительно, условие $v_T = 1$ эквивалентно равенству $v_1 = 1 - v_2$, которое означает, что число занятых состояний на нулевом уровне Ландау в первом слое в точности совпадает с числом свободных состояний (дырок) на нулевом уровне Ландау во втором слое. При нулевой температуре все электроны из первого слоя и все дырки из второго слоя образуют $e-h$ -пары, и неспаренных носителей нет. Вследствие сверхтекучести $e-h$ -пар продольное сопротивление ρ_{xx} в каждом слое равно нулю. При этом холловское сопротивление ρ_{xy} также должно обратиться в нуль, поскольку $e-h$ -пары (будучи электрически нейтральными) не дают вклад в эффект Холла. В такой интерпретации наблюдаемые при $T \neq 0$ остаточные значения ρ_{xx} и ρ_{xy} обусловлены движением свободных вихрей и неспаренных носителей соответственно.

Свойства сверхтекучего (точнее, фазово-когерентного) состояния $e-h$ -пар в двухслойной системе существенно зависят от величины межслоевого расстояния d . Так, эксперимент показывает, что описанное выше уменьшение ρ_{xx} и ρ_{xy} не наблюдается, если d превышает значения $1,6l_H - 1,9l_H$, где $l_H = \sqrt{\hbar c / eH}$ — магнитная длина [6,8]. Согласно теоретическим представлениям [10], при увеличении d когерентность $e-h$ -пар разрушается, если длина когерентности становится меньше среднего расстояния между парами. Этот переход имеет квантовую природу, так как при больших d межслоевая когерентность разрушается квантовыми флуктуациями [11].

В настоящей работе основное внимание уделяется свойствам систем с относительно малыми межслоевыми расстояниями $d \lesssim l_H$. Эта область межслоевых расстояний весьма важна, так как в однородной системе критическая температура перехода в сверхтекучее состояние (T_c) достигает своих максимальных значений при $d \approx 0,4l_H$ (см. далее). Сам максимум — довольно резкий, поскольку при уменьшении d величина T_c быстро уменьшается из-за существенного ослабления взаимодействия между $e-h$ -парами и усиления тепловых флуктуаций. Оказывается, что в неоднородной двухслойной системе слабость взаимодействия $e-h$ -пар приводит к высокой чувствительности T_c к структурным неоднородностям. Как следствие, в области $d \lesssim l_H$ критическая температура сильно подавляется неоднородностями системы. (О влиянии неоднородностей на двухслойную систему при $d \gg l_H$ см. [12] и цитируемую там литературу.)

Статья организована следующим образом. В первых разделах рассмотрено подавление сверхтекучей компоненты плотности $e-h$ -пар электрическим полем слоя случайно расположенных доноров (разд. 2) и вариациями межслоевого расстояния (разд. 3). В разд. 4 найдена зависимость температуры сверхтекучего перехода

от среднеквадратичной флуктуации межслоевого расстояния. Раздел 5 содержит основные выводы.

2. Подавление сверхтекучести $e-h$ -пар электрическим полем ионизированных доноров

В двухслойных системах, созданных на основе полупроводниковых гетероструктур, заселение квантовых ям электронами может осуществляться в результате ионизации донорных атомов. Покажем, что электрическое поле слоя доноров уменьшает величину сверхтекучего тока $e-h$ -пар в двухслойной системе. Причиной такого уменьшения являются корреляции между пространственными флуктуациями сверхтекучей плотности n_s и сверхтекучей скорости \mathbf{v}_s , а именно: под влиянием электрического поля доноров сверхтекучая плотность n_s становится неоднородной, причем вследствие закона сохранения тока $\text{div } \mathbf{j}_s = \text{div} (n_s \mathbf{v}_s) = 0$ в областях, где n_s больше, величина v_s меньше. Эти корреляции во втором порядке теории возмущений приводят к уменьшению средней плотности сверхтекучего тока.

Последующий анализ основан на выведенном в работе [10] нелинейном уравнении для волновой функции конденсата $e-h$ -пар:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{R}, t)}{\partial t} = \left\{ \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} - \frac{\alpha(\mathbf{R})}{c} [\mathbf{E}_{\text{tot}} \mathbf{H}] \right) \times \right. \\ \times \frac{1}{2M_H(\mathbf{R})} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} - \frac{\alpha(\mathbf{R})}{c} [\mathbf{E}_{\text{tot}} \mathbf{H}] \right) - \frac{1}{2} \alpha(\mathbf{R}) E_{\text{tot}}^2 + U(\mathbf{R}) - \\ \left. - \mu + g(\mathbf{R}) |\Psi(\mathbf{R}, t)|^2 \right\} \Psi(\mathbf{R}, t). \quad (1)$$

Заметим, что уравнение (1) получено в рамках приближения самосогласованного поля при малой плотности $e-h$ -пар ($v_1 \ll 1$). По своему виду уравнение (1) аналогично уравнению Гросса–Питаевского [13], что неудивительно, поскольку при низкой плотности $e-h$ -пары ведут себя как слабо неидеальный бозе-газ [14,15]. Из-за неоднородности двухслойной системы входящие в (1) коэффициенты (такие как эффективная масса пары M_H , ее поляризуемость α и константа взаимодействия g) являются функциями координат в плоскости слоев: $\mathbf{R} = (x, y)$. Явные выражения для этих коэффициентов, а также для потенциальной энергии $e-h$ -пар, $U(\mathbf{R})$, будут приведены ниже. Существенное отличие (1) от уравнения Гросса–Питаевского состоит в изменении структуры первого слагаемого в правой части. Во-первых, действие оператора градиента распространяется на зависящую от координат массу $e-h$ -пары, и, во-вторых, сам оператор градиента «удлиняется» за счет добавки, связанной с поляризуемостью $e-h$ -пар. Эта добавка содержит эффективное электрическое поле $\mathbf{E}_{\text{tot}} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\text{int}}$, где \mathbf{E}_{\parallel} — параллельное слоям электрическое поле, созданное сторонними зарядами, а \mathbf{E}_{int} — поле, обусловленное искривленностью проводящих слоев [10,16].

Нетрудно показать, что мнимая часть уравнения (1) сводится к уравнению непрерывности $\dot{n}_s + \text{div } \mathbf{j}_s = 0$, где плотность сверхтекучей компоненты $n_s = |\Psi|^2$, а плотность сверхтекучего тока

$$\mathbf{j}_s = \frac{n_s}{M_H} \left(\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{R}} + \frac{\alpha(\mathbf{R})}{c} [\mathbf{E}_{\text{tot}} \mathbf{H}] \right). \quad (2)$$

Здесь φ — фаза волновой функции ($\Psi = |\Psi| e^{i\varphi}$).

Рассмотрим случай, когда неоднородность связана со случайным расположением ионизированных донорных атомов в слое, отстоящем на расстоянии Z_d от двухслойной системы (рис. 1). В такой ситуации коэффициенты уравнения (1) не зависят от координат и \mathbf{E}_{tot} совпадает с параллельным электрическим полем \mathbf{E}_{\parallel} . Поле \mathbf{E}_{\parallel} и потенциальная энергия e - h -пары $U(\mathbf{R})$ выражаются через электростатические потенциалы $V_1(\mathbf{R})$ и $V_2(\mathbf{R})$, создаваемые заряженными донорами соответственно в электронном и дырочном слоях:

$$\mathbf{E}_{\parallel} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} [V_1(\mathbf{R}) + V_2(\mathbf{R})];$$

$U(\mathbf{R}) = e[V_2(\mathbf{R}) - V_1(\mathbf{R})]$. При этом вещественная часть уравнения (1) принимает вид

$$\frac{\hbar^2}{2M_H} \frac{1}{\sqrt{n_s}} \frac{\partial^2 \sqrt{n_s}}{\partial \mathbf{R}^2} - \frac{M_H}{2} v_s^2 + \frac{\alpha}{2} E_{\parallel}(\mathbf{R})^2 + e[V_2(\mathbf{R}) - V_1(\mathbf{R})] - gn_s + \mu = 0. \quad (3)$$

Заметим, что эксперименты на двухслойных системах проводятся в сильных магнитных полях, когда магнитная длина много меньше боровских радиусов электрона и дырки. В этом пределе эффективная масса e - h -пары M_H возникает в результате кулоновского

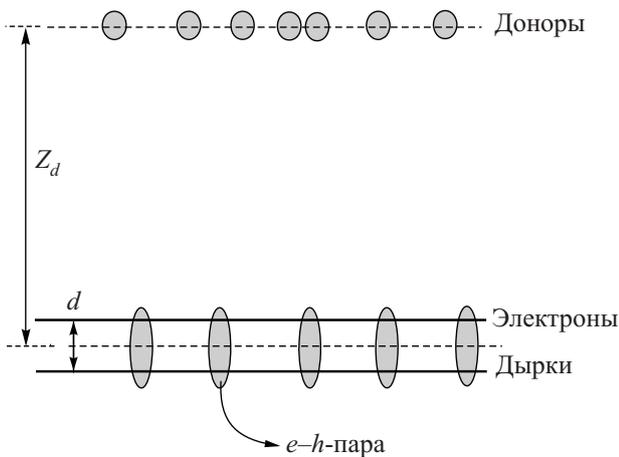


Рис. 1. Схематический вид двухслойной электронно-дырочной системы с межслоевым расстоянием d . Показаны e - h -пары с пространственно разделенными компонентами и слой донорных атомов, расположенный на расстоянии Z_d от двухслойной системы.

взаимодействия между электроном и дыркой [17,18] и ее величина не зависит от собственных масс носителей:

$$M_H = \frac{2\varepsilon\hbar^2}{e^2 l_H} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\left(1 + \frac{d^2}{l_H^2} \right) \exp\left(\frac{d^2}{2l_H^2} \right) \times \text{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{2}l_H} \right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{l_H} \right]^{-1}. \quad (4)$$

Здесь ε — диэлектрическая проницаемость, а $\text{erfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ — дополнительная функция ошибок.

Кроме M_H , в уравнение (3) также входят поляризуемость e - h -пары $\alpha = e^2 M_H / H^2$ и константа взаимодействия пар

$$g = \frac{e^2}{\varepsilon} \left[4\pi d - (2\pi)^{3/2} l_H + (2\pi)^{3/2} l_H \exp\left(\frac{d^2}{2l_H^2} \right) \text{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{2}l_H} \right) \right]. \quad (5)$$

Выражение для электростатических потенциалов, создаваемых донорами в электронном и дырочном слоях, имеет вид

$$V_{1(2)} = \frac{e}{\varepsilon} \int d\mathbf{R}' \rho(\mathbf{R}') \left[(\mathbf{R} - \mathbf{R}')^2 + \left(Z_d \mp \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (6)$$

где плотность донорных атомов $\rho(\mathbf{R}') = \sum_i \delta(\mathbf{R}' - \mathbf{R}_i)$.

В последнем равенстве вектор \mathbf{R}_i определяет положение i -го донора.

Если потенциалы $V_{1(2)}(\mathbf{R})$ существенно меняются на расстояниях намного больших, чем длина когерентности $\xi = \hbar / \sqrt{M_H g n_s}$, то первым слагаемым в (3) можно пренебречь как малым по сравнению с gn_s . Поскольку в дальнейшем нас будет интересовать линейная по $V_{1(2)}$ поправка к n_s , опустим также квадратичные по $V_{1(2)}$ второе и третье слагаемые. В итоге получаем для n_s уравнение в приближении Томаса-Ферми:

$$e[V_2(\mathbf{R}) - V_1(\mathbf{R})] - gn_s(\mathbf{R}) + \mu = 0. \quad (7)$$

Разность потенциалов $V_1(\mathbf{R}) - V_2(\mathbf{R})$ удобно разделить на однородную часть

$$\langle V_1 - V_2 \rangle = \frac{1}{S} \int d\mathbf{R} [V_1(\mathbf{R}) - V_2(\mathbf{R})],$$

где S — площадь системы, и отклонения от среднего значения $\tilde{V}_1 - \tilde{V}_2 = V_1 - V_2 - \langle V_1 - V_2 \rangle$. Однородная часть определяет средние факторы заполнения v_1 и v_2 , тогда как неоднородная часть дает интересующие нас пространственные флуктуации сверхтекучей плотности e - h -пар:

$$\tilde{n}_s(\mathbf{R}) = \frac{e}{g} [\tilde{V}_1(\mathbf{R}) - \tilde{V}_2(\mathbf{R})]. \quad (8)$$

Поскольку n_s и \mathbf{v}_s связаны уравнением $\text{div}(n_s \mathbf{v}_s) = 0$, флуктуации плотности \tilde{n}_s приводят к флуктуациям сверхтекучей скорости $\tilde{\mathbf{v}}_s$. В линейном приближении имеем

$$\mathbf{v}_{s0} \frac{\partial \tilde{n}_s}{\partial \mathbf{R}} + n_{s0} \text{div} \tilde{\mathbf{v}}_s = 0, \quad (9)$$

где индекс «0» обозначает однородную часть. Этого скалярного уравнения недостаточно, чтобы найти $\tilde{\mathbf{v}}_s$. Недостающее уравнение можно получить из (2). В отсутствие квантованных вихрей

$$\text{rot} \tilde{\mathbf{v}}_s = -\frac{\alpha \mathbf{H}}{cM_H} \text{div} \tilde{\mathbf{E}}_{\parallel}. \quad (10)$$

Чтобы найти $\tilde{\mathbf{v}}_s$, возьмем ротор от обеих частей этого равенства. Для фурье-компоненты сверхтекучей скорости $\mathbf{v}_{s\mathbf{k}}$ получим

$$k^2 \mathbf{v}_{s\mathbf{k}} - \mathbf{k}(\mathbf{k} \mathbf{v}_{s\mathbf{k}}) = \frac{\alpha}{cM_H} (\mathbf{k} \mathbf{E}_{\parallel \mathbf{k}}) [\mathbf{k} \mathbf{H}]. \quad (11)$$

Из уравнения (9) вытекает, что $(\mathbf{k} \mathbf{v}_{s\mathbf{k}}) = -(\mathbf{k} \mathbf{v}_{s0}) n_{s\mathbf{k}} / n_{s0}$. Подстановка этого выражения в (11) дает

$$\mathbf{v}_{s\mathbf{k}} = -\frac{n_{s\mathbf{k}}}{n_{s0}} \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k} \mathbf{v}_{s0})}{k^2} + \frac{\alpha}{cM_H} \frac{(\mathbf{k} \mathbf{E}_{\parallel \mathbf{k}})}{k^2} [\mathbf{k} \mathbf{H}]. \quad (12)$$

Таким образом, флуктуации сверхтекучей скорости $\tilde{\mathbf{v}}_s$ определяются флуктуациями плотности n_s и флуктуациями электрического поля \mathbf{E}_{\parallel} .

Поскольку в реальных двухслойных системах $Z_d \gg d$, при вычислении фурье-компоненты параллельного электрического поля $\mathbf{E}_{\parallel \mathbf{k}}$ можно положить $d = 0$. Используя определение $\mathbf{E}_{\parallel \mathbf{k}}$, из формулы (6) получаем

$$\mathbf{E}_{\parallel \mathbf{k}} = -\frac{2\pi i e}{\varepsilon} \rho_{\mathbf{k}} e^{-kZ_d} \frac{\mathbf{k}}{k}, \quad (13)$$

где $\rho_{\mathbf{k}} = \sum_i e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}_i}$. Если разложить $V_{1(2)}$ по d , фурье-компонента сверхтекучей плотности легко находится из уравнения (8):

$$n_{s\mathbf{k}} = \frac{2\pi d e^2}{\varepsilon g} \rho_{\mathbf{k}} e^{-kZ_d}. \quad (14)$$

Подставив полученные формулы в выражение для средней плотности сверхтекучего тока $\langle \mathbf{j}_s \rangle = \langle n_s \mathbf{v}_s \rangle = n_{s0} \mathbf{v}_{s0} + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} n_{s\mathbf{k}} \mathbf{v}_{s-\mathbf{k}}$, получаем

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{j}_s \rangle = & n_{s0} \mathbf{v}_{s0} - \frac{1}{n_{s0}} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left(\frac{2\pi d e^2}{\varepsilon g} \right)^2 \rho_{\mathbf{k}} \rho_{-\mathbf{k}} e^{-2kZ_d} \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k} \mathbf{v}_{s0})}{k^2} + \\ & + i \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \frac{4\pi^2 e^2 d \alpha}{\varepsilon^2 g c M_H} \rho_{\mathbf{k}} \rho_{-\mathbf{k}} e^{-2kZ_d} \frac{[\mathbf{k} \mathbf{H}]}{k}. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь и далее считается, что площадь системы $S = 1$. После усреднения (15) по положениям донорных атомов (которое сводится к замене $\rho_{\mathbf{k}} \rho_{-\mathbf{k}}$ на плотность доноров n_d) и перехода от суммирования по \mathbf{k} к интегрированию, замечаем, что второй интеграл обращается в нуль при интегрировании по углам вектора \mathbf{k} . Вычисление оставшегося интеграла не вызывает затруднений и дает

$$\langle \mathbf{j}_s \rangle = \left[n_{s0} - \frac{\pi}{4} \left(\frac{d e^2}{\varepsilon g} \right)^2 \frac{n_d}{n_{s0}} \frac{1}{Z_d^2} \right] \mathbf{v}_{s0}. \quad (16)$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой эффективную сверхтекучую плотность e - h -пар, n_{eff} . Как следует из (16), $n_{\text{eff}} < n_{s0}$, таким образом, под действием электрического поля случайно расположенных доноров средняя плотность сверхтекучего тока уменьшается.

Рассмотрим более подробно случай малых межслоевых расстояний. При $d \ll l_H$ константа взаимодействия e - h -пар

$$g = \sqrt{2\pi}^{3/2} \frac{e^2 d^2}{\varepsilon l_H}, \quad (17)$$

и для эффективной плотности сверхтекучей компоненты находим выражение

$$n_{\text{eff}} = n_{s0} - \frac{1}{8\pi^2 Z_d^2} \left(\frac{n_d}{n_{s0}} \right) \left(\frac{l_H^2}{d^2} \right). \quad (18)$$

Поскольку $n_d / n_{s0} \sim 1/v_1 \gg 1$ и $l_H \gg d$, в рассматриваемом случае сверхтекучее состояние существует только при достаточно большом удалении слоя доноров от двухслойной системы. Другой аспект полученного результата состоит в том, что при заданном Z_d деструктивное влияние доноров можно ослабить, уменьшая l_H до значений порядка d и увеличивая v_1 до максимального значения $1/2$. Отметим, что именно при $d \sim l_H$ и $v_1 = v_2 = 1/2$ двухслойные системы обладают свойствами, которые можно объяснить возникновением сверхтекучести e - h -пар [6–8].

Так как в эксперименте используются два слоя донорных атомов, один из которых расположен над двухслойной системой, а другой — под ней, выражение (16) следует обобщить на такой случай. Вычисления (аналогичные проделанным для одного слоя) дают

$$\langle \mathbf{j}_s \rangle = \left[n_{s0} - \frac{\pi}{4} \left(\frac{d e^2}{\varepsilon g} \right)^2 \left(\frac{n_{d1}}{Z_{d1}^2} + \frac{n_{d2}}{Z_{d2}^2} \right) \frac{1}{n_{s0}} \right] \mathbf{v}_{s0}, \quad (19)$$

где n_{di} — плотность донорных атомов в i -м слое, а Z_{di} — расстояние от двухслойной системы до i -го слоя доноров ($i = 1, 2$).

3. Подавление сверхтекучести e - h -пар вариациями межслоевого расстояния

В этом разделе будет показано, что в двухслойных системах с искривленными слоями вариации межслоевого расстояния приводят к уменьшению средней плотности сверхтекучего тока. Итак, пусть межслоевое расстояние является плавной функцией координат в плоскости слоев: $d = d(\mathbf{R})$. Поскольку эффективная масса пары M_H , поляризуемость α и константа взаимодействия g зависят от d , они также оказываются зависящими от \mathbf{R} . В отсутствие электрических полей, созданных сторонними зарядами, потенциальная энергия e - h -пары совпадает с ее энергией связи, которая согласно [10] имеет вид

$$E_0 = -\frac{e^2}{\varepsilon l_H} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left(\frac{d^2}{2l_H^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{2}l_H}\right). \quad (20)$$

Вследствие зависимости E_0 от d в неоднородной системе формируется случайный потенциальный рельеф $U(\mathbf{R}) = E_0[d(\mathbf{R})]$. Наконец, напомним, что искривленность проводящих слоев приводит к поляризующей паре e - h -пару полю \mathbf{E}_{int} [10]:

$$\mathbf{E}_{\text{int}} = \frac{e}{2\varepsilon l_H} F(d) \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} [z_1(\mathbf{R}) + z_2(\mathbf{R})]. \quad (21)$$

Здесь $z_{1(2)}(\mathbf{R})$ обозначает z -координату электронного (дырочного) слоя, а безразмерная функция $F(d)$ определяется выражением

$$F(d) = -\frac{d^2}{2l_H^2} \left[1 - \sqrt{2\pi} \frac{d}{l_H} \exp\left(\frac{d^2}{2l_H^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{2}l_H}\right) \right]. \quad (22)$$

В неоднородной двухслойной системе, где эффективная масса пары является функцией координат, выражение для плотности сверхтекучего тока удобно записать в виде $\mathbf{j}_s(\mathbf{R}) = K(\mathbf{R})\mathbf{p}_s(\mathbf{R})$. Здесь коэффициент

$$K(\mathbf{R}) = \frac{n_s(\mathbf{R})}{M_H(\mathbf{R})}, \quad (23)$$

а кинематический импульс e - h -пары

$$\mathbf{p}_s(\mathbf{R}) = \hbar \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{R}} + \frac{\alpha(\mathbf{R})}{c} [\mathbf{E}_{\text{int}} \mathbf{H}]. \quad (24)$$

Чтобы найти $\langle \mathbf{j}_s(\mathbf{R}) \rangle$, выполним вычисления, аналогичные приведенным в предыдущем разделе. Представим $z_{1(2)}(\mathbf{R})$ в виде суммы среднего значения и флуктуационной добавки: $z_{1(2)}(\mathbf{R}) = \langle z_{1(2)} \rangle + \tilde{z}_{1(2)}(\mathbf{R})$. В линейном порядке по флуктуациям условие сохранения тока $\operatorname{div} \mathbf{j}_s = 0$ дает следующую связь между фурье-компонентами $K_{\mathbf{k}}$ и $\mathbf{p}_{s\mathbf{k}}$:

$$(\mathbf{k} \mathbf{p}_{s\mathbf{k}}) = -(\mathbf{k} \mathbf{p}_{s0}) K_{\mathbf{k}} / K_0. \quad (25)$$

Вычислив теперь $\operatorname{rot} \mathbf{p}_s$, с учетом (25) получаем

$$\mathbf{p}_{s\mathbf{k}} = -\frac{K_{\mathbf{k}}(\mathbf{k} \mathbf{p}_{s0})}{K_0 k^2} + \frac{\alpha}{c} [\mathbf{E}_{\text{int} \mathbf{k}} \mathbf{H}], \quad (26)$$

где поляризуемость α берется в нулевом порядке по флуктуациям. Подставив $\mathbf{p}_{s-\mathbf{k}}$ в выражение для среднего сверхтекучего тока $\langle \mathbf{j}_s \rangle = K_0 \mathbf{p}_{s0} + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} K_{\mathbf{k}} \mathbf{p}_{s-\mathbf{k}}$, имеем

$$\langle \mathbf{j}_s \rangle = K_0 \mathbf{p}_{s0} - \frac{1}{K_0} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} K_{\mathbf{k}} K_{-\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k} \mathbf{p}_{s0})}{k^2} + \frac{\alpha}{c} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} K_{\mathbf{k}} [\mathbf{E}_{\text{int}-\mathbf{k}} \mathbf{H}]. \quad (27)$$

Чтобы найти входящую в коэффициент K сверхтекучую плотность n_s , следует воспользоваться уравнением (1). Для рассматриваемого случая в приближении Томаса-Ферми вещественная часть (1) сводится к равенству

$$E_0[d(\mathbf{R})] + g(\mathbf{R})n_s(\mathbf{R}) - \mu = 0. \quad (28)$$

Уравнение (28) можно разделить на однородную и флуктуирующую части. При этом однородная часть определяет n_{s0} , а флуктуирующая часть дает отклонения сверхтекучей плотности относительно среднего значения. В линейном приближении по флуктуациям

$$\tilde{n}_s(\mathbf{R}) = -\frac{1}{g} \left[\frac{\partial E_0}{\partial d} + n_{s0} \frac{\partial g}{\partial d} \right] \tilde{d}(\mathbf{R}), \quad (29)$$

где $\tilde{d}(\mathbf{R}) = \tilde{z}_1(\mathbf{R}) - \tilde{z}_2(\mathbf{R})$. Из (23) получаем

$$K_{\mathbf{k}} = -\frac{n_{s0}}{M_H} \left[\frac{1}{gn_{s0}} \left(\frac{\partial E_0}{\partial d} + n_{s0} \frac{\partial g}{\partial d} \right) + \frac{1}{M_H} \frac{\partial M_H}{\partial d} \right] \tilde{d}_{\mathbf{k}}. \quad (30)$$

Выражение для $\mathbf{E}_{\text{int} \mathbf{k}}$ непосредственно следует из (21):

$$\mathbf{E}_{\text{int} \mathbf{k}} = \frac{e}{2\varepsilon l_H} F(d) i \mathbf{k} (z_{1\mathbf{k}} + z_{2\mathbf{k}}). \quad (31)$$

После подстановки (30) и (31) в $\langle \mathbf{j}_s \rangle$ интегрирование по углам вектора \mathbf{k} зануляет последнее слагаемое в (27). Оставшиеся слагаемые дают

$$\langle \mathbf{j}_s \rangle = K_0 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{gn_{s0}} \left(\frac{\partial E_0}{\partial d} + n_{s0} \frac{\partial g}{\partial d} \right) + \frac{1}{M_H} \frac{\partial M_H}{\partial d} \right]^2 \langle \tilde{d}^2 \rangle \right\} \mathbf{p}_{s0}. \quad (32)$$

Таким образом, вариации межслоевого расстояния приводят к уменьшению среднего тока. Из выражения (32) следует, что в двухслойной системе с искривленными проводящими слоями эффективная сверхтекучая плотность

$$n_{\text{eff}} = n_{s0} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{gn_{s0}} \left(\frac{\partial E_0}{\partial d} + n_{s0} \frac{\partial g}{\partial d} \right) + \frac{1}{M_H} \frac{\partial M_H}{\partial d} \right]^2 \langle \tilde{d}^2 \rangle \right\}. \quad (33)$$

При $d \ll l_H$ это выражение существенно упрощается:

$$n_{\text{eff}} = n_{s0} \left(1 - \frac{1}{\pi \nu_1^2} \frac{l_H^2 \langle \tilde{d}^2 \rangle}{d^4} \right). \quad (34)$$

Из сравнения выражений (18) и (34) следует, что вариации межслоевого расстояния подавляют сверхтекучую плотность сильнее, чем ионизированные доноры, если

$$\frac{\langle \tilde{d}^2 \rangle}{d^2} > \frac{1}{4} \frac{l_H^2}{Z_d^2}. \quad (35)$$

Если взять типичные значения $Z_d = 300$ нм, $l_H = 30$ нм, $d = 20$ нм, получим $\langle \tilde{d}^2 \rangle^{1/2} > 1$ нм. Таким образом, в интересующем нас случае $d \lesssim l_H$ можно считать, что влияние флуктуаций межслоевого расстояния доминирует над влиянием ионизированных доноров. Основываясь на этой оценке, в следующем разделе будет рассмотрено подавление критической температуры перехода в сверхтекучее состояние, связанное с вариациями \tilde{d} . Заметим, что в рамках развитого подхода одновременный учет влияния на T_c ионизированных доноров и флуктуаций межслоевого расстояния также возможен, хотя он ведет к весьма громоздким выражениям.

4. Влияние флуктуаций межслоевого расстояния на температуру перехода в сверхтекучее состояние

Известно, что в двумерной системе нейтральных бозонов сверхтекучесть разрушается, когда образование вихрей приводит к понижению свободной энергии системы (переход Березинского–Костерлица–Таулеса) [19,20]. Температура перехода T_c находится из уравнения

$$T_c = \frac{\pi \hbar^2}{2k_B} K(T_c). \quad (36)$$

Поскольку e - h -пары при малой плотности ведут себя как газ бозе-частиц, равенство (36) также определяет температуру сверхтекучего перехода в рассматриваемых нами двухслойных системах. Важно заметить, что величина K уменьшается как за счет возбуждения колебаний конденсата, так и вследствие влияния неоднородностей. Вычисление вклада колебаний конденсата не вызывает затруднений (см. подробности, например, в [21]), а влияние неоднородностей $\tilde{d}(\mathbf{R})$ рассмотрено в предыдущем разделе. Объединив оба вклада, имеем

$$K(T) = K_0 - \frac{3\zeta(3)k_B^3 T^3}{2\pi \hbar^2 g^2 n_{s0}} - \frac{1}{2K_0} \left(\frac{\partial K}{\partial d} \right)^2 \langle \tilde{d}^2 \rangle, \quad (37)$$

где $\zeta(3) = 1,202$, а

$$\frac{\partial K}{\partial d} = -K_0 \left[\frac{1}{g n_{s0}} \left(\frac{\partial E_0}{\partial d} + n_{s0} \frac{\partial g}{\partial d} \right) + \frac{1}{M_H} \frac{\partial M_H}{\partial d} \right]. \quad (38)$$

Подстановка $K(T)$ в (36) дает кубическое уравнение для критической температуры:

$$T_c = \frac{3\zeta(3)k_B^3}{4g^2 n_{s0}^2} (T_0^3 - T_c^3). \quad (39)$$

Здесь

$$T_0^3 = \frac{2\pi \hbar^2 g^2 n_{s0}^2}{3\zeta(3)k_B^3} \left[K_0 - \frac{1}{2K_0} \left(\frac{\partial K}{\partial d} \right)^2 \langle \tilde{d}^2 \rangle \right]. \quad (40)$$

Если ввести обозначение

$$T_* = \frac{3\pi \hbar^2}{2k_B} \left[K_0 - \frac{1}{2K_0} \left(\frac{\partial K}{\partial d} \right)^2 \langle \tilde{d}^2 \rangle \right], \quad (41)$$

то критическая температура T_c может быть представлена компактной формулой

$$T_c = T_0 \left\{ \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{T_0}{T_*} \right)^3 \right]^{1/2}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{T_0}{T_*} \right)^3 \right]^{1/2}} \right\}. \quad (42)$$

Полученные результаты удобно анализировать в графической форме. Сначала положим $\tilde{d} = 0$ и найдем зависимость $T_c(H, d)$ для однородной двухслойной системы (рис. 2). На рис. 2 видно, что при заданном значении магнитного поля критическая температура как функция межслоевого расстояния имеет вид кривой с максимумом. Максимальное значение T_c достигается при $d = d_{\text{max}}$, причем зависимость $d_{\text{max}}(H)$

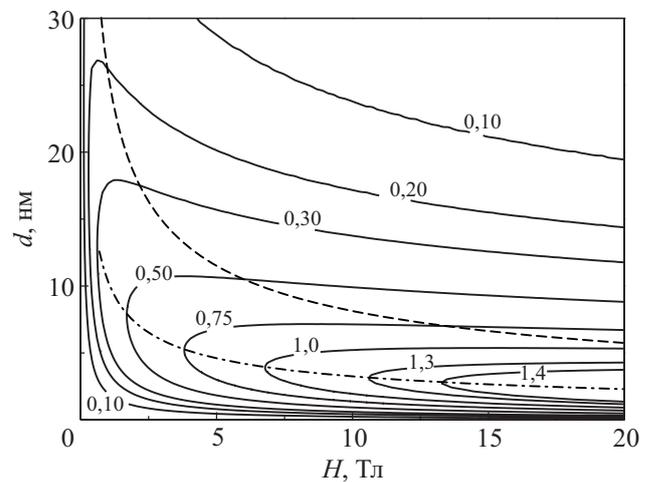


Рис. 2. Температура перехода в сверхтекучее состояние T_c в зависимости от магнитного поля H и межслоевого расстояния d . Температура T_c вычислена для однородной системы при фиксированном факторе заполнения $\nu_1 = 0,1$ и диэлектрической проницаемости $\epsilon = 12,5$. Область применимости полученных результатов расположена левее и ниже штриховой линии, заданной равенством $d = l_H$; штрих-пунктирная линия $d = 0,4l_H$ аппроксимирует положение максимумов зависимости $T_c(d)$ при заданном магнитном поле (см. основной текст).

довольно хорошо аппроксимируется кривой $d_{\max} = 0,4l_H$. В области $d < d_{\max}$ критическая температура быстро уменьшается, что связано с усилением влияния тепловых флуктуаций при уменьшении константы взаимодействия g . Плавное понижение критической температуры в области $d > d_{\max}$ вызвано ростом эффективной массы e - h -пары при увеличении d . Заметим, что этот результат лишь качественно отражает поведение $T_c(d)$, поскольку в области больших d разрушение фазовой когерентности, в первую очередь, связано с квантовыми флуктуациями [11], т.е. с эффектом, который находится за рамками использованного нами приближения самосогласованного поля.

Перейдем к рассмотрению двухслойных систем со случайными вариациями межслоевого расстояния $\tilde{d} \neq 0$. Влияние таких вариаций на температуру перехода в сверхтекучее состояние представлено на рис. 3, где изображены кривые $T_c(d)$ при различных значениях среднеквадратичной флуктуации $\langle \tilde{d}^2 \rangle^{1/2}$. Видно, что случайные неоднородности межслоевого расстояния подавляют критическую температуру. Характер подавления таков, что сохраняется вид кривых $T_c(d)$, однако величина максимума $T_c(d)$ существенно уменьшается, а его положение смещается в область больших значений d . Анализируя рис. 3, конечно, следует иметь в виду, что полученное на основе теории возмущений поведение T_c в области, где поправки к критической температуре оказываются порядка самой T_c , нужно понимать лишь как качественно правильное.

Если рассматривать каждую кривую на рис. 3 как границу между сверхтекучей и нормальной фазами при соответствующем $\langle \tilde{d}^2 \rangle^{1/2}$, то можно сделать вывод, что при заданных значениях температуры и магнитного поля сверхтекучая фаза существует в определенном интервале межслоевых расстояний, $d_{c1} < d < d_{c2}$, причем величина этого интервала уменьшается с ростом

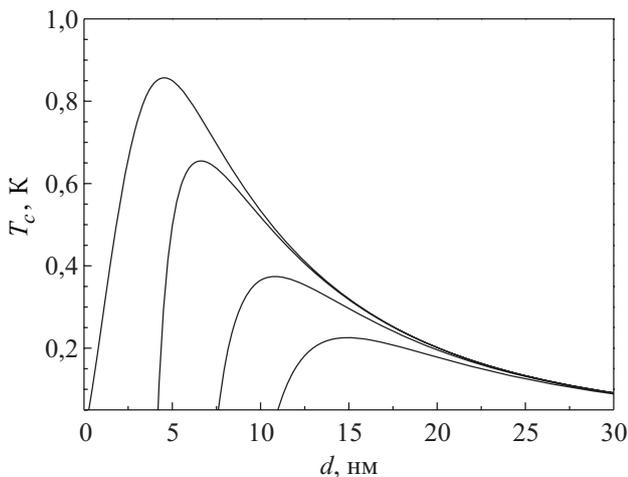


Рис. 3. Влияние вариаций межслоевого расстояния на температуру перехода в сверхтекучее состояние. Кривые $T_c(d)$ вычислены для магнитного поля $H = 5$ Тл и среднеквадратичных отклонений $\langle \tilde{d}^2 \rangle^{1/2} = 0; 0,3; 1$ и 2 нм (сверху вниз).

среднеквадратичной флуктуации $\langle \tilde{d}^2 \rangle^{1/2}$. На рис. 3 видно, что уменьшение области существования сверхтекучести главным образом связано с сильным влиянием неоднородностей на d_{c1} .

5. Заключение

В работе рассмотрено влияние случайных неоднородностей на сверхтекучесть e - h -пар в двухслойных системах. Важным и отчасти неожиданным результатом оказалась сильная чувствительность к неоднородностям систем с малыми межслоевыми расстояниями ($d \ll l_H$). С формальной стороны это выражается в появлении больших множителей $(d/l_H)^2$ в формулах (18) и (34), которые описывают уменьшение эффективной сверхтекучей плотности n_{eff} под действием поля ионизированных доноров и искривленности проводящих слоев соответственно. Физической причиной сильного подавления n_{eff} является слабость взаимодействия e - h -пар при $d \ll l_H$ (см. формулу (17)).

Результаты работы получены в предположении, что фактор заполнения нулевого уровня Ландау $\nu_1 \ll 1$. Наш взгляд это ограничение не является существенным, поскольку согласно равенствам (40) и (41) увеличение плотности пар n_{s0} (т.е. увеличение ν_1) приводит к росту критической температуры T_c , но не меняет представленную на рис. 3 картину. Таким образом, можно ожидать, что полученные результаты качественно правильно отражают поведение $T_c(d)$ в неоднородных системах с факторами заполнения $\nu_1 \approx 1/2$, обычно используемыми в экспериментах по поиску сверхтекучести e - h -пар.

Отметим также, что из проведенного исследования вытекает ряд важных для эксперимента выводов. Во-первых, одним из решающих условий наблюдения сверхтекучести в двухслойных электронно-дырочных системах является высокая степень однородности этих систем. Во-вторых, в однородных системах максимальное значение T_c достигается, если межслоевое расстояние $d \approx 0,4l_H$. Именно в окрестности этого значения следует искать сверхтекучую фазу межъямных экситонов. При этом нужно иметь в виду, что в реальных, т.е. неоднородных, системах область существования сверхтекучей фазы смещается в сторону больших межслоевых расстояний (см. рис. 3).

1. S.M. Girvin and A.H. MacDonald, in: *Perspectives in Quantum Hall Effects*, S. Das Sarma and A. Pinczuk (eds.), Wiley, New York (1997).
2. J.P. Eisenstein and A.H. MacDonald, *Nature* **432**, 691 (2004).
3. L.V. Butov, C.W. Lai, A.L. Ivanov, A.C. Gossard, and D.S. Chemla, *Nature* **417**, 47 (2002); L.V. Butov, A.C. Gossard, and D.S. Chemla, *Nature* **418**, 751 (2002).
4. Ю.Е. Лозовик, В.И. Юдсон, *ЖЭТФ* **71**, 738 (1976).

5. С.И. Шевченко, *ФНТ* **2**, 505 (1976) [*Sov. Low Temp. Phys.* **2**, 251 (1976)].
6. M. Kellogg, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 036801 (2004).
7. E. Tutuc, M. Shayegan, and D.A. Huse, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 036802 (2004).
8. R.D. Wiersma, J.G. S. Lok, S. Kraus, W. Dietsche, K. von Klitzing, D. Schuh, M. Bichler, H.-P. Tranitz, and W. Wegscheider, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 266805 (2004).
9. D.A. Huse, *Phys. Rev.* **B72**, 064514 (2005).
10. A.I. Bezuglyj and S.I. Shevchenko, *Phys. Rev.* **B75**, 075322 (2007).
11. Y.N. Joglekar and A.H. MacDonald, *Phys. Rev.* **B64**, 155315 (2001); Y.N. Joglekar, A.H. MacDonald, *Phys. Rev.* **B65**, 235319 (2002).
12. O.L. Berman, Y.E. Lozovik, D.W. Snoke, and R.D. Coalson, *Phys. Rev.* **B73**, 235352 (2006).
13. F. Dalfovo, S. Giorgini, L.P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **79**, 463 (1999).
14. Л.В. Келдыш, А.Н. Козлов, *ЖЭТФ* **54**, 978 (1968).
15. Kun Yang, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 056802 (2001).
16. А.И. Безуглый, С.И. Шевченко, *ФНТ* **35**, 479 (2009) [*Low Temp. Phys.* **35**, 373 (2009)].
17. Л.П. Горьков, И.Е. Дзялошинский, *ЖЭТФ* **53**, 717 (1967).
18. Ю.Е. Лозовик, А.М. Рувинский, *ЖЭТФ* **112**, 1791 (1997).
19. В.Л. Березинский, *ЖЭТФ* **61**, 1144 (1971).
20. J.M. Kosterlitz and D.J. Thouless, *J. Phys.* **C6**, 1181 (1973).
21. А.И. Безуглый, *ФНТ* **36**, 299 (2010) [*Low Temp. Phys.* **36**, 236 (2010)].

Superfluidity of electron-hole pairs in randomly inhomogeneous bilayer systems

A.I. Bezuglyj and S.I. Shevchenko

Electron-hole ($e-h$) pairs with spatially separated components in bilayer systems make a transition to a superfluid state with decreasing temperature. The article deals with the influence of random inhomogeneities on the superfluid properties of bilayer systems. It is shown that the ionized impurities and the curvature of the conducting layers decrease the superfluid current density of the $e-h$ -pairs. If the interlayer distance is less than or of the order of magnetic length, the fluctuations of the interlayer distance considerably reduce the superfluid transition temperature.

PACS: **73.21.-b** Electron states and collective excitations in multilayers, quantum wells, mesoscopic, and nanoscale systems;
71.35.Ji Excitons in magnetic fields; magnetoexcitons;
73.43.-f Quantum Hall effects.

Keywords: bilayer systems, electron-hole pairs, superfluidity, inhomogeneities.