

## Двумерный вигнеровский кристалл (Обзор)

Ю.П. Монарха, В.Е. Сивоконь

*Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины  
пр. Ленина, 47, г. Харьков, 61103, Украина  
E-mail: monarkha@ilt.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 28 мая 2012 г.

Дан обзор современного состояния экспериментальных и теоретических исследований вигнеровской кристаллизации двумерного электронного газа. Вигнеровский кристалл (ВК) был впервые обнаружен экспериментально в двумерной электронной системе на поверхности жидкого гелия в 1979 году. Этому успеху способствовали исключительная чистота свободной поверхности сверхтекучей жидкости и возможность достаточно точного описания деформационных явлений поляронной природы, сопутствующих кристаллизации электронов. Для наблюдения вигнеровской кристаллизации в полупроводниковых двумерных электронных системах потребовались очень чистые образцы гетероструктур (GaAs/GaAlAs) и сильные магнитные поля, облегчающие локализацию электронов в проводящем слое. В обзоре обсуждаются основные свойства двумерного ВК, присущие обоим вышеупомянутым электронным системам, а также главные достижения в изучении транспортных свойств ВК, обусловленных реакцией окружающей среды на движение электронной решетки.

Дано огляд сучасного стану експериментальних і теоретичних досліджень вігнерівської кристалізації двовимірного електронного газу. Вігнерівський кристал (ВК) було вперше виявлено експериментально у двовимірній електронній системі на поверхні рідкого гелію в 1979 році. Цьому успіху сприяли виняткова чистота вільної поверхні надплинної рідини і можливість досить точного опису деформаційних явищ поляронної природи, супутніх кристалізації електронів. Для спостереження вігнерівської кристалізації у напівпровідникових двовимірних електронних системах потрібні дуже чисті зразки гетероструктур (GaAs/GaAlAs) та сильні магнітні поля, що полегшують локалізацію електронів у провідному шарі. В огляді обговорюються основні властивості двовимірного ВК, властиві обома вищезгаданим електронним системам, а також головні досягнення у вивченні транспортних властивостей ВК, які обумовлені реакцією навколишнього середовища на рух електронної ґратки.

PACS: 73.20.Qt Электронные тела;  
73.40.-c Электронный транспорт в структурах с границами раздела;  
67.90.+z Другие вопросы в области квантовых жидкостей и твердых тел;  
71.45.Lg Системы с волнами зарядовой плотности.

Ключевые слова: вигнеровский кристалл, двумерные электронные системы, поверхностные электроны, жидкий гелий, нелинейный транспорт.

### Содержание

1. Введение .....	1356
2. Основные свойства двумерного вигнеровского кристалла .....	1358
2.1. Параметры .....	1358
2.2. Закон дисперсии коллективных возбуждений .....	1359
2.3. Среднеквадратичные смещения .....	1360
2.4. Фазовая диаграмма .....	1362
2.5. Динамический структурный фактор .....	1363
3. Особенности динамики на деформируемой подложке .....	1365
3.1. Общие соотношения .....	1365

3.2. Линейное приближение для реакции жидкой среды .....	1368
3.3. Связанные фонон-риплонные моды .....	1369
4. Транспортные свойства .....	1372
4.1. Методы измерения .....	1372
4.2. Подвижность над жидким $^3\text{He}$ .....	1373
4.3. Высокочастотная проводимость .....	1374
4.4. Подвижность над жидким $^4\text{He}$ .....	1377
4.5. Циклотронный резонанс .....	1378
5. Нелинейные явления .....	1379
5.1. Основные экспериментальные результаты и модели .....	1379
5.2. Брэгг-черенковское излучение .....	1381
5.3. Нелинейная проводимость на поверхности ферми-жидкости .....	1383
5.4. Эксперименты с двумя возмущающими полями .....	1385
Литература .....	1388

## 1. Введение

Теоретическое предсказание кристаллизации электронного газа низкой плотности было сделано Вигнером еще в 1934 году [1], когда простейшая теория, использующая приближение невзаимодействующих электронов, хорошо описывала основные свойства металлов. Вывод о возможности нового состояния для ферми-газа частиц, взаимодействующих по закону Кулона, следовал из того, что средняя потенциальная энергия взаимодействия  $U_C \propto 1/a$ , приходящаяся на одну частицу, убывает с увеличением среднего расстояния между частицами ( $a$ ) медленнее, чем кинетическая энергия  $K_e \sim \hbar^2/ma^2$ . Поэтому в пределе низкой плотности, когда  $U_C \gg K_e$ , частицам энергетически выгодно локализоваться в узлах решетки, уменьшив тем самым энергию взаимодействия.

Существенная особенность модели Вигнера — предположение о наличии бесструктурного, не поляризующегося положительного фона, на котором должна происходить локализация электронов. Поэтому появление реальной физической системы с подобными свойствами долгое время считалось маловероятным. Следует отметить гипотезу о том, что положительные ионы звезд, принадлежащих к классу белых карликов, могут образовывать вигнеровскую решетку на фоне делокализованных электронов [2]. Значительный интерес к вигнеровскому кристаллу (ВК) как реальному физическому объекту появился с прогрессом в исследовании двумерных электронных систем низкой плотности в полупроводниковых системах и на поверхности жидкого гелия. В 1971 г. Крендл и Вильямс [3] предположили, что невырожденный двумерный газ электронов, образующийся над свободной поверхностью жидкого гелия, при низких температурах должен переходить в кристаллическое состояние. При этом роль положительного фона играет плоский металлический электрод, расположенный в жидкой фазе параллельно поверхности на расстояниях много больших  $a$  и обеспечивающий однородность плотности электронов вдоль грани-

цы жидкость–пар. Чуть позже Чаплик [4] исследовал возможность вигнеровской кристаллизации электронов в инверсионных слоях полупроводников.

Рассматриваемые двумерные электронные системы удобны еще и тем, что позволяют легко менять концентрацию электронов, изменяя потенциал, приложенный к одному из электродов. Например, для поверхностных электронов (ПЭ) в жидком гелии при включенном источнике электронов равновесная поверхностная концентрация  $n_e$  пропорциональна напряженности внешнего прижимающего электрического поля  $E_{\perp}$  и определяется из условия обращения в нуль суммарного электрического поля над заряженной поверхностью:  $E_{\perp} - 2\pi en_e = 0$ . Предельная концентрация ПЭ ограничена сверху условием устойчивости заряженной поверхности жидкого диэлектрика. Так, например, для массивного жидкого гелия предельная концентрация составляет примерно  $2 \cdot 10^9 \text{ см}^{-2}$  [5].

Поскольку эффективная масса ПЭ практически совпадает с массой свободного электрона  $m_e$ , их квантово-механическая кинетическая энергия оказывается существенно меньше не только  $U_C$ , но и температуры ( $K_e \simeq T$ ), а двумерный электронный газ на поверхности жидкого гелия является невырожденным. В таких условиях фазовая диаграмма электронной системы определяется классическим плазменным параметром

$$\Gamma = \frac{U_C}{K_e} = \frac{e^2 \sqrt{\pi n_e}}{T},$$

который в обычных экспериментальных условиях много больше единицы. Экспериментально установлено [6,7], что дальний порядок в системе ПЭ на свободной поверхности жидкого гелия появляется при  $\Gamma = 131 \pm 7$ . Интересно отметить, что примерно при тех же условиях, с учетом экранирования взаимодействия, наблюдаются явления, связанные с пиннингом двумерной электронной решетки на поверхности тонкой гелиевой пленки ( $d \sim 200\text{--}400 \text{ \AA}$ ), покрывающей шероховатую подложку твердого диэлектрика [8].

Несмотря на то, что ПЭ в гелии подчиняются классической статистике, их кристаллизация не сводится исключительно к пространственному упорядочению чисто классических объектов. При кристаллизации двумерного электронного газа происходит локализация электронов. В случае ПЭ в жидком гелии локализация существенно изменяет характер взаимодействия электронов с жидкой подложкой и даже приводит к значительному увеличению их эффективной массы при отклике системы на низкочастотные поля.

Электроны в двумерных полупроводниковых системах при движении вдоль слоя имеют значительно меньшую эффективную массу, чем масса свободного электрона. Например, для кремниевых инверсионных слоев  $m = 0,19m_e$ , а для арсенид-галлиевых систем  $m = 0,07m_e$ . Это обстоятельство примерно на порядок увеличивает квантово-механическую кинетическую энергию электронов. С другой стороны, диэлектрические проницаемости полупроводниковых систем примерно на порядок больше, чем диэлектрическая проницаемость жидкого гелия, что значительно уменьшает энергию кулоновского взаимодействия электронов  $U_C$ . Таким образом, в отсутствие магнитного поля, даже при одинаковых концентрациях, кулоновские корреляции для поверхностных электронов в гелии на два порядка более эффективны, чем в полупроводниковых двумерных электронных системах. Отметим, что типичные концентрации электронов в полупроводниковых системах значительно выше, чем для ПЭ в гелии.

Сказанное выше свидетельствует о том, что в полупроводниковых двумерных электронных системах квантовые корреляции должны доминировать над кулоновскими. Это подтверждается открытием такого замечательного явления, как квантовый эффект Холла [9]. В достаточно чистых образцах кулоновское взаимодействие приводит к дробному квантовому эффекту Холла [10,11]. Исключение составляет предел очень сильного магнитного поля, приложенного перпендикулярно электронному слою [12]. В этом случае локализация электрона с характерным радиусом, равным магнитной длине  $l_B = \sqrt{\hbar c / eB} < a$ , не сопровождается увеличением его квантово-механической кинетической энергии, а вырождение по собственным значениям  $z$ -проекции момента импульса снимается межэлектронным взаимодействием. Первые свидетельства вигнеровского перехода, индуцированного сильным магнитным полем, в структуре GaAs/GaAlAs были получены при обнаружении бесщелевой магнитоплазменной моды [13]. Затем вигнеровская кристаллизация регистрировалась по появлению порога для зависимости сопротивления  $R_{xx}$  от напряженности ведущего электрического поля [14–16]. Наблюдаемые при этом эффекты оказались подобными тем, что имели место при пиннинге ВК над гелиевой пленкой [8]. Непроводящая фаза в структуре GaAs/GaAlAs оказалась воз-

вратной: пороговые явления пропадали, когда степень заполнения уровня Ландау  $\nu \rightarrow 1/5$  из-за дробного квантового эффекта Холла.

Очень интересными представляются исследования так называемых «пиннинговых мод» областей электронного кристалла, осциллирующих согласованно в поле неупорядоченного потенциала. Они проявляются в виде максимумов  $\text{Re} \sigma_{xx}(\omega)$  как функции частоты [17]. Исчезновение этих максимумов, вызванное нагревом системы, интерпретируется как плавление ВК. Формально, в пределе  $l_B / a \rightarrow 0$ , такой электронный кристалл должен быть подобен классическому ВК, реализующемуся на поверхности жидкого гелия. Однако исследования показывают [18], что температура  $T_m$ , при которой исчезают максимумы, в основном зависит от отношения  $l_B / a$ , или, эквивалентно, от степени заполнения уровня Ландау  $\nu$ , что находится в противоречии с теорией плавления классического ВК. С другой стороны, оказывается, что  $T_m$  возрастает с увеличением потенциала беспорядка, что также является необычным даже для квантовых систем. Поэтому  $T_m$ , полученная при исследовании пиннингового резонанса, может отличаться от температуры плавления идеального вигнеровского кристалла.

Электронная система на поверхности жидкого гелия отличается исключительной чистотой и большой подвижностью носителей заряда. Естественными «дефектами» такой системы являются атомы гелиевого газа над свободной поверхностью, плотность которого экспоненциально убывает при понижении температуры, и квантованные капиллярные волны (рипланы), представляющие собой своеобразные двумерные фононы. В области существования вигнеровского кристалла (обычно  $T < 0,8$  К) плотностью газообразного гелия можно пренебречь, рассматривая взаимодействие электронов только с возбуждениями свободной поверхности жидкого гелия. Поэтому над поверхностью жидкого гелия (не пленки) нет пиннинга ВК на дефектах и «пиннинговых мод», наблюдаемых в полупроводниковых системах. Вместе с тем локализация электронов приводит к необычному поляронному эффекту, проявляющемуся в появлении лунки на поверхности гелия под каждым узлом электронного кристалла [19]. Ее размер определяется среднеквадратичным смещением электронов в узлах кристаллической решетки, а глубина обычно не превышает 1 Å. Несмотря на микроскопическую глубину одноэлектронной лунки, ее эффективная (присоединенная) масса обычно на два порядка превосходит массу свободного электрона.

Таким образом, в двумерной электронной системе над жидким гелием появляется своеобразное поляронное зацепление ВК с поверхностью жидкости, или, иными словами, связывание электронной и луночной подрешеток. Это зацепление наиболее ярко проявляется при движении ВК на подложке ферми-жидкости

${}^3\text{He}$ , вязкость которой быстро увеличивается с понижением температуры:  $\eta \propto 1/T^2$ . В этом случае зацепление электронной и луночной подрешеток приводит к резкому падению низкочастотной проводимости кристалла. В быстропеременных ведущих полях луночная решетка практически неподвижна, а потенциал взаимодействия электронов с этой решеткой приводит к существованию оптических мод колебаний ВК с пороговой частотой  $\omega_f$ , которые в некотором смысле являются заменой пиннингговым модам полупроводниковых систем.

Наличие «мягкой» подложки сверхтекучего гелия с хорошо определенными поверхностными возбуждениями, характеризующимися капиллярным законом дисперсии  $\omega_{r,q} \propto q^{3/2}$ , сыграло определяющую роль в обнаружении вигнеровской кристаллизации ПЭ и доказательстве упорядочения электронов в двумерную треугольную решетку [6]. При медленном движении ВК вдоль поверхности гелия с некоторой частотой  $\omega$  линейный отклик жидкой среды имеет резонансно большие слагаемые при  $\omega \rightarrow \omega_{r,g}$ , где  $\mathbf{g}$  — векторы обратной решетки электронного кристалла. Для низкочастотных фононов ВК с волновым числом  $k \ll g$  резонансный отклик среды приводит к появлению связанных фонон-риплонных мод [20], которые проявляются в виде резонансов проводимости ВК. Очень важно, что большая часть наблюдаемых резонансных частот близка к последовательности частот  $\omega_{r,g}$ , задаваемых набором значений  $g$  для двумерной треугольной решетки.

На поверхности сверхтекучего гелия одноэлектронные лунки имеют высокую подвижность из-за аномально малого затухания капиллярных волн. Поэтому в переменных ведущих полях двумерный ВК поверхностных электронов в жидком  ${}^4\text{He}$  довольно подвижный объект. При увеличении скорости движения проводимость электронного кристалла легко переходит в нелинейный режим, обычно при наличии небольшого магнитного поля, ориентированного перпендикулярно поверхности [21,22]. При этом электронный транспорт может сопровождаться такими интересными явлениями, как когерентное брэгг-черенковское рассеяние капиллярных волн [23], развязывание электронной и луночной подрешеток [24] или осциллирующая зависимость электронной проводимости от амплитуды тока [25].

На свободной поверхности ферми-жидкости  ${}^3\text{He}$  при сверхнизких температурах основной вклад в торможение луночного кристалла возникает из-за рассеяния объемных квазичастиц на движущемся рельефе поверхности. Поэтому связка электронного и луночного кристаллов оказалась удобным инструментом исследования объемных возбуждений сверхтекучего гелия [26,27]. Сопротивление электронного кристалла резко меняет температурную зависимость при переходе из

гидродинамического режима в баллистический, а также при сверхтекучем переходе ( $T_c \simeq 0,93$  мК). Вариации сопротивления в коротком интервале температур могут составлять несколько порядков. Исследуя подвижность ВК, оказалось возможным определить текстуру сверхтекучего  ${}^3\text{He}$ -А у свободной поверхности при наличии магнитного поля [27].

Свойства двумерного вигнеровского кристалла уже освещались в ряде обзорных статей и монографий (см., например, [28,29]). Вместе с тем экспериментальные и теоретические исследования ВК на поверхности жидкого гелия, так же как и исследования кристаллизации электронов в полупроводниковых системах, индуцированной сильным магнитным полем, быстро развиваются. Например, к настоящему времени сложилось понимание нелинейного транспорта вигнеровского кристалла на поверхности жидкого гелия, который долгое время оставался интригующей загадкой. Появились и новые интересные экспериментальные работы, в частности исследования реакции кристалла на одновременное воздействие ведущих полей разной интенсивности и частоты, а также в ячейках различной геометрии. Данные исследования позволили по-новому взглянуть на динамическое развязывание электронной и луночной решеток. Эти новые вопросы, так же как и основные достижения в изучении вигнеровского кристалла, полученные в ушедшем веке, отражены в данном обзоре. Ввиду ограниченности объема, обзор не является исчерпывающим. Обсуждаемые здесь явления отчасти ограничены и личными наклонностями авторов.

## 2. Основные свойства двумерного вигнеровского кристалла

### 2.1. Параметры

Характерные энергии электронной системы часто записывают с помощью безразмерного параметра  $r_s = (a_B \sqrt{\pi n_e})^{-1}$ , где  $a_B = \hbar^2 / m_e e^2$  — боровский радиус. Так, например, для двумерной электронной системы средняя энергия межэлектронного взаимодействия

$$U_C = e^2 \sqrt{\pi n_e} / \epsilon = \frac{2}{\epsilon r_s} [\text{Ридб}], \quad (1)$$

где  $1 \text{ Ридб} = m_e e^4 / 2\hbar^2 \simeq 13,6$  эВ,  $\epsilon$  — диэлектрическая постоянная среды. Средняя квантово-механическая кинетическая энергия электронов с законом дисперсии  $\epsilon_k = \hbar^2 k^2 / 2m$  может быть записана в виде

$$K_e = \frac{\hbar^2 \pi n_e}{2m} = \frac{m_e}{m} \frac{1}{r_s^2} [\text{Ридб}]. \quad (2)$$

Для заряженных частиц с эффективной массой  $m \simeq m_e$  в средах с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon \sim 1$  потенциальная энергия существенно превосходит их кинетическую энергию при  $r_s \gg 1$ . При этом харак-

терный плазменный параметр  $\Gamma = U_C/K_e = 2r_s$ , что означает физическую эквивалентность параметров  $\Gamma$  и  $r_s$ . Очевидно, что в полупроводниковых структурах ( $\epsilon \sim 10$  и  $m_e/m \sim 10$ ) параметр  $r_s$  должен быть еще больше, чтобы выполнялось основное условие кристаллизации электронов.

При конечной температуре в пределе низкой плотности энергия Ферми  $\epsilon_F$  становится много меньше  $T$  и двумерная электронная система становится невырожденной. В этом случае средняя кинетическая энергия электрона равна  $T$ , а плазменный параметр

$$\Gamma = \frac{e^2 \sqrt{\pi n_e}}{\epsilon T} = \frac{2}{\epsilon r_s T} \frac{m_e e^4}{2\hbar^2} \quad (3)$$

имеет зависимость от  $r_s$ , противоположную той, что получена для вырожденной системы. Отсюда следует, что в общем случае параметры  $r_s$  и  $\Gamma$  не являются физически эквивалентными. Данный предельный случай соответствует двумерной электронной системе, реализуемой на поверхности жидкого гелия, где  $m \simeq m_e$ , а диэлектрические постоянные среды и жидкой подложки близки к единице ( $\epsilon \simeq 1,056$  для жидкого  $^4\text{He}$  и  $\epsilon \simeq 1,042$  для жидкого  $^3\text{He}$ ).

Что касается структуры электронной решетки, расчеты показывают, что энергетически более выгодна двумерная гексагональная решетка [30]. Квадратная решетка, имеющая близкую энергию взаимодействия, оказывается неустойчивой по отношению к поперечным смещениям для некоторых направлений волнового вектора  $\mathbf{k}$  [31].

### 2.2. Закон дисперсии коллективных возбуждений

Закон дисперсии фоновых мод двумерного ВК  $\Omega_p(\mathbf{k})$  определяется фурье-образом матрицы силовых постоянных  $D_{\mathbf{k}}^{\alpha\beta}$ :

$$2\Omega_p^2(\mathbf{k}) = D_{\mathbf{k}}^{xx} + D_{\mathbf{k}}^{yy} \pm \sqrt{(D_{\mathbf{k}}^{xx} - D_{\mathbf{k}}^{yy})^2 + 4(D_{\mathbf{k}}^{xy})^2}, \quad (4)$$

где знак плюс перед корнем соответствует продольным фононам ( $p=l$ ), а знак минус — поперечным ( $p=t$ ). Для системы частиц, взаимодействующих по закону Кулона, матрица силовых постоянных медленно убывает с ростом расстояния, поэтому закон дисперсии фононов ВК для произвольных  $ka$  вычислялся с использованием метода Эвальда [30] (здесь  $a$  — постоянная решетки; для треугольной решетки она связана с концентрацией электронов соотношением  $n_e = 2/\sqrt{3}a^2$ ). Результаты этих расчетов представлены на рис. 1, где введена характерная частота  $\omega_0 = (8e^2/m_e a^3)^{1/2}$ .

В длинноволновом пределе ( $ka \ll 1$ ) динамическая матрица ВК может быть представлена в виде, содержащем законы дисперсии продольных и поперечных фононов:

$$D_{\mathbf{k}}^{\alpha\beta} = \Omega_l^2 \delta_{\alpha\beta} + (\Omega_l^2 - \Omega_t^2) \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}. \quad (5)$$

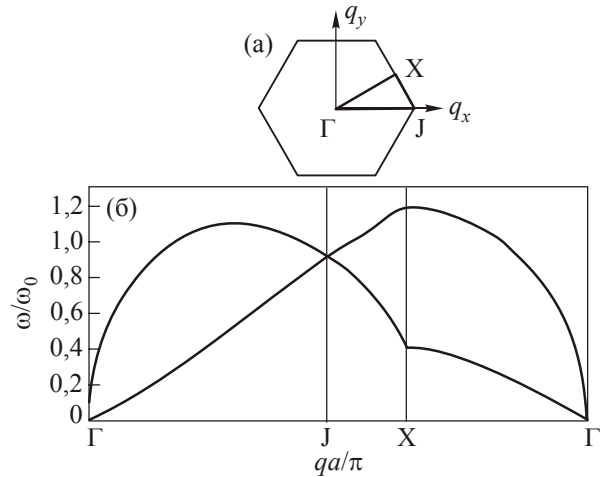


Рис. 1. Первая зона Бриллюэна двумерной гексагональной решетки (а) с неприводимым элементом, отмеченным жирной линией, и закон дисперсии фононов для волновых векторов вдоль неприводимого элемента (б) [30].

Такое представление оказывается удобным при описании динамики кристалла. В этом пределе, с учетом экранирования межэлектронного взаимодействия металлическими электродами, закон дисперсии продольных фононов  $\Omega_l$  определяется как [28]

$$\Omega_l^2(k) = \frac{2\pi n_e e^2 k}{m} \frac{2}{(\text{cth } kh + \text{cth } kd)}, \quad (6)$$

где  $h+d$  — расстояние между электродами плоского конденсатора, внутри которого помещается свободная поверхность жидкого гелия.

Формула (6) совпадает со спектром двумерных плазмонов. Зависимость  $\Omega_l(k) \propto \sqrt{k}$ , следующая из этой формулы при  $kh \gg 1$  и  $kd \gg 1$ , не может быть получена в рамках обычной теории упругости, поскольку она является следствием дальнедействующего характера сил взаимодействия. Здесь и ниже полагаем, что диэлектрическая постоянная равна единице или включена в определение заряда  $e \rightarrow e/\sqrt{\epsilon}$ . В тех же условиях поперечные фононы имеют обычный для теории упругости линейный закон дисперсии [30]

$$\Omega_t(k) = c_t k, \quad c_t = \left( 0,138 \frac{e^2 \sqrt{\pi n_e}}{m} \right)^{1/2}, \quad (7)$$

поскольку поперечные смещения электронов обычно не приводят к макроскопическим вариациям плотности заряда. Для скорости поперечного звука экранирование кулоновского взаимодействия металлическим электродом существенно сказывается лишь при  $d \lesssim a/2$  (здесь  $d$  — расстояние до электрода) [32]. Такая ситуация реализуется для ПЭ на гелиевой пленке, покрывающей металлическую подложку [33]. При этом смягчение фоновых мод, вызванное экранированием взаимодействия, приводит к возрастанию амплитуды

нулевых колебаний и создает принципиальную возможность реализации квантового режима плавления ВК.

При наличии постоянного магнитного поля, направленного перпендикулярно электронному слою, спектр фононов двумерного ВК  $[\Omega_{\pm}(k)]$  легко находится из уравнений движения для заряженных частиц с динамической матрицей  $D_{\mathbf{k}}^{\alpha\beta}$  [4]:

$$\Omega_{\pm}^2(k) = (\Omega_l^2 + \Omega_t^2 + \omega_c^2) / 2 \pm \sqrt{\left[ (\Omega_l^2 + \Omega_t^2 + \omega_c^2) / 2 \right]^2 - \Omega_l^2 \Omega_t^2}. \quad (8)$$

Здесь  $\omega_c = eB / mc$  — циклотронная частота. Частота моды  $\Omega_+$ , соответствующей знаку плюс перед корнем, растет с увеличением напряженности магнитного поля. Частота второй гибридной моды  $\Omega_-$ , наоборот, уменьшается. В пределе  $\omega_c \gg \Omega_l$  формула (8) описывает сильно разнесенные по частоте моды:  $\Omega_+ \simeq \omega_c \gg \Omega_- \simeq \Omega_l \Omega_t / \omega_c$ . Отметим, что обнаружение бесщелевой гибридной магнитофононной моды  $\Omega_-(k)$  в двумерном электронном газе структуры GaAs/GaAlAs служило весомым аргументом в пользу регистрации вигнеровской кристаллизации, индуцированной магнитным полем [13].

Следует отметить, что нахождение фононного спектра ВК в магнитном поле оказалось значительно более легким делом, чем определение зависимости среднеквадратичных смещений  $\langle u^2 \rangle$  от  $B$ , даже качественной. Например, в ряде исследований полагалось, что наличие моды  $\Omega_- \propto 1/B$  должно приводить к разрушению ВК магнитным полем. В действительности ситуация оказалась скорее противоположной. Поведение ВК в магнитном поле представляет особый интерес в связи с исследованиями непроводящих фаз двумерной электронной системы в полупроводниковых гетероструктурах при малой степени заполнения уровня Ландау  $\nu = 2\pi l_B^2 n_e$  [14–16,34].

### 2.3. Среднеквадратичные смещения

При наличии магнитного поля квантование колебаний ВК несколько усложняется по сравнению со стандартной процедурой, установленной для обычных кристаллов. Дело в том, что гамильтониан электронной решетки содержит недиагональные слагаемые  $\omega_c Q_{l,\mathbf{k}} \mathcal{P}_{t,-\mathbf{k}}$  (здесь  $Q_{p,\mathbf{k}}$  и  $\mathcal{P}_{p,-\mathbf{k}}$  — нормальные координаты и импульсы продольных и поперечных мод), которые, даже в длинноволновом пределе, приводят к связыванию продольных и поперечных колебаний. Очевидно, что такой гамильтониан не может быть приведен к нормальному виду с помощью обычного канонического преобразования, затрагивающего только координаты  $Q_{p,\mathbf{k}}$ . Обобщение процедуры диагонализации гамильтониана ВК в магнитном поле найдено в работе [35]. Элегантный метод, позволяющий обойти указанную выше трудность [36], основывается на ка-

ноническом преобразовании, которое сводится к взаимному переименованию координат и импульсов поперечных мод. Этот класс преобразований обычно приводят в качестве примера эквивалентности координат и импульсов в гамильтоновом формализме. После применения этого преобразования гамильтониан диагонализуется стандартным образом.

Окончательное выражение для оператора смещений электрона из узла  $\mathbf{R}_l$  может быть представлено в следующем виде [36]:

$$\mathbf{u}_l = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{p=+,-} \sqrt{\frac{\hbar}{2N_e m \Omega_p}} \left( \mathbf{E}_{p,\mathbf{k}} a_{p,\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}_l} + \text{h.c.} \right), \quad (9)$$

где  $a_{p,\mathbf{k}}^\dagger$  и  $a_{p,\mathbf{k}}$  — операторы рождения и уничтожения для мод с  $p = +, -$ , а  $\mathbf{E}_{p,\mathbf{k}}$  — новые векторы поляризации, которые при наличии магнитного поля уже не являются ортонормированными:

$$|\mathbf{E}_{p,\mathbf{k}}|^2 = \frac{|2\Omega_p^2 - \Omega_l^2 - \Omega_t^2|}{\Omega_+^2 - \Omega_-^2} \neq 1, \quad (10)$$

$$\mathbf{E}_{+,\mathbf{k}} \mathbf{E}_{-,\mathbf{k}}^* = \omega_c \frac{\Omega_l - \Omega_t}{\Omega_+^2 - \Omega_-^2} \neq 0. \quad (11)$$

Новое условие нормировки сводится к сумме  $|\mathbf{E}_{+,\mathbf{k}}|^2 + |\mathbf{E}_{-,\mathbf{k}}|^2 = 2$ .

Используя (9), легко найти выражение для среднеквадратичных смещений электронов [36]:

$$\langle u^2 \rangle = \frac{\hbar}{2mN_e} \sum_{p=+,-} \sum_{\mathbf{k}} \frac{|\mathbf{E}_{p,\mathbf{k}}|^2}{\Omega_p} \text{cth} \left( \frac{\hbar \Omega_p}{2T} \right). \quad (12)$$

В пределе  $B \rightarrow 0$  это выражение становится эквивалентным общепринятой формуле, так как  $|\mathbf{E}_{p,\mathbf{k}}|^2 \rightarrow 1$ . В противоположном пределе сильных магнитных полей имеем  $|\mathbf{E}_{-,\mathbf{k}}|^2 \simeq (\Omega_l^2 + \Omega_t^2) / \omega_c^2 \ll 1$  и  $|\mathbf{E}_{+,\mathbf{k}}|^2 \simeq 2$ . Поэтому фактор  $|\mathbf{E}_{-,\mathbf{k}}|^2$  полностью компенсирует эффект смягчения частоты  $\Omega_-$ , вызванный магнитным полем. В общем случае, с использованием (10), выражение (12) может быть приведено к виду

$$\langle u^2 \rangle = \frac{\hbar}{2mN_e} \sum_{p=+,-} \sum_{\mathbf{k}} \frac{2\Omega_p^2 - \Omega_l^2 - \Omega_t^2}{\Omega_p^4 - \Omega_l^2 \Omega_t^2} \Omega_p \text{cth} \left( \frac{\hbar \Omega_p}{2T} \right), \quad (13)$$

доказывающему эквивалентность (12) и полученной ранее формулы [35,37].

Рассмотрим сначала ситуацию без магнитного поля. В этом случае, полагая (6) и (7) справедливыми вплоть до  $k_m = \sqrt{4\pi n_e}$  (дебаевское приближение) и считая систему ограниченной ( $k \geq k_0 = 2\pi / L$ , где  $L$  — характерный размер системы в плоскости), можно получить следующее выражение:

$$\langle u^2 \rangle = \langle u_0^2 \rangle + \frac{T}{2\pi m n_e c_t^2} \ln \left[ \frac{1 - \exp(-\hbar c_t k_m / T)}{1 - \exp(-\hbar c_t k_0 / T)} \right]. \quad (14)$$

Здесь  $\langle u_0^2 \rangle$  представляет собой вклад нулевых колебаний продольных и поперечных мод

$$\frac{\langle u_0^2 \rangle}{a^2} = \frac{\hbar}{m c_l k_m a^2} \left[ 1 + 2\sqrt{0,138/3} \right] = \frac{A}{\sqrt{r_s}}, \quad (15)$$

а фактор  $A \simeq 0,463$ . Ввиду  $\Omega_l(k) \gg \Omega_l(k)$  при  $ka \ll 1$  во втором слагаемом формулы (14), характеризующем тепловые колебания, оставлен только вклад поперечной моды.

Из-за логарифмической расходимости  $\langle u^2 \rangle - \langle u_0^2 \rangle \propto T \ln(T/\hbar c_l k_0)$  в пределе  $L \rightarrow \infty$  представляется весьма сомнительным использование критерия плавления Линдемана в его обычной форме,  $\langle u^2 \rangle/a^2 = \delta_0^2$  (здесь  $\delta_0$  — численный параметр, примерно равный 0,131). Считается хорошо установленным, что в классическом пределе вигнеровский переход в двумерной электронной системе описывается теорией Костерлица–Таулеса [38]. В этой теории температура плавления не зависит от размера системы и определяется из условия обращения в нуль свободной энергии отдельной дислокации двумерного кристалла. Вместе с тем и анализ, основанный на среднеквадратичных смещениях, тоже оказывается интересным, особенно для квантового предела. Прежде всего отметим, что при характерных размерах экспериментальной ячейки  $L \sim 1$  см и обычных гелиевых температурах легко реализуется предел  $\langle u^2 \rangle \ll a^2$ .

Чтобы правильно включить тепловые колебания в критерий плавления Линдемана для двумерной решетки, вместо  $\langle u^2 \rangle$  можно использовать выражение [39]

$$\left\langle |\mathbf{u}(\mathbf{R} + \mathbf{a}) - \mathbf{u}(\mathbf{R})|^2 \right\rangle, \quad (16)$$

описывающее корреляцию смещений для ближайших соседей. В таком определении обрезается вклад длинноволновых фононов, для которых  $\mathbf{u}(\mathbf{R} + \mathbf{a}) \simeq \mathbf{u}(\mathbf{R})$ . В то же время для нескоррелированного движения ближайших соседей из-за коротковолновых фононов выражение (16) сводится к  $2\langle u^2 \rangle$ . Поэтому параметр Линдемана  $\delta'_0$  для модифицированного критерия плавления, использующего (16), отличается от классического параметра  $\delta_0$ . Численные расчеты методом Монте-Карло дают значение  $\delta'_0 \simeq 0,3$  [40]. Если интересоваться только вкладом коротковолновых фононов, то приведенная оценка для параметра  $\delta'_0$  приводит к значению  $\delta_0 = \delta'_0/\sqrt{2} \simeq 0,212$  для обычного параметра Линдемана. Этим можно воспользоваться при определении критических значений параметров  $r_s$  и  $\Gamma$  в квантовом режиме плавления.

Рассмотрим случай  $T = 0$ . Прежде всего отметим, что, согласно (15), критическое значение параметра  $r_s$  сильно зависит от параметра Линдемана:  $r_s \propto \delta_0^{-4}$ . При этом для классического эмпирического значения  $\delta_0 = 0,131$  находим  $r_s \simeq 728$ . Таковую явно завышенную оценку можно было бы списать на неточность дебаев-

ского приближения. Однако для электронов на поверхности жидкого  $^3\text{He}$  при сверхнизких температурах ( $T \sim 1$  мК) дебаевское приближение для  $\langle u_0^2 \rangle$  прекрасно описывает динамические свойства ВК, обусловленные движением луночной решетки [26,41]. Поэтому в двумерном случае параметр  $\delta_0$  должен быть существенно больше классического эмпирического значения. Это подтверждает приведенный выше анализ модифицированного критерия Линдемана. Если предположить, что для квантового режима плавления можно использовать значение параметра  $\delta'_0$ , найденное для тепловых колебаний, то  $\delta_0$  следует положить равным 0,212, что приводит к совершенно другим оценкам для критических значений параметров:  $r_s \simeq 106$  и  $\Gamma \simeq 212$ . Новые критические значения для  $r_s$  и  $\Gamma$  уже значительно ближе к экспериментальной оценке  $\Gamma = 131$ , найденной для классического ВК, и к теоретической оценке, полученной с использованием дислокационного критерия плавления.

Для системы ПЭ на поверхности гелиевой пленки, покрывающей металлическую подложку толщиной  $d \sim 300$  Å, экранирование кулоновского взаимодействия приводит к тому, что величина  $\langle u_0^2 \rangle/a^2$  как функция параметра  $y = 2d/a$  достигает минимума (0,128<sup>2</sup>) при  $y \simeq 0,6$  и возрастает при дальнейшем уменьшении этого параметра [32]. Если принять параметр Линдемана равным 0,212, то, согласно приведенной оценке, имеется достаточно большая область значений  $y < 0,6$ , где возможно существование электронного кристалла с дипольным взаимодействием. При малых концентрациях такой кристалл плавится вследствие возрастания амплитуды нулевых колебаний [33].

Ранние утверждения о плавлении ВК магнитным полем связывались со смягчением моды  $\Omega_-$ . В пределе сильных полей, когда  $\omega_c \gg \Omega_l$  и  $\hbar\Omega_- \ll 2T$ , точное выражение (13) дает

$$\langle u_-^2 \rangle \simeq \frac{T}{mN_e} \sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{1}{\Omega_{l,\mathbf{k}}^2} + \frac{1}{\Omega_{t,\mathbf{k}}^2} \right), \quad (17)$$

что совпадает с вкладом тепловых продольных и поперечных колебаний при  $B = 0$  и  $2T \gg \hbar\Omega_l(k_m)$ . В то же время вклад нулевых колебаний пропорционален

$$\frac{|\mathbf{E}_{-\mathbf{k}}|^2}{\Omega_{-\mathbf{k}}} \rightarrow \frac{\Omega_{l,\mathbf{k}}}{\Omega_{t,\mathbf{k}}\omega_c} \propto \frac{1}{B} \quad (18)$$

и исчезает в пределе  $B \rightarrow \infty$ .

В дебаевском приближении асимптотики для вклада нулевых колебаний обеих мод выглядят следующим образом:

$$\langle u_+^2 \rangle = l_B^2, \quad \langle u_-^2 \rangle \simeq 1,94l_B^2, \quad (19)$$

где  $l_B = \sqrt{\hbar c/eB}$ . Из (19) следует, что амплитуда нулевых колебаний электронов в сильном магнитном по-

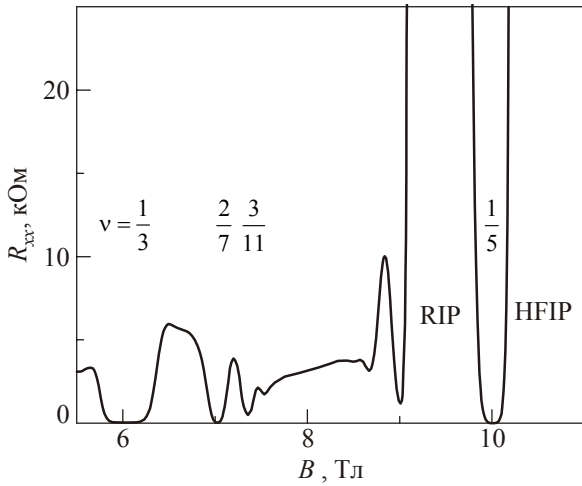


Рис. 2. Сопротивление двумерного электронного газа в структуре GaAs/AlGaAs как функция магнитного поля при  $T = 38$  мК и  $n_e = 4,8 \cdot 10^{10}$  см<sup>-2</sup> [34].

ле не зависит от их массы. Этот вывод очень важен для полупроводниковых систем, где эффективная масса носителей много меньше массы свободного электрона. В то же время смягчения фоновых мод  $\Omega_l$  и  $\Omega_t$ , вызванные большим значением  $\epsilon$ , взаимокompенсируют, как это видно, например, из соотношения (18).

Оба вклада,  $\langle u_+^2 \rangle$  и  $\langle u_-^2 \rangle$ , одинаковым образом убывают с ростом магнитного поля. Если их использовать в критерии Линдемана, то для критического значения параметра  $r_s$  и критической концентрации можно получить следующие соотношения:

$$r_s^{(c)} \simeq 0,9 \frac{l_B}{a_B \delta_0}, \quad n_e^{(c)} \simeq 0,393 \frac{\delta_0^2}{l_B^2} \propto B. \quad (20)$$

Таким образом, сильное магнитное поле сдвигает кривую плавления в область больших концентраций электронов. Например, для  $\delta_0 = 0,212$  и  $B = 15$  Тл имеем оценку  $n_e^{(c)} \simeq 4 \cdot 10^{10}$  см<sup>-2</sup>, что неплохо согласуется с экспериментальными данными, полученными для двумерной электронной системы в гетероструктуре GaAs/AlGaAs [34] и приведенными на рис. 2. В области сильных магнитных полей ( $B > 10$  Тл) наблюдается непроводящая фаза HFIP ( $\nu < 1/5$ ), которую связывают с образованием ВК. При  $\nu > 1/5$  имеется также небольшая область возвратной непроводящей фазы RIP.

#### 2.4. Фазовая диаграмма

Как отмечалось выше, в классическом пределе плавление двумерного вигнеровского кристалла хорошо описывается теорией Костерлица–Таулесса [38,42]. В этой теории существенную роль играет понятие топологического дальнего порядка (напомним, что для двумерных систем нет обычного трансляционного дальнего порядка), а фазовый переход связан со спонтанным появлением дефектов, разрушающих этот дальний по-

рядок. Для вигнеровского кристалла таким дефектом является дислокация.

Очень важно, что в двумерном случае дислокация не имеет дислокационной линии и поэтому ее упругая энергия  $U_d$  не пропорциональна размеру системы  $L$ . В выражении для свободной энергии дислокации  $F = U_d - TS_d$  упругая энергия и энтропийное слагаемое  $TS_d$  имеют одинаковую зависимость от размера системы: они пропорциональны  $\ln(L/a)$ . Условие  $F = 0$  определяет температуру плавления  $T_m$ , выше которой в системе спонтанно появляются дислокации, разрушающие топологический дальний порядок. Ниже температуры плавления из-за наличия логарифмически большого параметра  $\ln(L/a)$  одиночные дислокации маловероятны, а фононы сосуществуют с разряженным газом пар дислокаций, имеющих противоположные векторы Бюргерса. Можно также говорить, что плавление кристалла обусловлено распадом (диссоциацией) дислокационных пар.

Используя формулы теории упругости для  $U_d$ , коэффициент Пуассона ВК можно положить равным единице ввиду  $c_l \gg c_t$ . В этом случае критическая температура  $T_m$  связана с поперечной скоростью звука соотношением [42]

$$T_m = \frac{n_e a^2 m c_t^2}{4\pi}. \quad (21)$$

Для  $c_t$  из (7) формула (21) приводит к критическому значению параметра  $\Gamma \simeq 78,7$ , что несколько меньше экспериментальной оценки  $\Gamma = 131 \pm 7$ , полученной для электронов на свободной поверхности жидкого гелия [6,7].

Дальнейшее уточнение теоретической оценки для параметра  $\Gamma$  связано с учетом ангармонизмов, приводящих к температурным поправкам к упругому модулю [43]

$$c_t^2(T) \simeq c_t^2(0)(1 - 30,8/\Gamma), \quad (22)$$

а также с учетом конечной плотности дислокационных пар. Этот подход позволяет значительно приблизить теоретическую оценку ( $\Gamma \simeq 128$ ) к экспериментальным данным.

Следует отметить, что тепловое смягчение поперечной моды, даваемое формулой (22), подтверждается прямыми измерениями для электронов на поверхности жидкого гелия [44,45]. На рис. 3 показаны экспериментальные данные для поперечного упругого модуля  $\mu_t = m n_e c_t^2$  как функции температуры. При подходе к критической температуре  $T \rightarrow T_m$  линейное убывание  $\mu_t(T)$  сменяется резким падением.

Близость оценок для критического значения параметра  $\Gamma$ , полученных в классическом ( $\Gamma \simeq 131$ ) и квантовом ( $\Gamma \simeq 200$  для  $\delta_0 = 0,212$ ) пределах, позволяет построить универсальную фазовую диаграмму ВК, предположив, следуя [46], что плазменный параметр



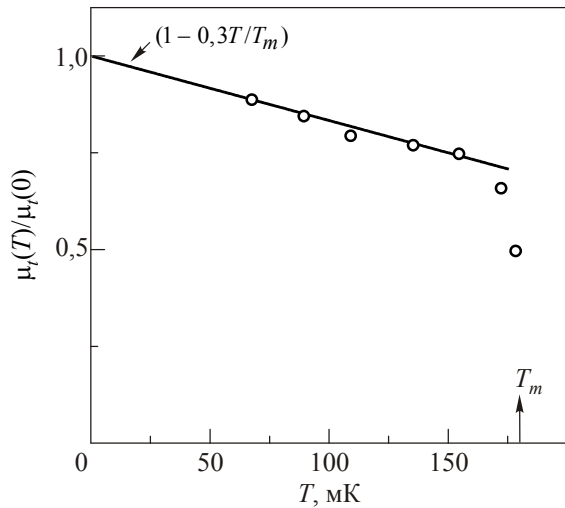


Рис. 3. Поперечный упругий модуль двумерного ВК как функция температуры [45].

постоянен вдоль кривой плавления  $[\Gamma(n_e, T) = \text{const}]$  во всей области параметров. В этом случае можно получить параметрическое уравнение для кривой плавления, используя выражение для кинетической энергии невзаимодействующих электронов. Результаты этих расчетов представлены на рис. 4.

Здесь максимально возможные значения электронной концентрации и температуры электронного кристалла обозначены как

$$n_c = \frac{4}{\pi} (a_B \Gamma_c)^{-2}, \quad T_c \approx 0,39 \frac{2me^4}{\hbar^2 (\Gamma_c)^2} \quad (23)$$

соответственно. Примечательно, что зависимость  $n_e(T)$ , описывающая кривую плавления, достигает обеих низкотемпературных границ с нулевой производной.

Несмотря на некоторую искусственность предположения о постоянстве критического значения параметра  $\Gamma$  вдоль кривой плавления, фазовая диаграмма Платцмана и Фукуямы является хорошей иллюстраци-

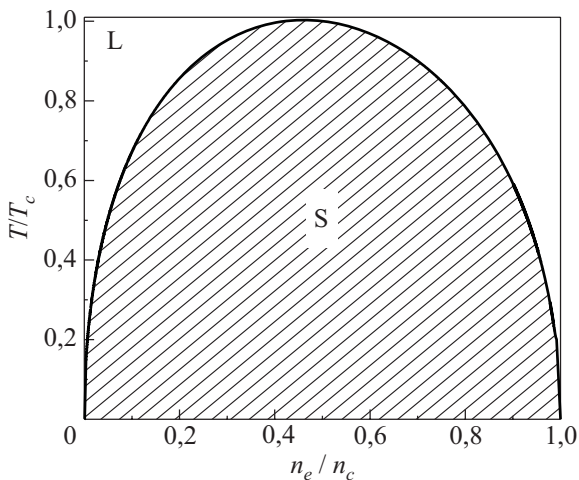


Рис. 4. Фазовая диаграмма двумерного вигнеровского кристалла [46].

ей общей ситуации с вигнеровской кристаллизацией двумерного электронного газа.

Развитие теории дислокационного плавления для двумерных систем показало, что переход кристалл–жидкость должен происходить в два этапа [47]. Сначала при достаточно высокой температуре происходит диссоциация дислокационных пар и переход системы в фазу «жидкого кристалла» со степенным убыванием ориентационного порядка. Переход в изотропную жидкую фазу проходит при более высокой температуре из-за распаривания дисклинаций.

Двумерный вигнеровский кристалл имеет простейшую гексагональную решетку. Для пространственно разделенных заряженных слоев возможно образование двухслойного вигнеровского кристалла, в котором возникают разнообразные структурные фазовые переходы [48]. Структура решетки двухслойного электронного кристалла может измениться при варьировании параметра  $d/a$  (здесь  $d$  — расстояние между слоями), относительной концентрации  $c = N_1/(N_1 + N_2)$  и температуры. Для полупроводниковых двухслойных электронных систем фазовая диаграмма рассчитывалась в работе [49].

### 2.5. Динамический структурный фактор

В теории твердого тела динамический структурный фактор (ДСФ) обычно вводится при описании сечения рассеяния медленных нейтронов и рентгеновских лучей в борновском приближении [50]. Неудивительно, что данная корреляционная функция оказывается полезной и при описании транспортных свойств вигнеровского кристалла на поверхности жидкого гелия, взаимодействующего с капиллярными волнами [29,51]. В связи с этим кратко рассмотрим основные приближения, используемые для описания этой корреляционной функции.

Формально ДСФ  $S(\mathbf{q}, \omega)$  определяется как фурье-образ корреляционной функции плотность–плотность  $N_e^{-1} \langle n_{\mathbf{q}}(t) n_{-\mathbf{q}}(0) \rangle$ . Здесь  $n_{\mathbf{q}} = \sum_{\mathbf{r}_1} \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}_1)$  — оператор плотности,  $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{R}_1 + \mathbf{u}_1(t)$ , а  $\mathbf{u}_1$  — смещение электрона из узла  $\mathbf{R}_1$ . Для  $\mathbf{u}_1$  из (9) стандартные преобразования приводят к выражению

$$S(\mathbf{q}, \omega) = \sum_{\mathbf{l}} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}_1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i\omega t - h_{\mathbf{q}}(\mathbf{l}, t)\} dt, \quad (24)$$

где

$$h_{\mathbf{q}}(\mathbf{l}, t) = 2q^2 \sum_p [w_p(0,0) - w_p(\mathbf{l}, t)], \quad (25)$$

$$w_p = \frac{\hbar}{4N_e m} \sum_{\mathbf{k}} \frac{|E_{p,\mathbf{k}}^{(q)}|^2}{\Omega_{p,\mathbf{k}}} \left[ n_{p,\mathbf{k}} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{R}_1 - \Omega_{p,\mathbf{k}} t)} + (n_{p,\mathbf{k}} + 1) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{R}_1 - \Omega_{p,\mathbf{k}} t)} \right], \quad (26)$$

$n_{p,k}$  — функция распределения фононов ВК, а  $E_{p,k}^{(q)}$  означает проекцию вектора поляризации на направление  $\mathbf{q}$ . Для упрощения вычислений обычно используется изотропное дебаевское приближение  $c_l = c_t$ . В этом случае  $\sum_p |E_{p,k}^{(q)}|^2 = 1$ . Для двумерного ВК нужно учесть, что существует только одна акустическая мода и в длинноволновом пределе  $\Omega_{l,k} \ll \Omega_{l,k}$ . Поэтому вкладом тепловых продольных фононов в ДСФ во многих случаях можно пренебречь. В большинстве случаев  $|E_{p,k}^{(q)}|^2$  можно заменить усредненным по углам значением  $|\mathbf{E}_{p,k}|^2/2$ . При наличии магнитного поля нужно учитывать, что векторы поляризации не являются ортонормированными.

В отсутствие магнитного поля для высоких температур ( $2q^2 w_p \gg 1$ ) основной вклад в интеграл (24) дают малые времена, где разность  $w_p(0,0) - w_p(\mathbf{l},t)$  мала. В этом случае разложение  $w_p(\mathbf{l},t)$  в ряд по  $\Omega_{p,k}t$  до квадратичных слагаемых и использование некогерентного приближения ( $\mathbf{l} = 0$ ) дает

$$S(q, \omega) = \hbar \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon_q K_e}} \exp \left[ -\frac{(\varepsilon_q - \hbar\omega)^2}{4\varepsilon_q K_e} \right], \quad (27)$$

где  $\varepsilon_q = \hbar^2 q^2 / 2m$ ,

$$K_e = (2N_e)^{-1} \sum_{p,k} \hbar \Omega_{p,k} (n_{p,k} + 1/2) \quad (28)$$

представляет собой среднюю кинетическую энергию электронов. Выражение (27) совпадает с ДСФ для невырожденного двумерного электронного газа, если положить  $K_e = T$ . Как функция частоты оно имеет широкий максимум при  $\hbar\omega$  равном энергии возбуждений  $\varepsilon_q$  в электронном газе.

Низкотемпературное приближение ( $2q^2 w_p \ll 1$ ) для обычных кристаллов подразумевает разложение в ряд по параметру  $2q^2 \sum_p w_p(\mathbf{l},t)$ . Это разложение дает упругое слагаемое, однофононное слагаемое, двухфононное слагаемое и т.д.:  $S = S^{(\text{elas})} + S^{(\text{lph})} + S^{(\text{2ph})} + \dots$ . Первые два члена этого ряда имеют вид

$$S^{(\text{elas})} = 2\pi e^{-2W_q} \delta(\omega) N_e \sum_{\mathbf{g}} \delta_{\mathbf{q},\mathbf{g}}, \quad (29)$$

$$S^{(\text{lph})} = \frac{\pi \hbar}{m_e} e^{-2W_q} \sum_{p,k} \frac{|\mathbf{q} \mathbf{E}_{p,k}|^2}{\Omega_{p,k}} \left\{ n_{p,k} \delta(\omega + \Omega_{p,k}) \times \right. \\ \left. \times \sum_{\mathbf{g}} \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{k},\mathbf{g}} + (n_{p,k} + 1) \delta(\omega - \Omega_{p,k}) \sum_{\mathbf{g}} \delta_{\mathbf{q}-\mathbf{k},\mathbf{g}} \right\}, \quad (30)$$

где  $W_q = q^2 \langle u^2 \rangle / 4$ . В двумерном случае возникает проблема корректного определения фактора Дебая–Валлера  $\exp(-2W_q)$ , так как среднеквадратичные смещения для бесконечной системы логарифмически расходятся. Формально можно ограничиться утверждением, что реальная система имеет конечные размеры и при достаточно низких температурах  $2W_q$  становится

малым. С другой стороны, следуя [52], заметим, что разность  $w_p(0,0) - w_p(\mathbf{l},t)$  не расходится для бесконечной системы и при низких температурах является малой. При анализе вклада длинноволновых тепловых возбуждений следует учесть, что многофононные поправки к низкотемпературному приближению  $S \simeq S^{(\text{elas})} + S^{(\text{lph})}$  могут рассматриваться в некогерентном приближении ( $\mathbf{l} = 0$ ) [50], что приводит к компенсации больших тепловых слагаемых в  $W_q$ . Поэтому для двумерной системы в факторе Дебая–Валлера, входящего в (29) и (30), можно заменить  $W_q(T) \rightarrow W_q(0)$ . Это приближение будет использовано ниже при анализе высокочастотной проводимости ВК на поверхности жидкого гелия.

При наличии сильного магнитного поля, ориентированного перпендикулярно электронному слою, для ДСФ вигнеровского кристалла оказывается возможным необычное приближение, которое является некоторой комбинацией низкотемпературного и высокотемпературного приближений. Дело в том, что в сильных магнитных полях одна из фононных частот  $\Omega_{-,k}$  становится очень низкой, а другая  $\Omega_{+,k}$  ограничена снизу большой циклотронной частотой. В этом пределе при вычислении вклада низкочастотной моды можно применить разложение по параметру  $\Omega_{-,k}t$ , а вклад высокочастотной моды найти, используя разложение по параметру  $2q^2 w_+(0,t)$ . При этом никаких расходимостей, связанных с бесконечным размером системы, не возникает, а выражение для ДСФ можно записать в виде [29,53]

$$S(q, \omega) = \frac{2\sqrt{\pi} \hbar}{\Gamma_C} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_q^{n-1/2}}{n!} \times \\ \times \exp \left[ -x_q - \frac{\hbar^2 (\omega - n\omega_c - x_q \Gamma_C^2 / 4T\hbar)^2}{x_q \Gamma_C^2} \right], \quad (31)$$

где  $x_q = q^2 l_B^2 / 2$  и

$$\Gamma_C^2 = \frac{\hbar\omega_c}{N_e} \sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{E}_{-,k}|^2 \hbar \Omega_{-,k} (2n_{-,k} + 1). \quad (32)$$

В сильном магнитном поле  $\Gamma_C \ll \hbar\omega_c$  и  $S(q, \omega)$  имеет резкие максимумы при  $\hbar\omega$  равном возможным энергиям возбуждения двумерного электронного газа в магнитном поле  $n\hbar\omega_c$ .

Подобное приближение для резонансного слагаемого ( $n = 1$ ) использовалось в работе [54] при описании циклотронного резонанса ВК. Следует отметить, что формула (31) содержит все кванты циклотронного движения ( $n\omega_c$ ), что очень важно для правильного описания ширины циклотронного резонанса. В пределе  $\Gamma_C \rightarrow 0$  формула (31) переходит в ДСФ идеального невырожденного двумерного электронного газа в магнитном поле. Таким образом, роль кулоновского взаимодействия здесь сводится к уширению и небольшому смещению положения пиков  $S(q, \omega)$ .

Интересно отметить, что выражение (31) имеет тот же вид, что и ДСФ двумерного электронного газа, находящегося в перпендикулярном магнитном поле и в продольном случайном квазиоднородном электрическом поле  $E_f$ , имеющем нормальное распределение с дисперсией  $(E_f^{(0)})^2/2$ , где  $E_f^{(0)} = \Gamma_C / \sqrt{2} e l_B$  [55]. В теории двумерной электронной жидкости [56] таким случайным электрическим полем, действующим на каждый отдельный электрон, является поле остальных электронов, которое появляется из-за флуктуационного смещения центра циклотронной орбиты из положения локального равновесия. Для сильного магнитного поля  $l_B \ll a$  электрическое поле флуктуационного происхождения  $E_f$  можно приближенно считать квазиоднородным. Это обстоятельство позволяет использовать (31) для описания влияния кулоновских эффектов на квантовый перенос в двумерном электронном газе на поверхности жидкого гелия [55] и магнитоосцилляций проводимости, индуцированных микроволновым излучением [57–59].

С другой стороны, похожесть корреляционных функций плотность–плотность у ВК и кулоновской жидкости в сильном магнитном поле делает форму линии циклотронного резонанса и магнитопроводимость не чувствительными к вигнеровскому переходу. Этот вывод подтверждается экспериментальными исследованиями циклотронного резонанса ПЭ в гелии, проведенными в широком интервале температур и концентраций электронов [60,61].

### 3. Особенности динамики на деформируемой подложке

#### 3.1. Общие соотношения

Прежде всего следует отметить, что все деформационные явления на поверхности жидкого гелия, индуцированные вигнеровским переходом, имеют очень малый энергетический масштаб и не могут повлиять на положение самого перехода. Даже при значительных прижимающих полях, порядка 700 В/см, характерная энергия взаимодействия электрона с лункой  $eE_{\perp} \xi$  (здесь  $\xi$  — смещение поверхности под электроном) по абсолютной величине не превышает 7 мК. Поэтому луночная решетка [19], возникающая на поверхности гелия в результате локализации электронов и неоднородности распределения заряда, представляет собой явление, сопутствующее вигнеровской кристаллизации. В этом смысле ситуация с кристаллизацией электронов на поверхности жидкого гелия существенно отличается от положения дел в полупроводниковых системах, где, как уже отмечалось, температура плавления оказывается зависящей от потенциала пиннинга [18].

Малость энергии взаимодействия не означает слабость реакции жидкой среды на движение электронной решетки. При медленном перемещении решетки (низ-

кочастотных колебаниях) деформационный рельеф сопровождает электроны и переносит огромную массу ( $M_d \sim 100m_e$ ), а в случае жидкого  $^3\text{He}$  является и основной причиной релаксации электронного импульса. Поэтому иногда говорят, что электрон-риплонная система находится в режиме сильной связи, несмотря на малость энергии взаимодействия в масштабе характерных электронных энергий.

Важная особенность рассматриваемой системы — наличие резонансной реакции поверхности жидкого гелия на возмущения электронной решетки внешними переменными электрическими полями. Например, еще до обнаружения ВК на поверхности гелия было отмечено теоретически, что при наличии переменного поля определенной частоты, перпендикулярного электронному слою, на поверхности гелия могут резонансно возбуждаться стоячие капиллярные волны [19,62]. Соответствующие резонансные частоты совпадают с частотами капиллярных волн, волновые векторы которых равны векторам обратной электронной решетки g:

$$\omega_{r,n} = \sqrt{\frac{\alpha}{\rho}} g_n^{3/2}, \quad g_n = \frac{2^{3/2} \pi}{3^{1/4}} \sqrt{n_e p_n}. \quad (33)$$

Здесь  $\alpha$  и  $\rho$  — коэффициент поверхностного натяжения и плотность жидкого гелия соответственно, абсолютные величины векторов  $\mathbf{g}$  нумеруются целочисленным индексом  $n = 1, 2, 3, \dots$  в порядке возрастания, а набор чисел  $p_n$  задается структурой решетки. Например, для треугольной решетки  $p_n = i^2 + j^2 + ij$  ( $i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) и имеем набор чисел:  $p_n = 1, 3, 4, 7, 9, \dots$ . Обнаружение последовательности резонансных частот  $\omega_{r,n}$  может не только свидетельствовать о наличии упорядочения в электронной системе, но и нести информацию о структуре электронной решетки.

С экспериментальной точки зрения, значительно более эффективным оказалось возбуждение электрон-риплонных резонансов при воздействии на ВК не поперечным, а продольным переменным электрическим полем [6]. При этом практически все давление, создаваемое на поверхности гелия локализованными электронами, находящимися в постоянном прижимающем поле  $E_{\perp}$  и поле поляризационных сил, вовлекается в осциллирующую по времени часть задачи. В эксперименте продольное электрическое поле, как правило, оказывается неоднородным, и резонансный отклик поверхности жидкого гелия приводит к связыванию длинноволновых фононов ВК с риплонами, имеющими волновой вектор, близкий к  $\mathbf{g}$  [20].

Взаимодействие поверхностных возбуждений жидкого гелия с электронами, колеблющимися в узлах решетки  $\mathbf{R}_1$ , описывается гамильтонианом вида

$$H_{\text{int}} = \sum_{\mathbf{q}} U_{\mathbf{q}} \xi_{\mathbf{q}} \sum_1 \exp(i\mathbf{q}\mathbf{R}_1 + i\mathbf{q}\mathbf{u}_1), \quad (34)$$

где  $\xi_{\mathbf{q}} = Q_{\mathbf{q}}(b_{\mathbf{q}} + b_{\mathbf{q}}^{\dagger})$  — фурье-компоненты оператора смещения поверхности  $\xi(\mathbf{r})$ ;  $b_{\mathbf{q}}$  и  $b_{\mathbf{q}}^{\dagger}$  — операторы рождения и уничтожения риплонов;  $Q_{\mathbf{q}}^2 = \hbar q / 2\rho\omega_{r,q}$ ;  $\mathbf{u}_{\mathbf{l}}$  — оператор смещения электронов в узлах решетки. Для удобства здесь и ниже площадь поверхности гелия полагается равной единице. В теории электрон-риплонного взаимодействия [29] поляризационная часть функции  $U_{\mathbf{q}} = e(E_{\perp} + E_{\mathbf{q}})$  определяется как

$$eE_{\mathbf{q}} = \frac{\Lambda q^2}{2} w_{11}(q^2/4\gamma_1^2), \quad \Lambda = \frac{e^2(\epsilon - 1)}{4(\epsilon - 1)}, \quad (35)$$

где  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость жидкого гелия, параметр  $\gamma_1$  характеризует скорость убывания электронной волновой функции в газовой фазе [ $f_1(z) \propto z \exp(-\gamma_1 z)$ ; обычно  $\gamma_1 \sim 10^6$  см<sup>-1</sup>]. В общем случае функция  $w_{11}(x)$  имеет довольно громоздкий вид

$$w_{11}(y) = -\frac{1}{1-y} + \frac{1}{(1-y)^{3/2}} \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1-y}}{\sqrt{y}} \right),$$

но при низких температурах достаточно хорошо работает асимптотика  $w_{11}(x) \simeq 0,5 \ln(4/x) - 1$ .

При описании связанных фонон-риплонных мод используется самосогласованный подход [63,64], который в некотором смысле подобен поляронной задаче. Локализация электронов, индуцированная вигнеровским переходом, приводит к деформации среды, в данном случае к образованию под электронами поверхностных лунок. В свою очередь лунки на поверхности гелия оказывают влияние на амплитуду тепловых колебаний электронов, взаимодействующих с деформационным рельефом. Здесь речь идет о высокочастотных колебаниях электронов в узлах решетки, для которых одноэлектронные лунки можно считать неподвижными. На низких частотах  $\omega \ll \omega_{r,1}$  поверхностные лунки перемещаются синхронно с электронами, перенося огромную массу и существенно понижая частоту соответствующих фононов. Можно сказать, что электрон-риплонное взаимодействие приводит к расщеплению фононного спектра ВК на быстрые (оптические) и медленные (акустические) моды.

Взаимодействие электрона с неподвижной лункой приводит к появлению характерной пороговой (оптической) частоты  $\omega_f \gg \omega_{r,1}$  в спектре колебаний кристалла, где  $\omega_{r,1}$  из (33). Частоты оптических мод ВК определяются простым соотношением  $\Omega_{f,p}^2(k) = \omega_f^2 + \Omega_p^2(k)$ . Для такого спектра легко находится характерный размер электронного пятна  $\sqrt{\langle u_f^2 \rangle}$ , формирующего равновесную электронную лунку:

$$\langle u_f^2 \rangle \simeq \langle u_0^2 \rangle + u_T^2 \ln \left( \frac{1}{1 - \exp(-\hbar\omega_f / T)} \right), \quad (36)$$

где  $u_T^2 = T / (2\pi m_e n_e c^2)$ . Таким образом, выражение для среднеквадратичных смещений, зависящих от  $\omega_f$ , и выражение для пороговой частоты

$$\omega_f^2 = \frac{n_e}{2m\alpha} \sum_{\mathbf{g}} U_{\mathbf{g}}^2 e^{-g^2 \langle u_f^2 \rangle / 2} \quad (37)$$

как функции  $\langle u_f^2 \rangle$  образуют систему самосогласованных уравнений. В общем случае решение находится численно.

Следует отметить, что точное решение уравнений (36) и (37), представленное на рис. 5 (сплошная линия), во всей области температур оказывается удивительно близким к простой аналитической формуле (штриховая линия) [64]

$$\langle u_f^2 \rangle \simeq \frac{\langle u_0^2 \rangle + u_T^2 \ln(T/\sqrt{3}\hbar V_1)}{1 - g_1^2 u_T^2 / 4} \equiv \langle u_{f,a}^2 \rangle \quad (38)$$

(здесь  $V_n = (n_s / m\alpha)^{1/2} U_{g_n}$ ), полученной в предположении, что основной вклад в  $\langle u_f^2 \rangle$  дают слагаемые с  $|\mathbf{g}| = g_1$ . Отметим, что при использовании этой упрощенной аналитической формулы вдали от температуры плавления в выражениях типа (37) в соответствующих суммах по  $\mathbf{g}$  необходимо учитывать достаточно большое число слагаемых с  $|\mathbf{g}| > g_1$ .

Анализ реакции жидкой среды на движение электронной решетки вдоль свободной поверхности удобно начать с рассмотрения простейшего случая, когда ВК движется как целое во внешнем однородном электрическом поле низкой частоты ( $\omega \ll \omega_f$ ). При этом смещения электронов в узлах решетки  $\mathbf{u}_{\mathbf{l}}$  приобретают однородную добавку  $\mathbf{u}(t)$ . В частном случае постоянной скорости ВК  $\mathbf{v}$  имеем  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}t$ . Условие  $\omega \ll \omega_f$  позволяет провести усреднение уравнений движения по высокочастотным модам, в результате которого в формулах рядом с  $U_{\mathbf{q}}$  появляется дополнительный фактор  $e^{-W_{\mathbf{q}}}$ , где  $W_{\mathbf{q}} = q^2 \langle u_f^2 \rangle / 4$ . В связи с этим удобно ввести обозначение  $\tilde{U}_{\mathbf{q}} = U_{\mathbf{q}} \exp(-W_{\mathbf{q}})$ . Однородность низкочастотных смещений ВК приводит к тому, что в уравнении для поверхностного рельефа, сопутствующего заданному движению электронной решетки,

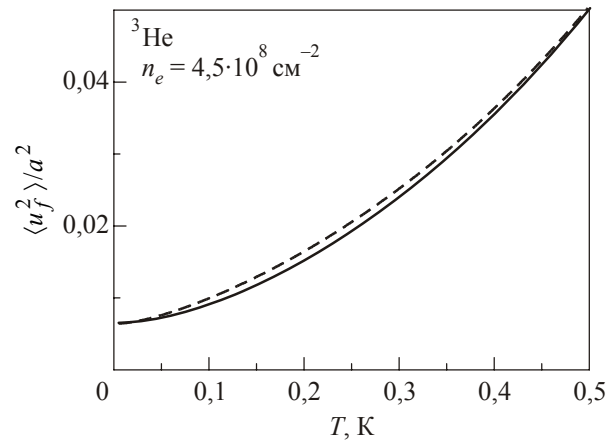


Рис. 5. Среднеквадратичные смещения в оптической моде ВК в зависимости от  $T$ : точное решение самосогласованных уравнений (сплошная линия) и аналитическая формула (38) (штриховая линия).

$$\ddot{\xi}_{\mathbf{g}} + 2\gamma_{\mathbf{g}}\dot{\xi}_{\mathbf{g}} + \omega_{r,g}^2 \xi_{\mathbf{g}} = -\frac{\tilde{U}_{\mathbf{g}} n_e \mathbf{g}}{\rho} e^{-i\mathbf{g}\mathbf{u}(t)}, \quad (39)$$

остаются только волновые векторы, совпадающие с векторами обратной решетки. Здесь  $\gamma_{\mathbf{g}}$  представляет собой затухание капиллярных волн. Правая часть (39) описывает давление электронной решетки на поверхность жидкого гелия.

При анализе связанных фонон-риплонных мод следует различать случаи жидких  $^4\text{He}$  и  $^3\text{He}$ . При температурах, меньших температуры плавления ВК, жидкий  $^4\text{He}$  уже является сверхтекучим и затухание капиллярных волн аномально мало [65]:

$$\gamma_q = \frac{\pi^2}{60\rho} \hbar \left( \frac{T}{\hbar s_1} \right)^4 q, \quad (40)$$

где  $s_1$  — скорость первого звука. Например, для  $n_e = 10^9 \text{ см}^{-2}$  и  $T = 0,5 \text{ К}$  оценка дает  $\gamma_1/\omega_{r,1} \sim 10^{-4}$ . Поэтому для жидкого  $^4\text{He}$  затуханием риплонов во многих случаях можно пренебречь. Для жидкого  $^3\text{He}$  при низких температурах ситуация может оказаться противоположной ( $\gamma_1/\omega_{r,1} > 1$ ), потому что вязкость ферми-жидкости возрастает с понижением температуры,  $\eta \propto T^{-2}$ . В гидродинамическом режиме для очень вязкой жидкости коэффициент затухания  $\gamma_q$  можно положить равным  $\eta q^2/\rho$ .

При сверхнизких температурах  $T \lesssim 0,02 \text{ К}$  длина свободного пробега квазичастиц в объеме жидкого  $^3\text{He}$  становится значительно больше, чем длина капиллярных волн с  $q \sim g$ . В этом пределе коэффициент затухания определяется характером отражения объемных квазичастиц на искривленной поверхности ферми-жидкости. Для зеркального отражения он оказывается очень большим [41]:

$$\gamma_q = \frac{\hbar(k_F)^4}{8\pi^2\rho} 2f_F(\Delta/T)q, \quad (41)$$

где  $\hbar k_F$  — импульс квазичастиц жидкого  $^3\text{He}$  на поверхности Ферми,  $\Delta$  — энергетическая щель, появляющаяся при сверхтекучем переходе ( $T \leq 0,93 \text{ мК}$ ), а  $f_F(x) = (e^x + 1)^{-1}$ . Интересно отметить, что формулы для затухания капиллярных волн (40) и (41), полученные для больших длин свободного пробега элементарных возбуждений жидких  $^4\text{He}$  и  $^3\text{He}$ , имеют одинаковую зависимость от волнового вектора  $\gamma_q \propto q$ , что существенно отличается от результата гидродинамического описания.

Уравнение (39) имеет точное решение

$$\xi_{\mathbf{g}}(t) = -\frac{n_e \mathbf{g} \tilde{U}_{\mathbf{g}}}{\rho \hat{\omega}_{\mathbf{g}}} \int_{-\infty}^t \sin[\hat{\omega}_{\mathbf{g}}(t-t')] \times \exp[-i\mathbf{g}\mathbf{u}(t') + \gamma_{\mathbf{g}}(t'-t)] dt' \quad (42)$$

(здесь  $\hat{\omega}_{\mathbf{g}} = \sqrt{\omega_{r,g}^2 - \gamma_{\mathbf{g}}^2}$ ), которое оказывается очень полезным и при анализе нелинейных явлений в прово-

димости ВК. Пределы интегрирования выбраны таким образом, чтобы при  $\mathbf{u} = 0$  получалось решение статической задачи

$$\xi_0(\mathbf{r}) = -\sum_{\mathbf{g}} \frac{n_e \mathbf{g}}{\rho \omega_{r,g}^2} U_{\mathbf{g}} e^{-q^2 \langle u_f^2 \rangle / 4} \cos(\mathbf{g}\mathbf{r}). \quad (43)$$

Функция  $\xi_0(\mathbf{r})$  описывает рельеф поверхности жидкого гелия под электронной решеткой, который определяется двумя характерными длинами:  $\sqrt{\langle u_f^2 \rangle}$  и постоянной решетки  $a$ . При этом глубина отдельной лунки обычно не превышает одного ангстрема.

Характерный рельеф поверхности жидкого гелия под электронной решеткой показан на рис. 6. Расчеты [41] проводились для случая жидкого  $^3\text{He}$  при температурах ( $T = 1,34 \text{ мК}$ ), значительно меньших температуры плавления кристалла электронов с  $n_e = 1,5 \cdot 10^8 \text{ см}^{-2}$ . Для неподвижного ВК лунки на свободной поверхности жидкого гелия (сплошная линия) симметричны относительно положений максимумов электронной плотности (пунктир). При больших скоростях движения электронной решетки вдоль поверхности (нелинейный режим) лунки деформируются и становятся несимметричными (штриховая линия), чтобы средняя сила, действующая на электроны со стороны рельефа поверхности, была конечной и соответствовала силе трения, действующей на луночную решетку со стороны объемных квазичастиц жидкости.

Формула (42) позволяет в общем виде найти силу, действующую на электронный кристалл со стороны луночной решетки:  $\mathbf{F}_D = -\sum_e \partial H_{\text{int}} / \partial \mathbf{r}_e$ . После усреднения по высокочастотным модам и подстановки решения (42) получаем [25]

$$\frac{\mathbf{F}_D}{N_e} = \sum_{\mathbf{g}} \mathbf{g} \frac{n_e \mathbf{g} \tilde{U}_{\mathbf{g}}^2}{\rho \hat{\omega}_{\mathbf{g}}} \int_{-\infty}^t \sin[\hat{\omega}_{\mathbf{g}}(t-t')] \times e^{\gamma_{\mathbf{g}}(t'-t)} \sin\{\mathbf{g}[\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t')]\} dt'. \quad (44)$$

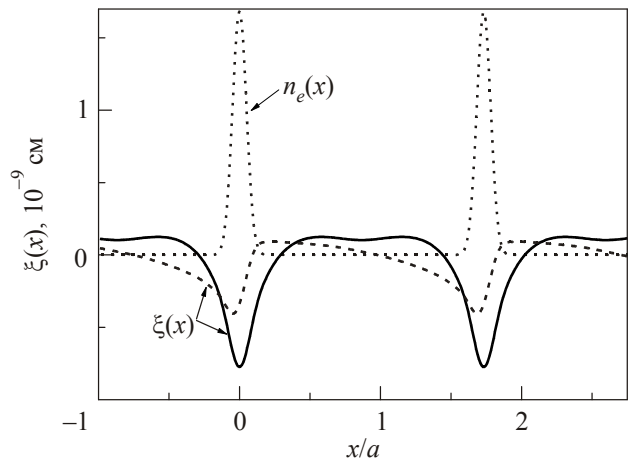


Рис. 6. Рельеф поверхности жидкого  $^3\text{He}$ , индуцированный неподвижным ВК (сплошная линия) и кристаллом, движущимся с большой скоростью (штриховая линия) [41].

Данное выражение представляет собой силу реакции жидкой среды на движение электронной решетки с заданной зависимостью  $\mathbf{u}(t)$ . Очевидно, что для неподвижного ВК [ $\mathbf{u}(t) = 0$ ] эта сила обращается в нуль. Очень важно, что формула (44) описывает реакцию жидкой подложки даже в нелинейном режиме, когда параметр  $\mathbf{g} \cdot \mathbf{u}(t)$  не является малым.

### 3.2. Линейное приближение для реакции жидкой среды

В предположении  $\mathbf{u}(t) \propto e^{-i\omega t}$  линейный отклик для реакции жидкой подложки (44) получается разложением подынтегральной функции в ряд по параметру  $\mathbf{g}[\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t')]$ :

$$\mathbf{F}_D(\mathbf{u}) \simeq N_e m_e \omega^2 \lambda(\omega) \mathbf{u}. \quad (45)$$

Здесь

$$\lambda(\omega) = \sum_n C_n \frac{\omega_{r,n}^2}{\omega^2} \left[ \frac{\omega_{r,n}^2}{\omega_{r,n}^2 - \omega^2 - i2\gamma_n \omega} - 1 \right], \quad (46)$$

$$C_n = \frac{1}{2} U_{g_n}^2 e^{-g_n^2 \langle u_f^2 \rangle / 2} \frac{n_e}{m_e \alpha \omega_{r,n}^2} \sum_{|\mathbf{g}|=g_n} 1, \quad (47)$$

$\gamma_n$  — затухание капиллярных волн при  $q = g_n$ . В обычных экспериментальных условиях [6] безразмерные коэффициенты  $C_n$  велики при малых значениях индекса  $n$  (например,  $C_1 \sim 10^2$ ). Вблизи температуры плавления они быстро убывают с ростом номера  $n$ , а вдали от точки перехода  $T \ll T_m$  в суммах по  $n$  приходится учитывать большое число слагаемых.

Формулы (45) и (46) позволяют легко проследить за изменением реакции жидкой подложки при варьировании частоты сигнала  $\omega$ . Рассмотрим реальную часть функции отклика

$$\text{Re } \lambda(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \omega_{r,n}^2 \frac{(\omega_{r,n}^2 - \omega^2) - 4\gamma_n^2}{(\omega_{r,n}^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma_n^2 \omega^2}. \quad (48)$$

Прежде всего следует отметить, что эта низкочастотная формула формально дает правильное поведение для силы, действующей на электроны, даже в пределе высоких частот  $\omega \gg \omega_{r,1}$ ,

$$\text{Re } \frac{\mathbf{F}_D(\mathbf{u})}{N_e} \simeq -m_e \omega_f^2 \mathbf{u}. \quad (49)$$

Очевидно, что это выражение описывает колебания электронов в поле неподвижной луночной решетки (здесь  $\omega_f^2 = \sum_n C_n \omega_{r,n}^2$ ).

Для исследования связанных фонон-риплонных мод наиболее интересна реакция поверхности в области частот  $\omega \lesssim \omega_{r,1}$ . При этом следует различать случаи жидких  ${}^4\text{He}$  и  ${}^3\text{He}$ . Например, для жидкого  ${}^3\text{He}$  формула (49) справедлива даже в низкочастотном режиме ( $\omega \lesssim \omega_{r,n}$ ), если  $\gamma_n \gg \omega_{r,n}$ . В этом случае из-за сильной вязкости луночная решетка не успевает за перемещениями электронов, а реакция поверхности имеет осцилляторный вид с характерной частотой  $\omega_f$ .

Экспериментальные данные [66] для температурной зависимости  $\omega_f$ , приведенные на рис. 7, демонстрируют хорошее согласие с расчетами, использующими самосогласованный подход [64] для вычисления величины  $\langle u_f^2 \rangle$  как функции температуры и дебаевское приближение для описания вклада нулевых колебаний  $\langle u_0^2 \rangle$ . Хорошо видно, что вдали от температуры плавления суммарный вклад всех слагаемых в сумме по  $n$  значительно превышает вклад первого слагаемого, показанный пунктиром.

В случае жидкого  ${}^4\text{He}$  низкочастотный предел ( $\omega \ll \omega_{r,1}$ ) формулы (48) дает

$$\text{Re } \lambda(\omega) \simeq \sum_n C_n = M_D / m_e, \quad (50)$$

где  $M_D$  представляет собой присоединенную массу одноэлектронной лунки. Такое поведение функции линейного отклика ( $\text{Re } \mathbf{F}_D \simeq N_e M_D \omega^2 \mathbf{u}$ ) означает, что на низких частотах поверхностные лунки успевают перемещаться вслед за электронами, увеличивая тем самым их инерционную массу. При приближении частоты колебаний кристалла к  $\omega_{r,n}$  реальная и мнимая части функции  $\lambda(\omega)$  резко возрастают, что соответствует резонансному возбуждению электронной решетки капиллярных волн с  $\mathbf{q} \simeq \mathbf{g}$ .

При описании проводимости ВК, особенно над жидким  ${}^3\text{He}$ , важное значение имеет и мнимая часть функции  $\lambda(\omega)$ :

$$\text{Im } \lambda(\omega) = \frac{1}{\omega^2} \sum_n C_n \frac{2\gamma_n \omega \omega_{r,n}^4}{(\omega_{r,n}^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma_n^2 \omega^2}. \quad (51)$$

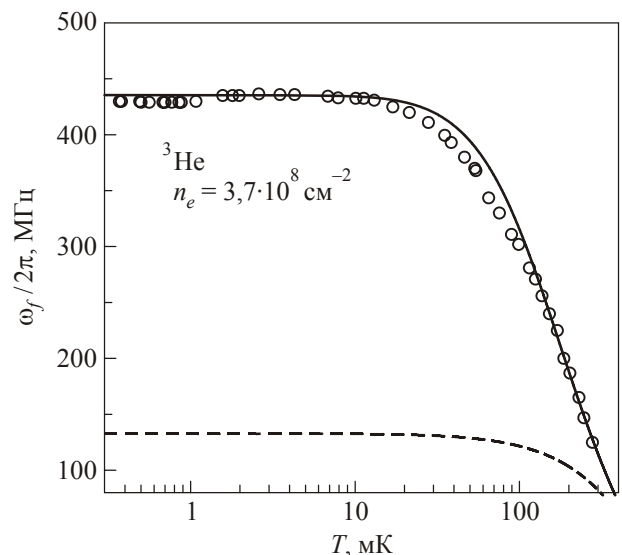


Рис. 7. Температурная зависимость пороговой частоты для оптических мод ВК: экспериментальные данные [66] (кружки), теоретический расчет с использованием теории [64] (сплошная линия) и расчет, учитывающий только вклад слагаемых с  $|\mathbf{g}| = g_1$  (пунктир).

Так, например,  $v_D = \omega \operatorname{Im} \lambda(\omega)$  представляет собой эффективную частоту столкновений, характеризующую скорость релаксации импульса для электронной решетки, обусловленную торможением лунок. В этом случае сила, действующая на электроны со стороны поверхностного рельефа, пропорциональна скорости электронов  $\mathbf{F}_D \simeq -N_e m_e v_D \dot{\mathbf{u}}$ . По величине она равна силе трения луночной решетки  $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ , которая формируется объемными возбуждениями жидкого гелия и направлена в противоположную сторону. Для жидкого  $^4\text{He}$  величина  $v_D$  очень мала, а скорость релаксации импульса электронов определяется главным образом их рассеянием на тепловых поверхностных возбуждениях жидкости с  $q \gg g_1$ .

### 3.3. Связанные фонон-риплонные моды

В интересующей нас области волновых векторов частоты риплонов  $\omega_{r,q}^2$  значительно меньше характерной частоты фононов ВК  $\omega_0$ , введенной на рис. 1. Поэтому пересечение спектров риплонов и фононов возможно только при  $\mathbf{q} \simeq \mathbf{g} + \mathbf{k}$  и  $k \ll g$  благодаря периодичности закона дисперсии фононов  $\Omega_p(\mathbf{k}) = \Omega_p(\mathbf{k} + \mathbf{g})$ . При нахождении уравнения для связанных фонон-риплонных мод условие  $k \ll g$  позволяет воспользоваться формулой для линейного отклика на однородные смещения (45). Например, в отсутствие магнитного поля связь между фурье-компонентой электронных смещений  $\mathbf{u}_\mathbf{k}$  и фурье-компонентой внешнего продольного поля  $\mathbf{E}_\mathbf{k}$  легко находится из уравнений движения, в которых обычное инерционное слагаемое  $-m_e \omega^2 \mathbf{u}_\mathbf{k}$  заменяется на слагаемое  $-m_e \omega^2 [1 + \lambda(\omega)] \mathbf{u}_\mathbf{k}$ , учитывающее отклик деформированной поверхности. Вводя функцию  $Z(\omega) = 1 + \lambda(\omega)$ , эту связь можно записать в виде выражения для проводимости ВК [67]:

$$\sigma(k, \omega) = \frac{e^2 n_e}{m_e} \frac{i\omega}{Z\omega^2 - \Omega_l^2(k) + i\omega v_e}. \quad (52)$$

Слагаемое  $i\omega v_e$  в знаменателе (52) учитывает эффекты диссипации за счет столкновений электронов с обычными тепловыми возбуждениями поверхности гелия.

Скорость поглощения энергии системой пропорциональна реальной части  $\sigma_{xx}(k, \omega)$ . Для анализа резонансных аномалий поглощения ее удобно записать в обезразмеренном виде, вводя  $\sigma_0 = e^2 n_e / m_e v_e$ :

$$\frac{\operatorname{Re} \sigma}{\sigma_0} = \frac{v_e \omega \left[ \omega v_e + \omega^2 \operatorname{Im} Z \right]}{\left[ \operatorname{Re} Z \omega^2 - \Omega_l^2 \right]^2 + \left[ \omega v_e + \omega^2 \operatorname{Im} Z \right]^2}. \quad (53)$$

Из соотношения (53) следует, что поглощение резонансно возрастает при  $\operatorname{Re} Z \omega^2 - \Omega_l^2 = 0$ . В пределе  $\gamma_n \rightarrow 0$  это условие записывается в следующем виде:

$$\omega^2 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\omega^2 \omega_{r,n}^2}{\omega_{r,n}^2 - \omega^2} = \Omega_l^2(k). \quad (54)$$

Соотношение (54) представляет собой уравнение для связанных продольных фонон-риплонных мод. Аналогичное уравнение для поперечных фонон-риплонных мод получается заменой  $\Omega_l(k)$  на  $\Omega_t(k)$ . Резонансные слагаемые, входящие в сумму по  $n$ , позволяют уравнять левую часть формулы (54) с большой правой частью при  $\omega \sim \omega_{r,n}$ .

Графическое решение уравнения для связанных фонон-риплонных мод приведено на рис. 8 для двух температур жидкого гелия: 0,4 и 0,2 К. Решения, соответствующие связанным колебаниям, даются точками пересечения функции  $\omega^2 \operatorname{Re} Z(\omega) = \omega^2 [1 + \operatorname{Re}(\lambda)]$  и горизонтальной прямой  $\Omega_l^2(k)$ . Набор волновых векторов продольных фононов  $k_j$ , возбуждаемых в системе, задается условием обращения в нуль радиального тока на границе. На рисунке показаны горизонтальные прямые  $\Omega_l^2(k) / \omega_{r,1}^2$  для двух наименьших волновых векторов  $k_1$  и  $k_2$ .

На рис. 8 представлен также график  $\omega^2 \operatorname{Re} Z(\omega) / \omega_{r,1}^2$  для достаточно большого значения коэффициента затухания риплонов, рассчитанного для жидкого  $^3\text{He}$  при  $T = 0,4$  К. Интересно, что и в этом случае возможно заметное возрастание поглощения вблизи резонансной частоты, найденной для малого затухания  $\gamma_1 / \omega_{r,1} \sim 10^{-4}$  и обозначенной на рисунке буквой W.

Частоты связанных колебаний расположены при  $\omega < \omega_{r,n}$ , когда соответствующий резонансный член в сумме по  $n$  положителен. Связанные моды, частоты которых меньше  $\omega_{r,1}$ , будем называть медленными модами и обозначать  $\Omega_{s,p}(k)$  по аналогии с высоко-

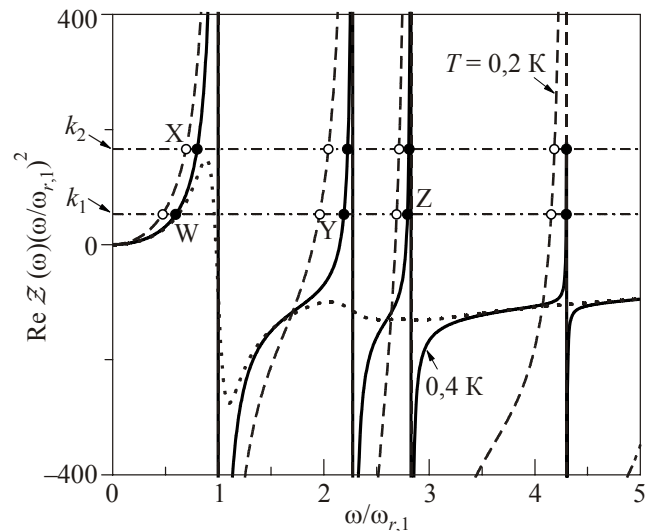


Рис. 8. Графическое решение уравнения для связанных фонон-риплонных мод. Горизонтальные прямые соответствуют значениям  $\Omega_l^2(k) / \omega_{r,1}^2$  при  $k_1$  и  $k_2$ . Функция  $\operatorname{Re} Z(\omega) \omega^2 / \omega_{r,1}^2$  для температур 0,4 К (сплошная линия) и 0,2 К (штриховая линия) рассчитана с очень малым затуханием риплонов. Для затухания риплонов, соответствующего жидкому  $^3\text{He}$  при  $T = 0,4$  К, та же функция показана пунктиром.

частотной модой  $\Omega_{f,p}(k)$ , обсуждавшейся выше. В пределе  $\omega \ll \omega_{r,1}$  возникает очевидная перенормировка частот фононов ВК  $\Omega_{s,p}(k) \simeq \Omega_p(k)m_e / (m_e + M_D)$  за счет присоединенной массы лунок. Промежуточные моды, близкие к  $\omega_{r,n}$  с  $n > 1$ , обозначим  $\Omega_{n,p}(k)$ .

Резонансы проводимости хорошо выражены даже при значительной скорости импульсной релаксации электронов  $v_e \sim \omega_{r,1}$ , поскольку  $\text{Re } \mathcal{Z}\omega^2 - \Omega_l^2 \gg \omega v_e$  при  $C_1 \gg 1$ . Пример спектра поглощения ВК показан на рис. 9 для  $k = k_1 \simeq 2 \text{ см}^{-1}$ . Здесь приведены расчеты  $\text{Re } \sigma(\omega, k_1) / \sigma_0$  для температур 0,4 и 0,2 К при условии  $\gamma_1 / \omega_{r,1} \simeq 10^{-2}$ . В качестве  $v_e$  используется импульсная частота столкновений электронов с риплонами, вычисленная для жидкого состояния электронной системы. Положение характерных частот риплонов  $\omega_{r,n}$  показано стрелками.

Структура резонансной кривой  $\text{Re } \sigma_{xx}(\omega)$  определяется совместным действием резонансных знаменателей у реальной и мнимой частей функции  $\lambda(\omega)$ . Например, максимумы поглощения на рис. 9 строго соответствуют точкам, отмеченным на рис. 8 кружками. При этом никаких дополнительных аномалий поглощения вблизи частоты  $\omega_{r,1}$ , связанных с конечным затуханием и наличием спадающего участка у зависимости  $\omega^2 \text{Re } \mathcal{Z}(\omega)$ , не появляется, даже для затухания, соответствующего жидкому  $^3\text{He}$  (пунктир).

Очевидно также, что антирезонанс амплитуды колебаний кристалла на частоте близкой к  $\omega_{r,1}$ , обусловленный резким возрастанием  $\text{Re } \mathcal{Z}(\omega)$ , не приводит к аномалии поглощения. В выражении для  $\text{Re } \sigma$  этот антирезонанс полностью компенсируется резким изменением фазы колебаний за счет возрастания  $\text{Im } \mathcal{Z}(\omega)$ . Интересно отметить, что для случая жидкого  $^3\text{He}$  при

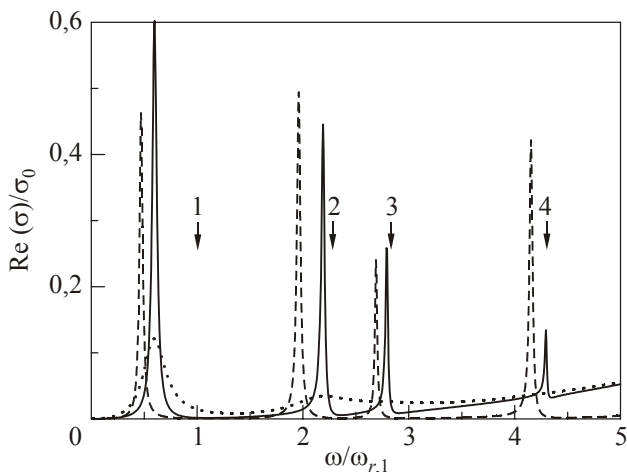


Рис. 9. Типичный спектр электрон-риплонных резонансов проводимости вигнеровского кристалла  $\text{Re } \sigma(\omega, k_1) / \sigma_0$  для двух значений фактора Дебая–Валлера, соответствующих  $T = 0,4 \text{ К}$  (сплошная линия) и  $T = 0,2 \text{ К}$  (штриховая линия). Пунктирная линия рассчитана для затухания риплонов в жидком  $^3\text{He}$  при  $T = 0,4 \text{ К}$ . Стрелками показано положение характерных частот риплонов  $\omega_{r,n}$ .

$T = 0,4 \text{ К}$  тоже наблюдается максимум поглощения вблизи частот, соответствующих связанным модам  $\Omega_{s,p}(k)$  и  $\Omega_{2,p}(k)$ . С понижением температуры и эти максимумы пропадают из-за быстрого возрастания вязкости ферми-жидкости.

Первое сообщение об экспериментальном наблюдении электрон-риплонных резонансов, свидетельствующих о кристаллизации двумерного электронного газа на поверхности сверхтекучего гелия, сделано в работе Граймса и Адамса [6]. Объяснение этого эксперимента дано в сопутствующей теоретической работе Фишера, Гальперина и Платцмана [20]. Переменное ведущее электрическое поле, индуцированное в экспериментальной ячейке, имело аксиальную симметрию. Стоячие фон-риплонные волны возбуждались лишь для определенного набора волновых чисел  $k \sim 1/R_e$ , где  $R_e$  — характерный радиус электронной системы.

Экспериментальные данные [6] представлены на рис. 10. Хорошо видно, что при небольшом понижении температуры от 0,46 до 0,42 К кривая поглощения как функция частоты сигнала приобретает резонансную структуру. Происхождение резонансных частот, обозначенных буквами X, Y, Z и W, пояснено на рис. 8.

В условиях сильной связи ( $C_1 \gg 1$ ) резонансы W и X имеют заметное смещение вниз от характерной частоты  $\omega_{r,1}$ . Их положение определяется значением фактора Дебая–Валлера  $e^{-2W_g}$ , где  $2W_g = g^2 \langle u_f^2 \rangle / 2$ . В оригинальной работе [20] разделение электронных колебаний на высокочастотные и низкочастотные проводилось с помощью ряда упрощающих предположений, таких как введение обрезающего волнового вектора  $k_c$  для быстрых мод и использование его в качестве подгоночного параметра. Нахождение  $e^{-2W_g}$  из первых принципов потребовало дополнительных усилий. Здесь прежде всего следует отметить гармоническое приближение для описания связанных фон-риплон-

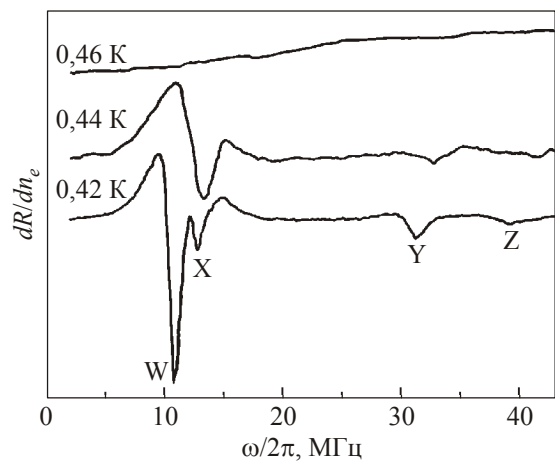


Рис. 10. Экспериментальное наблюдение внезапного появления электрон-риплонных резонансов, свидетельствующих о вигнеровской кристаллизации поверхностных электронов в гелии [6].



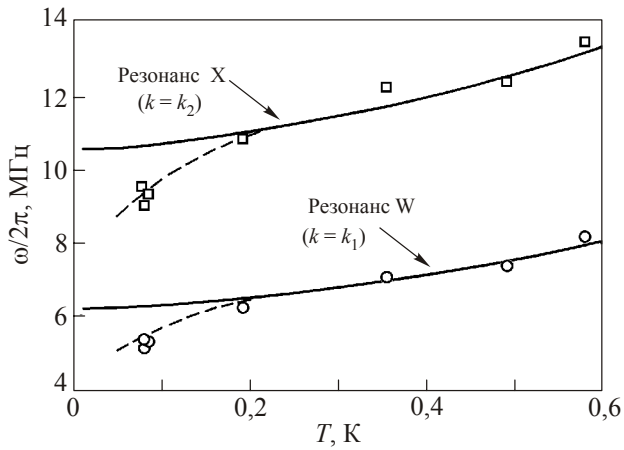


Рис. 11. Температурная зависимость резонансных частот W и X, полученная в эксперименте [68] при  $n_e = 1,3 \cdot 10^9 \text{ см}^{-2}$ , сравнивается с результатами самосогласованного подхода к определению фактора Дебая–Валлера [64]. Штриховая линия учитывает изменение зависимости  $\alpha(T)$  из-за наличия малой примеси  $^3\text{Ne}$ .

ных мод [52]. К сожалению, этот подход приводит к значениям  $W_{g_1}$ , существенно меньшим, чем значения, необходимые для правильного описания положений низкочастотных резонансов в эксперименте Граймса и Адамса [6]. Самосогласованный метод [63,64], обсуждавшийся выше, лучше описывает экспериментальные данные, поскольку дает существенно большие значения  $\langle u_{f_j}^2 \rangle$ , чем гармоническое приближение, что характерно для поляронных задач. Подробные экспериментальные исследования [68] показали, что температурная зависимость положения резонансных частот W и X (см. рис. 11) хорошо описывается в рамках самосогласованного подхода.

Вблизи температуры плавления, из-за фактора Дебая–Валлера  $e^{-2W_g}$ , коэффициенты  $C_n$  быстро убывают с возрастанием индекса:  $C_1 \gg C_2 \gg C_3$ . В таких условиях резонансы Y и Z близки к частотам  $\omega_{r,2}$  и  $\omega_{r,3}$  соответственно и свидетельствуют о пространственном упорядочении электронов в простую треугольную решетку. Интересно, что в последующих экспериментах [69] электрон-риплонные резонансы наблюдались вплоть до частот  $\omega_{r,13}$ , соответствующих значению  $p_{13} = g_{13}^2 / g_1^2 = 28$  (см. рис. 12). При этом отклонения частот  $\Omega_{n,l}(k_1)$  от соответствующих риплонных частот  $\omega_{r,n}$  становятся пренебрежимо малыми уже при  $n \geq 8$ . Условия данного эксперимента подобраны таким образом, чтобы выделить сигнал от резонансов с большим значением  $p_n$  за счет низкочастотных резонансов.

Даже относительно слабое магнитное поле ( $B \sim 100 \text{ Э}$ ), перпендикулярное электронному слою, сильно меняет спектр связанных фонон-риплонных колебаний. Рассмотрим сначала высокочастотные (оптические) моды, для которых деформационный рельеф

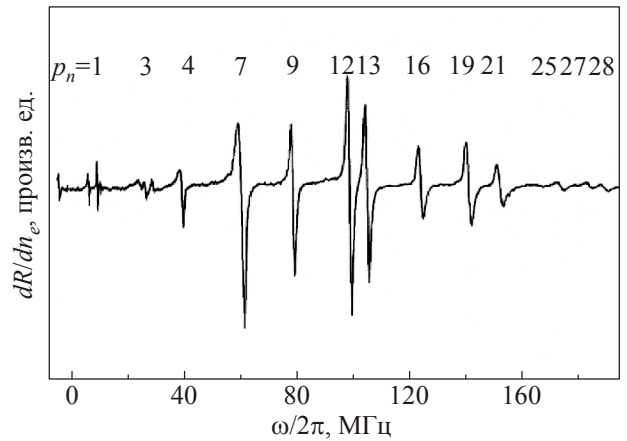


Рис. 12. Спектр электрон-риплонных резонансов при низких температурах ( $n_e = 5,25 \cdot 10^8 \text{ см}^{-2}$ ,  $T = 60 \text{ мК}$ ) [69].

поверхности можно считать неподвижным. В этом случае спектр колебаний легко находится из формулы (8) заменой частот  $\Omega_p(k)$  с  $p = l, t$  на  $\sqrt{\omega_f^2 + \Omega_p^2(k)}$ . Мода, соответствующая знаку плюс перед радикалом, сдвигается по частоте вверх, а мода, соответствующая знаку минус, опускается. В пределе  $\omega_c \gg \omega_f$  частота  $\Omega_{f,-}$  убывает обратно пропорционально  $B$ :

$$(\Omega_{f,-})^2 \simeq \frac{(\omega_f^2 + \Omega_l^2)(\omega_f^2 + \Omega_t^2)}{\omega_c^2 + \Omega_l^2}. \quad (55)$$

Таким образом, для сильных магнитных полей гибридная оптическая мода  $\Omega_{f,-}$  заходит в низкочастотную область, и исходное предположение о высокой частоте оптических мод нарушается.

Сказанное выше делает невозможным корректное самосогласованное описание фактора Дебая–Валлера  $e^{-2W_g}$ , используемое при нахождении связанных фонон-риплонных мод. Исключение составляет случай очень низких температур, когда среднеквадратичные смещения формируются в основном нулевыми колебаниями, а  $2W_g \simeq g^2 \langle u_0^2 \rangle / 2$ . При наличии магнитного поля спектр низкочастотных (акустических) связанных фонон-риплонных мод определяется уравнением

$$\left[ \omega^2 Z - \Omega_l^2 \right] \left[ \omega^2 Z - \Omega_t^2 \right] = \omega^2 \omega_c^2. \quad (56)$$

Следует отметить, что для изменения спектра акустических мод нужны значительно более сильные магнитные поля, чем для изменения частот оптических мод. Близость оптических и акустических мод при наличии магнитного поля не мешает их экспериментальной идентификации, поскольку они ведут себя противоположным образом при изменении прижимающего поля [70]: частота оптических мод возрастает, а частота акустических убывает при увеличении  $E_{\perp}$ .

Для частоты  $\Omega_{s,-}$ , пренебрегая связыванием с риплонами, имеющими  $\mathbf{q} \simeq \mathbf{g}_n$  с  $n > 1$ , находим

$$\Omega_{s,-} \simeq \frac{\Omega_l \Omega_t}{\sqrt{\omega_c^2 + C_1 \Omega_l^2}}. \quad (57)$$

Отсюда следует, что в пределе сильных полей  $\omega_c \gg \sqrt{C_1} \Omega_l(k)$  акустическая мода  $\Omega_{s,-}(k)$  переходит в закон дисперсии  $\Omega_-(k)$ , полученный для плоской подложки. Происходит это из-за того, что поляронные изменения частот  $\Omega_{s,p} \propto \Omega_p / \sqrt{C_1}$  (здесь  $p = l, t$ ) и циклотронной частоты  $\omega_c^* \simeq \omega_c / C_1$  в пределе сильных полей полностью компенсируют друг друга.

#### 4. Транспортные свойства

Как отмечалось выше, вигнеровская кристаллизация в твердотельных системах сопровождается переходом электронов в непроводящее состояние из-за пиннинга электронной решетки на примесях и других неоднородностях [14,15]. В отличие от полупроводниковых систем поверхность жидкого гелия свободна от такого рода дефектов и предоставляет уникальную возможность исследования транспортных свойств весьма подвижного двумерного вигнеровского кристалла.

##### 4.1. Методы измерения

Специфика системы ПЭ в гелии не позволяет проводить прямые измерения статической проводимости, поэтому в эксперименте ведущее электрическое поле имеет конечную частоту  $\omega$ . Среди бесконтактных методов измерения проводимости ПЭ чаще всего используются резонансные методы, такие как циклотронный резонанс [60,71], классический плазменный резонанс [72,73] или различные модификации метода Соммера–Таннера [74], основанные на измерении характеристик токов, наведенных в электродах измерительной ячейки движущимися электронами. Резонансные методы подразумевают использование переменных полей достаточно высокой частоты  $\omega \gg \nu_e$ . К сожалению, на таких высоких частотах проводимость электронов, находящихся в кристаллической фазе, как правило, почти не отличается от проводимости жидкой фазы.

При измерениях транспортных свойств жидкой фазы ПЭ с помощью метода Соммера–Таннера обычно реализуется противоположный предельный случай  $\omega \ll \nu_e$ , где  $\nu_e$  — импульсная частота столкновений электронов с риплонами и атомами гелиевого пара над поверхностью. Измерения проводимости в таких условиях приводят к данным, не зависящим от частоты внешнего поля, что позволяет считать их эквивалентными измерениям статической проводимости. При характерных гелиевых температурах  $T \sim 0,5$  К частота столкновений  $\nu_e$  для жидкой фазы электронов оказывается порядка  $10^8$  с<sup>-1</sup> и выше, в зависимости от напряженности прижимающего электрического поля  $E_{\perp}$ . Вклад в  $\nu_e$  поляризационного слагаемого в гамильтониане взаимодействия (34) приближенно прямо про-

порционален температуре жидкого гелия, а вклад взаимодействия вида  $eE_{\perp}\xi$  пропорционален  $T/T_e$  и в равновесии не зависит от температуры.

Суть метода Соммера–Таннера состоит в измерении токов в электродах, имеющих емкостную связь с электронным слоем. Схема типичной измерительной ячейки, имеющей аксиальную симметрию, показана на рис. 13. Она представляет собой плоский конденсатор радиусом  $R$ , основные электроды которого ориентированы горизонтально. Поверхность жидкого гелия размещается между этими электродами и заряжается с помощью внешнего источника электронов, например нити накаливания. Вспомогательные (охранные) электроды используются для создания резкой границы для профиля электронной плотности. На один из основных электродов (в данном случае, нижний) подается постоянное напряжение, создающее электрическое поле  $E_{\perp}$ , прижимающее электроны к поверхности гелия. Равновесная концентрация ПЭ определяется из условия обращения в нуль полного электрического поля на больших расстояниях от свободной поверхности гелия ( $z \gg a$ ):  $E_{\perp} = 2\pi en_e$ . Противоположный электрод (верхний) состоит из трех измерительных частей (электродов). Проводимость ПЭ в гелии определяется в результате анализа соотношения между переменным напряжением возбуждения на входном электроде  $V_{in}$  и током, индуцированным на выходном электроде, что требует определенной электрической модели ячейки.

В исследованиях, использующих емкостную методику, предлагались различные модели ячейки, такие как модель с сосредоточенными параметрами [74,75], модель длинной линии [76,77], а также модели, в которых более полно рассматривалась электродинамическая задача о движении электронов в ячейке [78,79]. При этом анализировались ячейки как с прямоугольной, так и круговой геометрией.

При экспериментальном исследовании транспортных свойств ВК очень важно убедиться, что кристаллическое состояние электронной системы не портит основных формул электрической модели ячейки, которые, как правило, выводятся для газового состояния. Например, в круговой геометрии при наличии магнитного поля холловская скорость электронов  $v_H(r) \equiv$

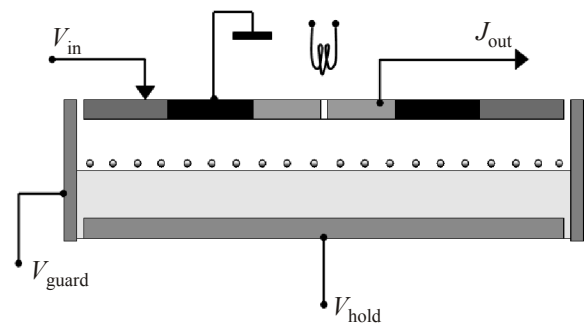


Рис. 13. Типичная схема измерительной ячейки.

$\equiv v_\varphi(r) = cE_r(r)/B$  (здесь  $E_r$  — радиальная компонента ведущего электрического поля) находится в противоречии с вращательным движением электронного кристалла как целого  $v_\varphi(r) \propto r$ . Теоретический анализ уравнений движения двумерного ВК [26] показывает, что формулы электрической модели ячейки для кристаллического состояния ПЭ подобны формулам, полученным для жидкого состояния [77] (модель длинной линии,  $kd \ll 1$ ), только для достаточно высоких частот ведущего поля  $E_r$ , когда

$$|\mathcal{Z}(\omega)\omega^2 - i\omega v_e| \gg c_t^2 / R^2. \quad (58)$$

При этом измеряемая величина

$$\sigma_{xx} = \frac{e^2 n_e}{m_e} \frac{v_e - i\omega \mathcal{Z}(\omega)}{\omega_c^2 + [v_e - i\omega \mathcal{Z}(\omega)]^2} \quad (59)$$

в условиях сильной связи ВК с жидкой подложкой может существенно отличаться от результата низкочастотного предела  $\omega \rightarrow 0$ .

Важно, что  $\text{Re } \sigma_{xx}$  из (59) зависит не только от диссипативной компоненты  $\text{Im } \mathcal{Z}$ , но и от компоненты  $\text{Re } \mathcal{Z}$ , описывающей изменение эффективной массы электронов. Например, в отсутствие магнитного поля для измеряемой подвижности электронов  $\mu = \text{Re } \sigma_{xx} / en_e$  имеем

$$\mu^{-1} = \frac{m_e}{e} \frac{(v_e + \omega \text{Im } \mathcal{Z})^2 + (\omega \text{Re } \mathcal{Z})^2}{v_e + \omega \text{Im } \mathcal{Z}}. \quad (60)$$

Отсюда следует, что для ВК, несмотря на условие  $\omega \ll v_e$ , инерционное слагаемое  $\omega \text{Re } \mathcal{Z}$  может оказаться сравнимым с  $v_e$  вследствие большой массы поверхностной лунки ( $\text{Re } \mathcal{Z} \gg 1$ ). В этом случае, даже при неизменной электронной компоненте  $v_e$ , вигнеровский переход может сопровождаться резким возрастанием  $\mu^{-1}(\omega)$  из-за появления большого инерционного слагаемого  $\omega \text{Re } \lambda(\omega) = \omega M_d / m_e$ .

При произвольном соотношении между  $k$  и  $d$  достаточно подробно исследована задача определения параметров электронного слоя, расположенного в ячейке с круговой геометрией [79]. Решение системы уравнений Максвелла, описывающих распространение электромагнитного поля в ячейке, позволяет установить связь между выходным током из ячейки  $J$  и напряжением возбуждения:  $J = G V_{\text{in}}$ , где

$$G = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{n_e e^2 i \omega A_\lambda}{n_e e^2 i \omega \chi(\omega) - m \Omega_T^2(k_\lambda)} + G_0 \quad (61)$$

представляет собой комплексный кондактанс,  $G_0$  — кондактанс ячейки в отсутствие электронов,  $k_\lambda$  — волновые векторы плазмонов, возбуждаемых в системе,  $A_\lambda$  — некие коэффициенты, зависящие от геометрических характеристик ячейки,  $\chi(\omega)$  — величина, обратная проводимости электронного слоя в однород-

ном электрическом поле. Сравнение (61) с приведенной выше формулой (52) дает следующие соотношения:

$$\text{Re } \chi = \frac{m(v_e + \omega \text{Im } \mathcal{Z})}{e^2 n_e}, \quad \text{Im } \chi = -\frac{m \omega \text{Re } \mathcal{Z}}{e^2 n_e}. \quad (62)$$

В таком подходе при произвольных частотах ведущего поля удается разделить диссипативные и инерционные слагаемые: реальная часть  $\chi$  пропорциональна эффективной частоте столкновений  $v_e + \omega \text{Im } \mathcal{Z}$ , а ее мнимая часть пропорциональна эффективной массе  $M^* = m_e + M_D$ .

Несмотря на то, что в методике Соммера и Таннера при измерении происходят низкочастотные вариации плотности электронов с длиной волны  $k \sim 1/L$ , параметры токов, наведенных в электроде, выражаются через проводимость электронов в однородном электрическом поле. В обозначениях (53) и (62) измеряемой частотой столкновений является сумма  $v = v_e + v_D$ , где  $v_D = \omega \text{Im } \lambda(\omega)$  описывает релаксацию импульса, обусловленную торможением одноэлектронной лунки на поверхности жидкого гелия, а  $v_e$  — импульсная частота релаксации электронов за счет остальных взаимодействий. Поскольку коэффициент затухания капиллярных волн  $\gamma_g$ , определяющий  $\text{Im } \lambda(\omega)$ , по-разному ведет себя для жидких  $^4\text{He}$  и  $^3\text{He}$ , эти два случая требуют отдельного рассмотрения.

#### 4.2. Подвижность над жидким $^3\text{He}$

Теория проводимости ВК над жидкой подложкой позволяет достаточно точно описать экспериментально наблюдаемые явления, если в качестве подложки используется жидкий  $^3\text{He}$ . В этом случае при низких частотах ведущего поля скорость релаксации импульса электронов  $v_D$ , обусловленная торможением лунок, значительно превышает скорость релаксации импульса за счет взаимодействия с тепловыми возбуждениями поверхности  $v_e$ . Поэтому особенности взаимодействия элементарных возбуждений ВК с тепловыми поверхностными возбуждениями жидкого  $^3\text{He}$  не оказывают существенного влияния на проводимость электронного слоя.

Типичная температурная зависимость сопротивления ПЭ над жидким  $^3\text{He}$  показана на рис. 14 для  $n_e = 1,5 \cdot 10^8 \text{ см}^{-2}$ . Вертикальная прямая (штрих-пунктир) разделяет температурную ось на область, где электроны находятся в жидкой фазе (L), и область, где электроны образуют вигнеровский кристалл (S). В жидкой фазе  $v_D = 0$ , а  $v_e$  и  $1/\sigma$  убывают с уменьшением температуры, так как плотность атомов гелия над поверхностью вымерзает с экспоненциальной скоростью, а распределение риплонов  $N_q^{(r)} \propto T$  для характерных  $q$ , участвующих в рассеянии электронов ( $q \leq 2k$ ).

Переход в кристаллическое состояние сопровождается скачком сопротивления, так как при переходе по-

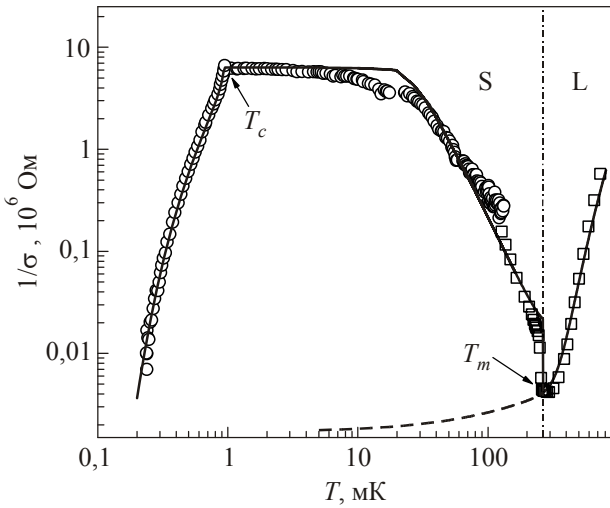


Рис. 14. Сопротивление ВК над жидким  ${}^3\text{He}$ : данные [80,81], теория [26,41].

является вклад в импульсную релаксацию от поверхностных лунок

$$v_D = \frac{\eta}{m_e n_e} \sum_{\mathbf{g}} g^3 |\xi_{\mathbf{g}}^{(0)}|^2, \quad \xi_{\mathbf{g}}^{(0)} = -\frac{n_e g}{\rho \omega_{r,\mathbf{g}}^2} \tilde{U}_{\mathbf{g}}, \quad (63)$$

который при  $T \simeq T_m$  оказывается много больше  $v_e$ . Здесь  $\xi_{\mathbf{g}}^{(0)}$  представляет собой фурье-компоненту смещения поверхности  $\xi_0(\mathbf{r})$  в неподвижной луночной решетке (см. (43)). Скачок сопротивления электронов вызван поляронным зацеплением вигнеровского кристалла с вязкой подложкой.

С уменьшением температуры дальнейшее возрастание сопротивления обусловлено увеличением вязкости ферми-жидкости  $\eta \propto 1/T^2$  и возрастанием  $|\xi_{\mathbf{g}}^{(0)}|$  из-за фактора  $\exp(-g^2 \langle u_T^2 \rangle / 4)$ , входящего в определение  $\tilde{U}_{\mathbf{g}}$ . Несмотря на то, что движение ВК обязательно деформирует луночную решетку, чтобы средняя сила, действующая на электроны со стороны искривленной поверхности, равнялась силе вязкого трения луночной решетки  $\mathbf{F}_{\text{тр}}$  (см., например, рис. 6), линейная проводимость и  $v_D$  выражаются только через равновесные характеристики системы, такие как  $\xi_{\mathbf{g}}^{(0)}$ , в полном соответствии с общей теорией линейного отклика.

В области  $T \lesssim 20$  мК температурная зависимость  $1/\sigma$  выходит на насыщение, так как длина свободного пробега квазичастиц в жидком  ${}^3\text{He}$  становится больше периода решетки. В этом случае сила трения луночной решетки определяется зеркальным отражением объемных возбуждений ферми-жидкости от искривленной поверхности и может быть записана в виде [26]

$$v_D = \frac{\hbar (k_F^{(\text{qp})})^4}{8\pi^2 m_e n_e} 2f_F(\Delta) \sum_{\mathbf{g}} g^2 |\xi_{\mathbf{g}}^{(0)}|^2, \quad (64)$$

где  $f_F(\epsilon)$  — функция распределения квазичастиц. В нормальной фазе жидкого  ${}^3\text{He}$  энергетическая щель

$\Delta$  равна нулю и, следовательно,  $2f_F(\Delta) = 1$ . Сильная зависимость  $v_D$  от значения импульса квазичастиц на поверхности Ферми  $k_F^{(\text{qp})}$  позволяет экспериментально проверить различные теоретические модели жидкого  ${}^3\text{He}$  [29].

Еще один важный температурный режим для сопротивления ВК возникает ниже температуры сверхтекучего перехода  $T < T_c \simeq 0,93$  мК, где в спектре возбуждений жидкости появляется щель  $E_{p,\sigma}^{(S)} = \sqrt{(E_{p,\sigma})^2 + \Delta^2}$ , здесь  $p = \hbar k$ ,  $\sigma$  — спиновый индекс,  $E_{p,\sigma}$  — энергетический спектр нормальной ферми-жидкости. Энергетическая щель уменьшает число объемных возбуждений и, следовательно, уменьшает скорость передачи импульса от луночной решетки к ферми-жидкости, что приводит к экспоненциальному вымерзанию сопротивления ВК:

$$\frac{\sigma(T_c)}{\sigma(T)} = \frac{2}{\exp[\Delta(T)/T] + 1}. \quad (65)$$

Для температурной зависимости  $\Delta(T)$  обычно используется следующая интерполяционная формула:

$$\Delta(T) = \Delta(0) \text{th} \left[ \frac{\Delta^*}{\Delta(0)} \sqrt{\frac{T_c}{T} - 1} \right], \quad (66)$$

где  $\Delta(0) = 1,74T_c$  и  $\Delta^* \simeq 3,06T_c$ .

Таким образом, несмотря на небольшую глубину одноэлектронных поверхностных лунок, индуцированных вигнеровской кристаллизацией, и малость  $|\nabla \xi| \sim 10^{-6}$ , поляронное связывание электронной решетки и поверхности ферми-жидкости приводит к огромным изменениям сопротивления ВК (более чем на три порядка). Хорошее численное согласие между теорией и экспериментом позволяет использовать вигнеровский кристалл поверхностных электронов как чувствительный инструмент для исследования квазичастичных возбуждений в сверхтекучем  ${}^3\text{He}$ . Например, ВК успешно использовался для определения текстуры сверхтекучей А-фазы вблизи свободной поверхности при наличии параллельного магнитного поля [27,82].

#### 4.3. Высокочастотная проводимость

Высокочастотный предел важен для определения затухания фононов и ширины плазменного резонанса. При высоких частотах ведущего электрического поля  $\omega \gg \omega_{r,1}$  электронная решетка колеблется в поле практически неподвижных лунок. В этом случае релаксация импульса определяется чисто электронной составляющей  $v_e$ . Для вычисления электронной проводимости в пределе высоких частот удобно использовать подход, основанный на так называемой функции памяти [83]. При этом эффективная частота столкновений ПЭ вполне определяется равновесным динамическим структурным фактором электронной системы  $S(\mathbf{q}, \omega)$  с помощью простого соотношения [29]

$$v_e(\omega) = \frac{1 - e^{-\hbar\omega/T}}{8\alpha m_e} \sum_{\mathbf{q}} \frac{\omega_{r,q}}{\omega} U_q^2 \times \left[ (N_q^{(r)} + 1) S(\mathbf{q}, \omega - \omega_{r,q}) + N_q^{(r)} S(\mathbf{q}, \omega + \omega_{r,q}) \right]. \quad (67)$$

Здесь  $N_q^{(r)}$  — функция распределения риплонов. Два характерных слагаемых в квадратных скобках описывают вклады процессов рождения и уничтожения риплонов соответственно. Следует отметить, что в предельном случае  $\omega \rightarrow 0$  формула (67) переходит в результат, полученный для статической проводимости сильнокоррелированной двумерной электронной системы [51]. Поэтому для ПЭ в гелии можно считать, что формула (67) правильно описывает импульсную релаксацию электронов во всем диапазоне частот.

Прежде всего следует отметить сильную частотную зависимость  $v_e(\omega)$ , возникающую при низких температурах, когда  $\hbar\omega/T$  становится больше единицы. Это чисто квантовый эффект, следующий из флуктуационно-диссипативной теоремы. Он не зависит от фазового состояния электронной системы. Рассмотрим, например, высокотемпературное приближение для ДСФ из (27), применимое как к кристаллической фазе ( $T > T_D$ , где  $T_D$  — дебаевская температура), так и к газовой фазе ( $K_e = T$ ). Для ВК средняя кинетическая энергия электронов  $K_e$  из (28), как правило, существенно отличается от температуры. Используя приближение (27), в формуле (67) можно пренебречь  $\omega_q$  в аргументе ДСФ и считать  $N_q^{(r)} \simeq T/\hbar\omega_{r,q} \gg 1$ , что дает

$$v_e(\omega) = \frac{(1 - e^{-\hbar\omega/T})(eE_{\perp})^2 T}{2\sqrt{\pi}\alpha\hbar^2\omega} \times \int_0^{\infty} G^2(x) \exp\left[-\left(x - \frac{\hbar\omega}{4K_e x}\right)^2\right] dx, \quad (68)$$

где

$$G(x) = 1 + \frac{2\Lambda k_T^2 x^2}{eE_{\perp}} w_{11} \left( \frac{k_T^2 x^2}{\gamma^2} \right), \quad (69)$$

$\hbar k_T = \sqrt{2mK_e}$ , а параметр  $\gamma^{-1}$  характеризует степень затухания электронной волновой функции в газовой фазе гелия.

Интеграл в правой части (68) почти не зависит от параметра  $\hbar\omega/K_e$ , входящего в подынтегральную функцию. Это хорошо видно в пределе сильных прижимающих полей, когда  $G(x) \simeq 1$  и интеграл равен числу  $\sqrt{\pi}/2$ . Поэтому частотная зависимость  $v_e$  в основном определяется предынтегральным множителем [84]:

$$v_e(\omega) \simeq \frac{T(1 - e^{-\hbar\omega/T})}{\hbar\omega} v_e(0). \quad (70)$$

Отсюда следует, что при  $T < \hbar\omega$  эффективная частота столкновений приобретает дополнительный множи-

тель  $T/\hbar\omega$ , по сравнению с результатом, полученным для  $\omega = 0$ . Такое поведение частоты столкновений наблюдается экспериментально [66,85] при измерении ширины плазменного резонанса.

При низких температурах приближение (27) для ДСФ ВК, вообще говоря, неприменимо. В этом случае простейшее приближение сводится к упругому слагаемому (29), для которого фононы ВК не участвуют в рассеянии риплонов. При этом эффективная частота столкновений ВК имеет вид, соответствующий резонансному возбуждению стоячих капиллярных волн, подробно обсуждавшемуся выше.

При исследовании вклада неупругих процессов рассеяния следует еще раз вернуться к определению функции  $W_g = g^2 \langle u^2 \rangle / 4$ , которая расходится для тепловых возбуждений бесконечного двумерного кристалла. Отметим, что в пределе сильной связи ( $C_1 \gg 1$ ) низкочастотные фононы ВК, ответственные за расходимость, перенормируются в результате взаимодействия с риплонами, а соответствующие линейные (по электронным смещениям) слагаемые в гамильтониане взаимодействия, приводящие к однофононным процессам, учтены при нахождении спектра связанных фонон-риплонных колебаний. Неучтенными остаются процессы рассеяния с участием высокочастотных фононных мод и многофононные процессы с участием низкочастотных мод. В случае жидкого  ${}^3\text{He}$  при низких температурах вкладом низкочастотных мод можно пренебречь из-за сильной вязкости. В этом случае  $W_g = g^2 \langle u_f^2 \rangle / 4$  не зависит от размера системы. Несмотря на это, если ограничиваться только однофононными слагаемыми в ДСФ из (30), более правильным является приближение  $W_g(T) \rightarrow W_g(0)$ , которое учитывает компенсацию вклада в  $W_g$  тепловых колебаний большой амплитуды, возникающую вследствие многофононных процессов (см. обсуждение, приведенное после формулы (30)).

Для высоких частот вклад однофононных слагаемых поперечной моды ( $\Omega_{f,t}^2 = \omega_f^2 + c_t^2 k^2$ ) в формуле (30) является основным. Его можно преобразовать к следующему виду:

$$S^{(1ph)}(\mathbf{q}, \Omega) = \frac{\hbar q^2 e^{-2W_q}}{4m_e c_t^2 (1 - e^{-\hbar\Omega/T})} \theta(\Omega - \omega_f) \sum_{\mathbf{g}} \delta_{\mathbf{q},\mathbf{g}}. \quad (71)$$

Здесь и ниже используем обозначение  $\Omega$  для частотного аргумента ДСФ, так как в общем случае, согласно (67), он отличается от частоты ведущего поля  $\omega$ .

Использование приближения (71) в (67) дает [84]

$$v_e^{(1ph)}(\omega) \simeq \frac{T}{32\alpha m_e^2 \omega c_t^2} \sum_{\mathbf{g}} g^2 |U_{\mathbf{g}}|^2 e^{-g^2 \langle u_f^2 \rangle / 2} \times [\theta(\omega - \omega_g - \omega_f) + \theta(\omega + \omega_g - \omega_f)], \quad (72)$$

где первое слагаемое соответствует процессам излучения риплонов, а второе — процессам поглощения. В предельном случае  $\omega_f \rightarrow 0$  и  $\omega \gg \omega_g$  [ $\theta(\omega - \omega_g - \omega_f) + \theta(\omega + \omega_g - \omega_f) \rightarrow 2$ ] соотношение (72) переходит в результат приближения слабой связи [86,87], если положить  $\langle u_f^2 \rangle \rightarrow \langle u_0^2 \rangle$ . Следуя [86], можно было бы сделать вывод, что даже в пределе слабой связи низкотемпературная асимптотика (72) должна существенно отличаться от выражения, полученного для невырожденного электронного газа (68), поскольку в формулу (72) входит скорость поперечного звука, отсутствующая в газовой фазе. Однако более подробный анализ [84] приводит к противоположному выводу. Дело в том, что при низких температурах скорость звука входит в ответ в комбинации  $c_l \langle u_0^2 \rangle$ , которая, согласно (15), не зависит от  $c_l$ . Более того, выражение (68) при  $K_e = T$  и приближение (72) для эффективной частоты столкновений оказываются близкими даже численно в широком интервале  $\omega$  и  $n_e$ . Такое же поведение эффективной частоты столкновений характерно и для случае сильной связи, если  $\omega \gg \omega_f$ .

Сравнение различных приближений для  $v_e$  приведено на рис. 15 при  $n_e = 10^8 \text{ см}^{-2}$  и  $\omega = 3 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$ . Хорошо видно, что результаты квантовой теории переноса, использующей приближение (27) для ДСФ (формула (68), сплошные линии), для ВК ( $K_e > T$ , «Solid») и невырожденного газа ( $K_e = T$ , «Gas») в области низких температур сильно отличаются от соответствующих результатов квазиклассического приближения (штриховые линии). При этом частота столкновений для ВК существенно выше, чем для электронного газа, из-за энергии нулевых колебаний ( $K_e > T$ ).

В области низких температур приближение (68) теряет силу, и его следует заменить на однофононную формулу из (72), показанную на рис. 15 для двух при-

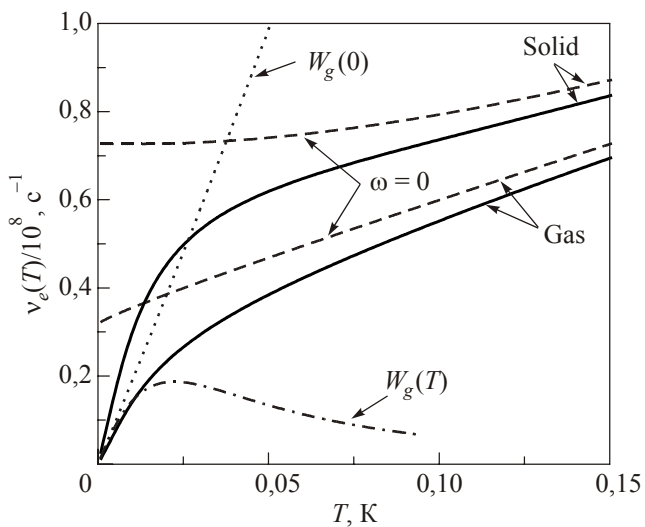


Рис. 15. Эффективная частота столкновений  $v_e$  как функция температуры для различных теоретических моделей, обсуждаемых в тексте.

ближений: 1)  $W_g(T) = g^2 \langle u_f^2 \rangle / 4$  (штрих-пунктир) и 2)  $W_g = W_g(0)$  (пунктир). Резкое падение кривой для первого приближения в области высоких температур связано с уменьшением фактора Дебая–Валлера вследствие тепловых колебаний. В действительности в этой области должен быть рост частоты столкновений из-за вклада многофононных процессов рассеяния, а соответствующая кривая должна выходить на сплошную линию, рассчитанную для высокотемпературного приближения. Компенсация вклада тепловых колебаний в  $W_g$  многофононными слагаемыми учитывается приближением  $W_g = W_g(0)$ . Поэтому можно ожидать, что частота столкновений ВК  $v_e(T)$  будет монотонно возрастать вдоль пунктирной линии, рассчитанной для однофононных процессов с  $W_g(T) = W_g(0)$ , до ее пересечения с результатом высокотемпературного приближения. В области пересечения  $v_e(T)$  должна плавно переходить в результат, даваемый формулой (68) (сплошная линия «Solid»).

Таким образом, в низкотемпературном пределе высокочастотные проводимости ВК и электронного газа оказываются близкими. Исключение составляет случай частот  $\omega \rightarrow \omega_f \gg \omega_{r,1}$ . При этом первое слагаемое в квадратных скобках выражения (72) зануляется или становится значительно меньше второго слагаемого, что приводит к двукратному уменьшению  $v_e(T)$  по сравнению с результатом теории слабой связи. Этот эффект наблюдался при измерении ширины плазменного резонанса [85]. На рис. 16 хорошо видно, что ширина плазменного резонанса с частотой внешнего поля

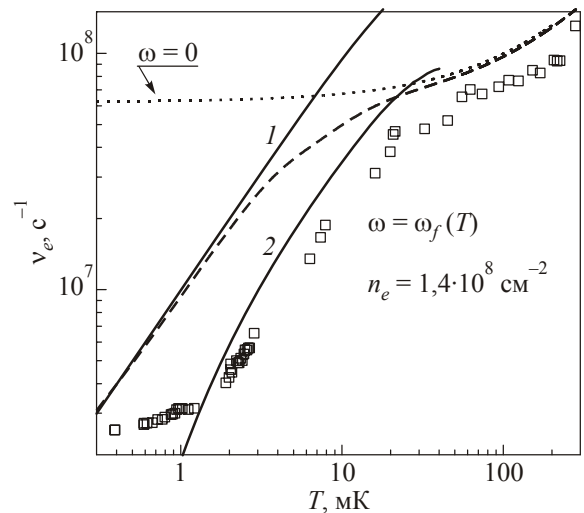


Рис. 16. Ширина плазменных резонансов как функция температуры: экспериментальные данные (квадраты) [85], частота столкновений электронного газа в постоянном ведущем поле (пунктир), частота столкновений электронного газа для быстропеременного поля заданной частоты (штриховая линия), однофононный вклад в эффективную частоту столкновений ВК для слабой связи между фононами и риплонами (1), теория сильной связи (2) [84].

$\omega = \omega_f(T)$  даже для такого классического объекта, как вигнеровский кристалл, ведет себя в соответствии с результатом квантовой теории переноса, резко уменьшаясь в области  $T < \hbar\omega$ . Численно ширина резонанса соответствует частоте столкновений, примерно в два раза меньшей, чем результат, получающийся в теории слабой связи.

При сверхнизких температурах ширина резонанса выходит на плато. При включении слабого магнитного поля (150 Гс) и одновременном увеличении концентрации электронов примерно в 2,6 раза высота плато возрастает почти на два порядка. Причина появления этого необычного плато пока не найдена.

#### 4.4. Подвижность над жидким $^4\text{He}$

Как отмечалось выше, затухание капиллярных волн в жидком  $^4\text{He}$  настолько мало, что торможением поверхностных лунок можно пренебречь ( $v_D \ll v_e$ ). В этом случае изменения в проводимости электронов, вызванные вигнеровским переходом, связаны с электронной составляющей  $v_e$ , если можно пренебречь инерционным членом  $\omega \text{Re } Z$  в формуле (60). Типичное поведение низкочастотной подвижности ПЭ над жидким  $^4\text{He}$  показано на рис. 17 для  $n_e = 6,3 \cdot 10^8 \text{ см}^{-2}$  [88]. В жидкой фазе ( $T > T_m$ ) подвижность электронов ведет себя подобно подвижности невырожденного электронного газа (пунктир) в условиях, когда межэлектронные столкновения контролируют распределение электронного импульса ( $v_{e-e} \gg v_e$ ).

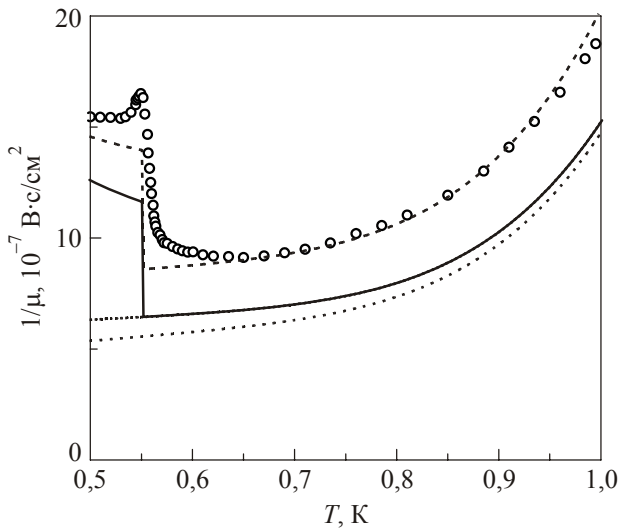


Рис. 17. Величина, обратная подвижности ПЭ над жидким  $^4\text{He}$ , как функция температуры: данные [88] (кружки); расчет для невырожденного электронного газа в режиме частых межэлектронных столкновений (пунктир); расчет по формуле (68) со средней кинетической энергией ВК  $K_e > T$  (точечная линия); расчет, учитывающий изменение эффективной массы электрона (сплошная линия).

Для жидкой фазы ПЭ расхождение результатов эксперимента и теоретической кривой сильно зависит от электронной плотности. Например, при  $n_e = 0,53 \cdot 10^8 \text{ см}^{-2}$  экспериментальные данные довольно точно ложатся на расчетную линию одноэлектронного приближения [88]. Некоторое дополнительное увеличение  $v_e$  в области больших концентраций электронов появляется вследствие реализации режима частых межэлектронных столкновений  $v_{e-e} \gg v_e$  (пунктир), соответствующего результатам (67) и (68) для  $v_e(\omega \rightarrow 0)$ . Даже если положить, что  $v_e$  совпадает с высокотемпературной асимптотикой, найденной для ВК ( $T_e \rightarrow K_e$ , точечная линия), этого будет недостаточно для объяснения отклонения экспериментальных данных от расчетных кривых для жидкой фазы ПЭ.

Из рис. 17 следует, что переход электронной системы в кристаллическое состояние приводит к резкому (примерно двукратному) увеличению экспериментальных значений для  $\mu^{-1}$ . Резкий максимум в области перехода, возможно, связан с наличием термоактивированных дислокаций и дислокационных пар, плотность которых быстро уменьшается при понижении температуры. Следует отметить также небольшой плавный рост сопротивления ВК при понижении температуры.

К сожалению, строгое теоретическое описание проводимости ВК в области низких частот ведущего поля сталкивается с серьезными трудностями вследствие того, что фонон-риплонная система находится в режиме сильной связи. Это, вообще говоря, не позволяет использовать ДСФ свободного ВК для описания частоты столкновений в формуле (67). Вместе с тем имеет смысл упомянуть основные результаты, полученные для режима слабой связи.

В области низких частот однофононное приближение для ДСФ электронной решетки на плоской подложке определяется, в основном, поперечными фононами с  $k \ll g$ :

$$S^{(1ph)}(q, \Omega) = \frac{\hbar q^2}{4m_e c_t^2} e^{-2W_q} \sum_g \delta_{q,g} \times \left[ (n_B(\hbar|\Omega|) + 1) \theta(\Omega) + n_B(\hbar|\Omega|) \theta(-\Omega) \right], \quad (73)$$

где  $n_B(\epsilon)$  — функция распределения Бозе. Непосредственное использование этого приближения в формуле (67) при  $\hbar|\Omega| \ll T$  дает

$$v_e = \frac{T}{32\alpha m_e^2 c_t^2} \sum_g e^{-2W_g} g^2 U_g^2 \left[ \frac{1}{|\omega - \omega_{r,g}|} + \frac{1}{|\omega + \omega_{r,g}|} \right]. \quad (74)$$

Вдали от резонансов ( $\omega \ll \omega_{r,g}$ ) величина  $v_e$  не зависит от частоты поля, и для условий рис. 17 оказывается более чем на порядок выше значений, следующих из приведенных экспериментальных данных. Такое силь-

ное расхождение теории слабой связи и эксперимента объясняется тем, что линейные по  $\mathbf{u}_1$  слагаемые гамильтониана электрон-риплонного взаимодействия (34), приводящие к (74), в условиях сильной связи учитываются перенормировкой фононных частот ВК  $\Omega_s(k)$ . Остающиеся взаимодействия, например многофононные процессы, и слагаемое с  $N_q^{(r)} = 0$  в однофононном приближении для низкочастотной моды, не учтенное при классическом описании фонон-риплонного связывания, приводят к частотам столкновений ВК порядка значений, найденных для невырожденного электронного газа.

Сильная связь фононов ВК с поверхностными возбуждениями жидкого гелия приводит к резкому увеличению инерционного слагаемого  $\omega \operatorname{Re} \mathcal{Z}$  в формуле (60) для измеряемой подвижности. Для частоты ведущего поля, использованной в эксперименте [88] (1 МГц), величина  $\omega M_d / m_e$  имеет тот же порядок, что и  $v_e$ . Поэтому резкое возрастание  $\mu^{-1}$  в основном связано с изменением инерционного слагаемого при вигнеровском переходе. Используя приближение  $\mathcal{Z} = 1 + M_d(T) \times \theta(T_m - T) / m_e$  и соотношение  $T_m = e^2 \sqrt{\pi n_e} / 131$  можно рассчитать скачок  $\mu^{-1}(\omega)$ , вызванный кристаллизацией электронов (рис. 17, сплошная линия). Если подогнать теоретическое значение  $v_e$  к экспериментальным данным в жидкой фазе с помощью постоянного численного коэффициента, то теоретический расчет (штриховая линия) будет неплохо описывать изменения подвижности при вигнеровском переходе. Вклад инерционного слагаемого должен уменьшаться с понижением частоты  $\omega$ , что соответствует экспериментальным наблюдениям [89]. Резкий максимум  $\mu^{-1}$  в окрестности фазового перехода, приписываемый дислокационным парам [88,89], может быть связан с дополнительными инерционными слагаемыми.

#### 4.5. Циклотронный резонанс

Пожалуй, наиболее полно релаксационные свойства ПЭ в гелии исследованы с использованием циклотронного резонанса [55,61]. Измерения проводились в достаточно широкой области температур и электронных концентраций. По ряду причин, уже упоминавшихся здесь, никаких существенных аномалий для ширины резонанса, которые можно было бы связать с вигнеровским переходом, обнаружено не было. Вместе с тем, уже после обнаружения ВК поверхностных электронов, были проведены эксперименты по исследованию циклотронного резонанса ВК [90], результаты которых для ширины резонанса, представленные на рис. 18 (кружки), противоречили теоретическим предсказаниям [54] (штриховая линия). Объяснение этого противоречия было дано значительно позднее [53] в связи с исследованием влияния сильного кулоновского взаимодействия на магнитотранспорт двумерного электронного газа.

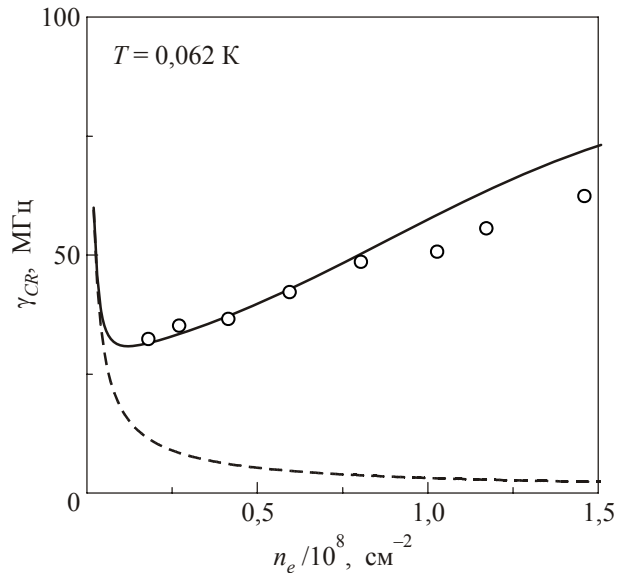


Рис. 18. Ширина циклотронного резонанса в электронном кристалле на поверхности жидкого гелия: экспериментальные данные [90] (кружки), теоретическое предсказание [54] (штриховая линия) и расчет по формуле (75) [53] (сплошная линия).

Теория циклотронного резонанса в вигнеровском кристалле [53] связывает ширину резонанса  $\gamma_{CR}$  с равновесным ДСФ электронной системы  $S(q, \Omega)$  с помощью соотношения  $\gamma_{CR} = 2v_e(\omega)$  и приведенной выше формулы (67) для  $v_e(\omega)$ . В сильных магнитных полях для  $S(q, \Omega)$  можно использовать выражение (31), которое не содержит параметров, расходящихся в пределе  $L \rightarrow \infty$ . Подстановка этого приближения в формулу (67) приводит к следующему результату:

$$\gamma_{CR}(\omega_c) = \frac{(eE_{\perp})^2 \left[ 1 - e^{-\hbar\omega_c/T} \right] T}{2\sqrt{\pi}\hbar\alpha\Gamma_C} \times \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\hbar\omega_c |n-1|/\Gamma_C), \quad (75)$$

где

$$F_n(y) = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} x^{n-1/2} G_B^2(x) \exp(-x - y^2/x) dx, \quad (76)$$

$$G_B(x) = 1 + \frac{\Lambda x}{eE_{\perp} l_B^2} w_{11} \left( \frac{x}{2\gamma^2 l_B^2} \right), \quad (77)$$

$\Gamma_C$  — характерное кулоновское уширение ДСФ, введенное в (32). Остальные обозначения те же, что и в (69).

При проведении численных расчетов по формуле (75) важно не ограничиваться только резонансным слагаемым с  $n=1$  (такое ограничение эквивалентно приближению [54], результат которого показан на рис. 18 штриховой линией). Учет остальных членов суммы по  $n$  (сплошная линия) существенно изменяет зависимость  $\gamma_{CR}(n_e)$ . Падение ширины резонанса с



увеличением  $n_e$ , имеющее место в области малых концентраций, быстро сменяется возрастанием. Это устраняет противоречие между экспериментом и теорией, обсуждавшееся в [90]. Эффект падения ширины циклотронного резонанса в области малых  $n_e$ , так же как и последующий рост  $\gamma_{CR}(n_e)$ , наблюдались и в жидкой фазе ПЭ [55,61]. Хорошее соответствие между данными для  $\gamma_{CR}$ , полученными в жидкой фазе ПЭ и кристаллической фазе, позволяет использовать формулу (31) для описания ДСФ  $S(q, \Omega)$  и транспортных свойств двумерной кулоновской жидкости, в которой средняя потенциальная энергия взаимодействия электронов много больше средней кинетической энергии.

Таким образом, теория линейной проводимости ВК достаточно хорошо описывает импульсную релаксацию ПЭ  $v_e$  в условиях, когда применимо приближение слабой связи между фононами ВК и поверхностными возбуждениями жидкого гелия (высокочастотная проводимость, циклотронный резонанс). В низкочастотном пределе, когда наиболее существенно проявляется режим сильной связи между фононами ВК и риплонами, электронная составляющая эффективной частоты столкновений не имеет достаточно точного описания. Есть лишь качественное понимание значительного уменьшения скорости релаксации импульса электронов по сравнению с результатом теории слабой связи и оценка по порядку величины, соответствующая поведению сильнокоррелированной электронной жидкости. В этом пределе достаточно точно находятся эффективная частота столкновений ВК, обусловленная торможением поверхностных лунок  $v_D$ , которая доминирует для ПЭ над жидким  $^3\text{He}$ , и инерционные слагаемые ( $\omega \text{ Re } Z$ ) в выражении для электронной проводимости над жидким  $^4\text{He}$ , вызванные появлением массивных лунок.

## 5. Нелинейные явления

### 5.1. Основные экспериментальные результаты и модели

Поведение электронного кристалла над свободной поверхностью жидкого гелия в переменных ведущих полях большой амплитуды характеризуется многочисленными и своеобразными нелинейными явлениями. Прежде всего отметим, что пиннинг ВК на статических неоднородностях и сопутствующие ему нелинейные явления оказываются возможными для системы ПЭ над гелиевой пленкой, покрывающей твердую подложку. Ниже критической температуры  $T_m$  сопротивление системы экспоненциально возрастает с понижением температуры  $R = R_0 \exp(-\gamma T / T_m)$  [8], как показано на рис. 19, что соответствует пиннингу кристалла на дефектах твердой подложки. С увеличением амплитуды ведущего поля  $E$ , изменяющегося пропорционально напряжению возбуждения  $V_{in}$ , сопротивление не ме-

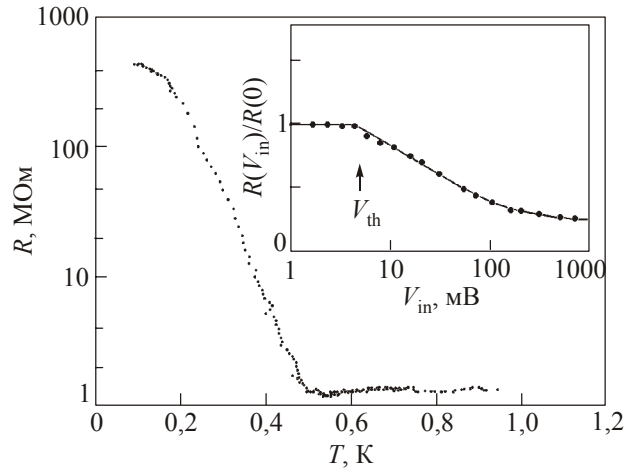


Рис. 19. Сопротивление ВК на поверхности гелиевой пленки, покрывающей шероховатую твердую подложку, как функция температуры для  $n_e = 2 \cdot 10^9 \text{ см}^{-2}$  и  $d = 380 \text{ \AA}$  [8]. На вставке показана зависимость сопротивления от напряжения возбуждения  $V_{in}$  при  $n_e = 5 \cdot 10^9 \text{ см}^{-2}$ ,  $d = 320 \text{ \AA}$  и  $T = 690 \text{ мК}$ .

няется, пока поле не достигнет некоторого порогового значения  $E_{th} \simeq 5 \text{ мВ/см}$  (см. вставку на рис. 19). В области  $E > E_{th}$  сопротивление кристалла плавно уменьшается, а затем при некотором критическом значении  $E = E_N \sim 100 \text{ мВ/см}$  резко появляется широкополосный шум большой амплитуды. Этот шум, по-видимому, обусловлен неравномерным скольжением ВК в поле потенциала пиннинга.

Подобные явления (пороговая зависимость сопротивления от ведущего поля и широкополосный шум) наблюдались и в двумерном электронном газе полупроводниковых структур, помещенных в сильное магнитное поле [14–16]. С увеличением температуры пороговая зависимость от ведущего поля сменяется плавной квадратичной зависимостью. При нагреве исчезает также и широкополосный шум, что свидетельствует о плавлении ВК. Характерная зависимость порогового потенциала  $V_{th}$  от величины, обратной степени заполнения уровня Ландау ( $\nu^{-1}$ ), приведена на рис. 20. Хорошо видно, что, кроме непроводящей фазы, расположенной в области сильных магнитных полей ( $\nu < 1/5$ ), имеется возвратная непроводящая фаза (RIP) в области  $2/9 > \nu > 1/5$ . Такое поведение порогового потенциала хорошо коррелирует с зависимостью  $R_{xx}(B)$ , представленной ранее на рис. 2. Важно, что порог проводимости появляется одновременно с магнитоплазменными резонансами для гибридной моды  $\Omega_-(k)$  [15].

Как отмечалось выше, на свободной поверхности жидкого гелия нет статических дефектов, поэтому здесь возможно лишь поляронное связывание ВК с поверхностью жидкого гелия, в результате которого возникает зацепление электронной и луночной подрешеток. В отсутствие магнитного поля в ячейке цилиндрической геометрии обычно возбуждается радиальное

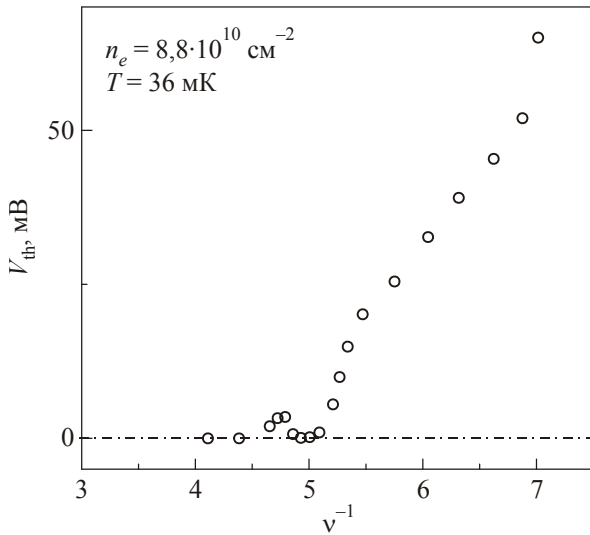


Рис. 20. Пороговый потенциал как функция обратной степени заполнения уровня Ландау для двумерной электронной системы в структуре GaAs/GaAlAs [15].

движение электронов и соответствующие ему изменения электронной плотности. Электронная скорость  $v_r$  зависит от расстояния до центра  $r$  и достигает максимума при некотором значении  $r$ , примерно равном половине радиуса электрода. Включение постоянного магнитного поля, перпендикулярного электронному слою, индуцирует вращение электронов вокруг оси симметрии с некоторой скоростью  $v_\varphi \gg v_r$ . В жидком состоянии  $v_\varphi$  совпадает со скоростью холловского дрейфа  $v_H$ . Для кристаллического состояния это условие приближенно выполняется лишь для достаточно высоких частот переменного ведущего поля, удовлетворяющих условию (58).

При низких частотах и больших амплитудах неоднородного электрического поля  $E_r$ , ориентированного вдоль радиуса, в электронном кристалле, находящемся в магнитном поле, возникают поперечные напряжения, которые могут разрушить упорядоченное состояние электронов. Такой сценарий, по утверждению авторов, реализован в работе Гианетта и Вайлена [21]. В ней при достаточно большом фиксированном значении амплитуды ведущего поля  $E_{\max} \simeq 0,35$  В/см наблюдались скачки величины обратной магнитопроводимости ВК как функции напряженности магнитного поля (см. рис. 21). Это явление сопровождалось гистерезисом: скачок  $\sigma_{xx}^{-1}$  вверх происходил при  $B_{c\uparrow}$ , заметно превышающем значение  $B_{c\downarrow}$  для резкого падения вниз. В кристаллической фазе магнитосопротивление почти не зависело от напряженности магнитного поля. После скачка вверх наблюдался классический рост величины  $\sigma_{xx}^{-1}(B) \simeq R_0(1 + \omega_c^2/v_e^2)$  (здесь  $R_0$  — сопротивление при  $B = 0$ ), соответствующий поведению не-

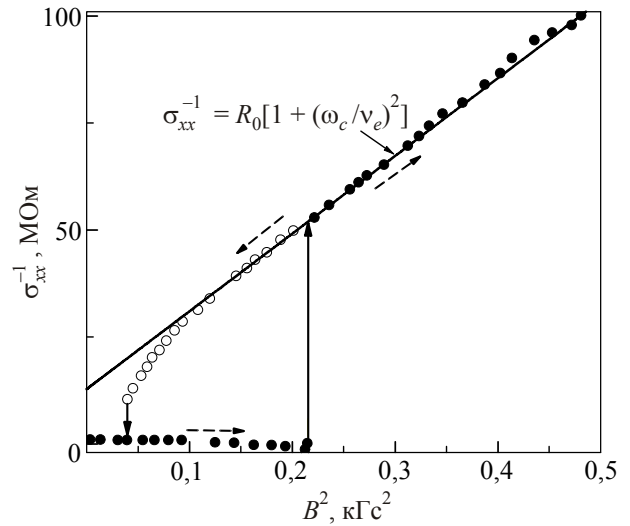


Рис. 21. Величина обратная магнитопроводимости ( $\sigma_{xx}^{-1}$ ) для ВК на поверхности жидкого гелия в сильном ведущем поле как функция  $B^2$  при  $T = 0,1$  К,  $n_e = 10^8$  см $^{-2}$  и  $\omega / 2\pi = 31$  кГц (кружки) [21].

вырожденного электронного газа в слабом магнитном поле. Поэтому авторы предположили, что после скачка электронная система не упорядочена из-за так называемого сдвигового плавления ВК. При изменении амплитуды ведущего поля значения  $B_{c\uparrow}$  и  $B_{c\downarrow}$  изменялись обратно пропорционально  $E_{\max}$ .

Иное объяснение скачка магнитосопротивления ВК в сильных ведущих полях было выдвинуто в работах Ширахама и Коно [22,91]. В этих исследованиях измерялась величина  $\sigma_{xx}^{-1}$  как функция амплитуды потенциала возмущения  $V_{in}$ , подаваемого на электрод, при постоянном значении напряженности магнитного поля. Эти экспериментальные данные показаны на рис. 22. Хорошо видно, что фазовый переход в электронной системе качественно меняет зависимость  $\sigma_{xx}^{-1}(V_{in})$ . Если выше температуры плавления  $\sigma_{xx}^{-1}$  слабо зависит от  $V_{in}$  и при малых возмущениях можно говорить о линейном режиме, то ниже температуры перехода во всем используемом диапазоне  $V_{in}$  нет линейного режима. При самых слабых возмущениях величина  $\sigma_{xx}^{-1}$  быстро возрастает с увеличением  $V_{in}$ , достигает максимума, затем резко падает, переходит в слабоосциллирующий режим (для  $T = 8,5$  мК), и при некотором критическом значении, зависящем от  $T$ , скачком изменяется более чем на порядок. Для объяснения скачка  $\sigma_{xx}^{-1}$  авторы предложили модель скользящего ВК. В этой модели при достаточно сильном ведущем поле электронная решетка соскальзывает с периодического потенциального рельефа, создаваемого луночной решеткой. При этом считается, что рельеф поверхности под электронами не изменяется при движении ВК, пока ведущее поле  $E_{\parallel}$  не превысит некоторого критиче-

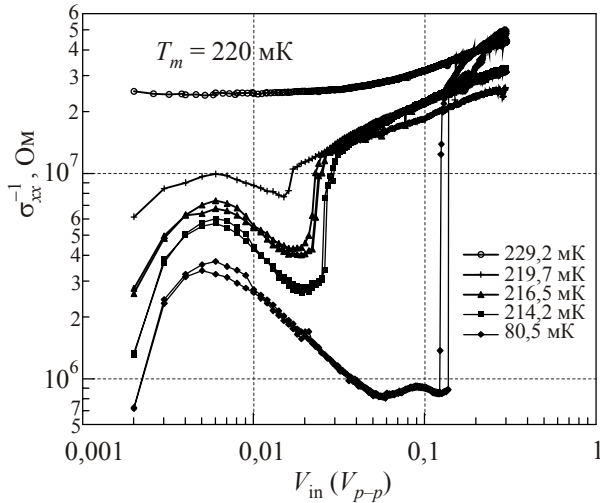


Рис. 22. Обратная проводимость  $\sigma_{xx}^{-1}$  как функция амплитуды потенциала возмущения при  $n_e = 1,1 \cdot 10^8 \text{ см}^{-2}$ ,  $\omega/2\pi = 100 \text{ кГц}$  и  $E_{\perp} = 92,5 \text{ В/см}$  [22].

ского значения порядка  $E_{\perp} (\nabla \xi)_{\max}$ . После этого луночный кристалл исчезает, а упорядоченное состояние электронов остается.

В связи с двумя упомянутыми выше экспериментами следует отметить интересные измерения подвижности ВК как функции амплитуды ведущего поля [92], проведенные в нулевом магнитном поле (рис. 23). С увеличением ведущего поля подвижность ВК сначала быстро уменьшается, что, по-видимому, соответствует спадающему участку  $\sigma_{xx}^{-1}(V_{in})$  на рис. 22, где  $\omega_c \gg v_e$  и, следовательно,  $\sigma_{xx}^{-1} \propto 1/v_e$ . Затем при некотором критическом значении ведущего поля, порядка 10 мВ/см, наблюдается скачок, а после него подвижность начинает возрастать с увеличением поля. В этой работе также высказывалось предположение о том, что

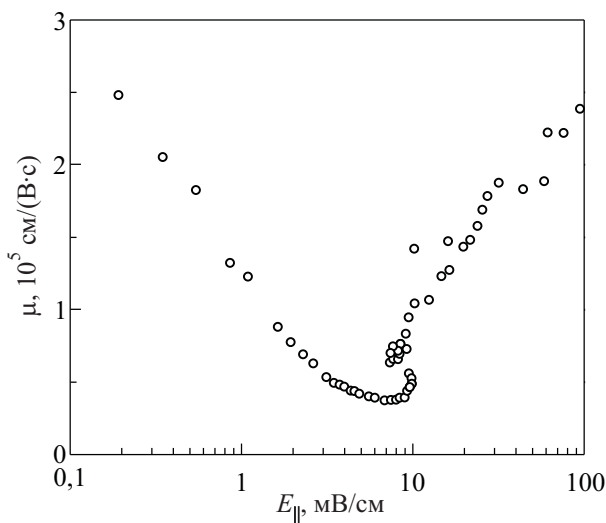


Рис. 23. Подвижность ВК над жидким  $^4\text{He}$  как функция ведущего электрического поля при  $n_e = 6 \cdot 10^8 \text{ см}^{-2}$  и  $T = 90 \text{ мК}$  [92].

скачкообразное изменение подвижности электронов обусловлено соскальзыванием ВК с потенциального рельефа луночной решетки, хотя не исключалась возможность, что причина такой аномалии — пластическая деформация кристалла.

Последующие теоретические исследования показали, что при быстром движении ВК по поверхности гелия возникают новые интересные явления, связанные с изменением рельефа поверхности под движущимися электронами.

### 5.2. Брэгг-черенковское излучение

Основные изменения, происходящие с проводимостью ВК при быстром движении вдоль поверхности гелия, можно качественно понять, рассматривая бесконечную электронную систему в скрещенных магнитном и электрическом полях, не зависящих от времени. В обычных экспериментальных условиях холловская скорость электронов  $v_H$  много больше их скорости вдоль ведущего поля. Ввиду особенностей спектра капиллярных волн ( $\omega_{r,q} \propto q^{3/2}$ ) фазовая скорость риплонов, участвующих в рассеянии электронов, очень мала. Поэтому в данной системе легко реализуется черенковское излучение риплонов. При наличии пространственного упорядочения электроны, двигающиеся как целое с большой скоростью, могут излучать поверхностные возбуждения когерентно [23]. Этот эффект был назван излучением Брэгга–Черенкова (БЧ).

Первоначально когерентное БЧ излучение рассматривалось в предположении слабой связи между фононами ВК и риплонами [23]. При этом использовалось соотношение типа (67), связывающее эффективную частоту столкновений (силу трения, действующую на ВК) и ДСФ электронной системы  $S(\mathbf{q}, \omega)$ . Вследствие того, что электронная система находится в равновесии в системе координат, движущейся с холловской скоростью, галилеевская инвариантность дает  $S(\mathbf{q}, \omega) \simeq S_0(\mathbf{q}, \omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_H)$ , где  $S_0$  — ДСФ равновесной системы. В постоянном ведущем поле ( $\omega = 0$ ) резонансное возрастание эффективной частоты столкновений  $v_e$  при  $\mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_H \rightarrow \omega_{r,g}$  легко увидеть из однофононного приближения для  $v_e$ , приведенного в (74). В этом выражении частоту поля  $\omega$  следует заменить на  $-\mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_H$ . Отметим, что оба слагаемых в квадратных скобках выражения (74) дают резонансный вклад в частоту столкновений, поскольку  $\mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_H$  меняет знак при замене  $\mathbf{g} \rightarrow -\mathbf{g}$ .

Для ПЭ в гелии реализуется режим сильной связи между ВК и риплонами. В этом пределе правая часть уравнения (39), описывающая давление электронов на поверхность жидкого гелия, пропорциональна  $\exp(-i\mathbf{g} \cdot \mathbf{v}t)$ , что эквивалентно наличию переменного по времени возмущения с частотой  $\omega = \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}$  (здесь  $\mathbf{v}$  — скорость ВК). При этом решение (39) может быть записано в виде  $\xi_{\mathbf{g}}(\mathbf{v}) \exp(-i\mathbf{g} \cdot \mathbf{v}t)$ , где

$$\xi_{\mathbf{g}}(\mathbf{v}) = -\frac{n_e g \tilde{U}_g}{\rho \left[ \omega_{r,g}^2 - (\mathbf{g} \cdot \mathbf{v})^2 - 2i\gamma_g \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \right]}. \quad (78)$$

Отсюда следует, что глубина поверхностных лунок резко возрастает, когда  $\mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \rightarrow \omega_{r,g}$ , что соответствует условию для БЧ излучения капиллярных волн. При наличии достаточно сильного магнитного поля  $\mathbf{v} \simeq \mathbf{v}_H$ . В таком подходе очевидно, что нелинейные БЧ резонансы для постоянного ведущего поля возникают подобно электрон-риплонным резонансам при слабом переменном ведущем поле. Соотношение (78) получено в предположении о стационарном ( $\omega = 0$ ) движении недеформируемого ВК, сильно связанного с луночной решеткой. Фононы ВК лишь формируют распределение электронной плотности в узлах решетки.

Увеличение глубины поверхностной лунки должно приводить к увеличению ее присоединенной массы  $M_d(\mathbf{g} \cdot \mathbf{v})$  и силы  $F_D$ , действующей на электроны со стороны лунок. Из-за конечного затухания риплонов сила  $F_D$  имеет резкий максимум при  $\mathbf{g} \cdot \mathbf{v} = \omega_{r,g}$ . При увеличении ведущего поля сверх порогового значения  $E_{th} = (F_D)_{max}$  баланс сил, действующих на электронную решетку, оказывается невозможным и происходит динамическое развязывание электронной и луночной подрешеток [24]. При этом пороговая скорость  $v_{th}$  привязана к наименьшей фазовой скорости риплонов  $\omega_{r,g1}/g_1^{(v)}$  вдоль заданного направления. Считается, что при развязывании подрешеток упорядочение электронной системы сохраняется. Поэтому, в некотором смысле, модель ВК, соскальзывающего с недеформируемого рельефа поверхности [22], можно рассматривать как упрощенную модель развязывания электронной и луночной подрешеток.

Приведенный выше анализ основывается на стационарной модели, когда ведущее электрическое поле не зависит от времени. В эксперименте с ПЭ используются не постоянные, а переменные ведущие поля. При этом за период колебаний тока ВК может несколько раз выполняться условие для БЧ излучения. Для слабого затухания капиллярных волн возмущения поверхности, вызванные прохождением этих критических точек, не успевают релаксировать к началу нового периода колебаний и в системе реализуется новый режим БЧ излучения. Теоретический анализ показывает, что из-за конечной частоты ведущего поля нелинейные соотношения между основными фурье-компонентами ведущего поля  $E_{||}$  и скорости ВК существенно изменяются [25]. Формула (44) связывает силу, действующую на ВК со стороны луночной решетки  $F_D$ , и смещение кристалла как целого  $u(t)$ . Считая ток заданным, полагаем, что смещения кристалла происходят вдоль оси  $x$  и имеют простую гармоническую зависимость от времени:  $u^{(x)}(t) = (v_0^{(x)}/\omega) \sin \omega t$ , где  $v_0^{(x)}$  — амплитуда скорости. В равновесии электриче-

ское поле должно соответствовать условию  $eE_{||} = F_D$ , поэтому зависимость  $E_{||}(t)$ , соответствующая заданному движению  $u_x(t)$ , вполне определяется соотношением (44).

В экспериментах с переменным ведущим полем, как правило, измеряются основные компоненты фурье-сигнала. Поэтому рассмотрим только главные Фурье-компоненты, считая

$$\mathbf{E}_{||}(t) \simeq \mathbf{E}_c \cos(\omega t) + \mathbf{E}_s \sin(\omega t). \quad (79)$$

Подстановка заданной зависимости  $u^{(x)}(t)$  в (44) позволяет легко найти  $E_c^{(x)}$  и  $E_s^{(x)}$ . Вводя характерную скорость  $v_{r,g}^{(x)} = \omega_{r,g}/g^{(x)}$ , окончательный результат может быть представлен в следующем виде [25,93]:

$$E_{c,s}^{(x)}(v_0^{(x)}) = \frac{n_e}{ep} \sum_{\mathbf{g}} \frac{g^{(x)} \tilde{U}_g^2}{\omega_{r,g}^2} \times Q_{c,s}(v_0^{(x)}/v_{r,g}^{(x)}, \gamma_g/\omega_{r,g}, \omega/\omega_{r,g}), \quad (80)$$

где

$$Q_c(v', \gamma', \omega') = 4 \int_0^{\infty} \sin(2y) e^{-2\gamma' y} \times \cos(\omega' y) J_1[2v' \sin(\omega' y)/\omega'] dy, \quad (81)$$

$J_n(z)$  — функция Бесселя, выражение для функции  $Q_s$  отличается от выражения для  $Q_c$  простой заменой  $\cos(\omega' y)$  на  $\sin(\omega' y)$ , а затухание риплонов считаем малым ( $\hat{\omega}_g \simeq \omega_{r,g}$ ). Параметры  $v'$ ,  $\gamma'$  и  $\omega'$  представляют собой безразмерные скорость ВК, затухание риплонов и частоту ведущего поля.

Интегралы  $Q_c$  и  $Q_s$  как функции безразмерной скорости  $v' = v_0^{(x)}/v_{r,g}^{(x)}$  описывают нелинейную динамику двумерного вигнеровского кристалла в широкой области частот ведущего поля. Для низких частот  $\omega \ll \omega_{r,1}$  в выражении (79) преобладает косинус-компонента Фурье ( $E_c^{(x)} \gg E_s^{(x)}$ ), которая осциллирует в фазе с электронной скоростью  $v^{(x)}(t) = v_0^{(x)} \cos(\omega t)$ . В этом случае зависимость  $Q_c(v')$  имеет форму зубца пилы. Например, в адиабатическом режиме  $\omega \ll \gamma_g$  при  $\gamma_g \rightarrow 0$  имеем

$$Q_c(v', 0, 0) \rightarrow \frac{2\theta(v'-1)}{v' \sqrt{(v')^2 - 1}}. \quad (82)$$

Таким образом, фурье-компонента  $E_c$  резко возрастает при  $v' = v_0^{(x)}/v_{r,g}^{(x)} \rightarrow 1$ , что соответствует когерентному БЧ излучению капиллярных волн. Интересно отметить, что хвосты функции  $Q_c(v')$  не зависят от слабого затухания риплонов и оказываются конечными даже при  $\gamma_g = 0$ .

В большинстве экспериментов с ПЭ в гелии реализуется неадиабатический режим  $\gamma_g < \omega$ , когда большие смещения поверхности гелия, возбуждаемые электронной решеткой при прохождении условия  $v^{(x)}(t) = v_{r,g}^{(x)}$ , не успевают полностью релаксировать за период коле-

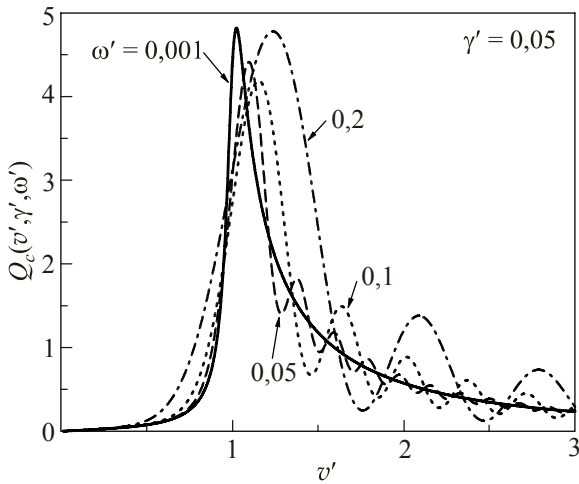


Рис. 24. Изменения формы отдельного ВЧ пика для  $E_{||-v}$  характеристики, описываемого функцией  $Q_c(v')$ , при различных частотах переменного тока ( $\omega' = \omega/\omega_{r,g}$ ).

баний тока. В этом случае токовые характеристики ВК могут сильно отличаться от результатов для адиабатического и стационарного режимов. График функции  $Q_c(v')$ , описывающей форму БЧ максимумов  $E_c^{(x)}(v_0^{(x)})$ , приведен на рис. 24 для различных частот ведущего поля. При очень низкой частоте  $\omega' = 0,001 \ll \gamma' = 0,05$  кривая  $Q_c(v')$  подобна асимптотике (82), полученной для адиабатического режима в пределе  $\gamma' = 0$ . Ее форма напоминает вид зубца пилы с резким левым краем. Увеличение частоты ведущего поля при фиксированном затухании  $\gamma'$  делает левый край кривой более плавным. В то же время на правом хвосте функции  $Q_c(v')$  появляются характерные осцилляции, период которых зависит от соотношения между  $\omega$  и  $\omega_{r,g}$ . Эти осцилляции появляются из-за интерференции риплонов, излученных в разные моменты времени, при условии, что амплитуда колебаний скорости превышает  $v_{r,g}^{(x)}$ .

Поскольку  $Q_c(v')$  резко возрастает при  $v_0^{(x)} \rightarrow v_{r,g}^{(x)}$ , соответствующая компонента поля  $E_c^{(x)}(v_0^{(x)})$  изменяется при практически неизменной скорости ВК. Такое явление наблюдалось экспериментально при  $\omega/2\pi \sim 4$  кГц [94]. Ограничение, накладываемое на амплитуду скорости, приводит к магнетопроводимости  $\sigma_{xx}$ , пропорциональной амплитуде входного напряжения  $V_{in}$ , что коррелирует со спадающим участком на зависимости  $\sigma_{xx}^{-1}(V_{in})$  в экспериментах [22,91] (рис. 22). Следует отметить также, что осцилляции проводимости как функции амплитуды холловской скорости, подобные осцилляциям на правом крыле зависимости  $Q_c(v')$ , наблюдались экспериментально для ПЭ в ограниченной геометрии [95].

В случае очень высоких частот ведущего поля  $\omega \gg \omega_{r,g}$  и слабого затухания риплонов, в выражении (79) преобладает синус-компонента Фурье  $E_s^{(x)} \gg E_c^{(x)}$ , которая осциллирует в фазе с колебаниями смещения

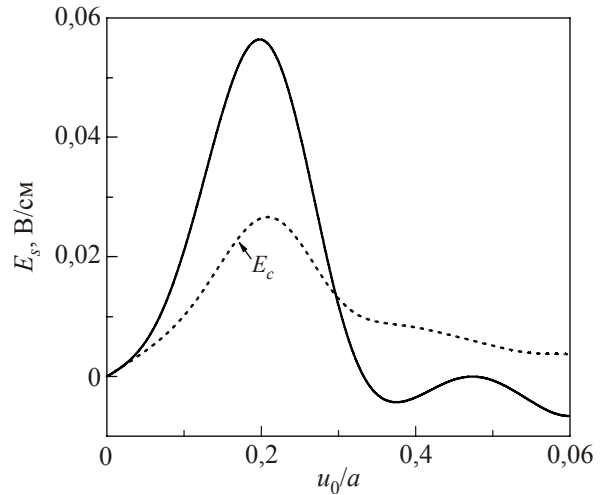


Рис. 25. Сравнение компонент Фурье  $E_s^{(x)}$  (сплошная линия) и  $E_c^{(x)}$  (пунктир), приведенных в (80), как функций амплитуды высокочастотных ( $\omega/2\pi = 37$  МГц) смещений ВК  $u_0$  при  $T = 0,15$  К и  $n_e = 8,5 \cdot 10^8$  см $^{-2}$  [93].

ВК  $u^{(x)}(t) = u_0 \sin(\omega t)$ , а не скорости, как это было для низких частот (здесь  $u_0 = v_0^{(x)}/\omega$ ). Сравнение компонент  $E_s^{(x)}$  и  $E_c^{(x)}$  приведено на рис. 25 для достаточно малого затухания  $\gamma_g/\omega_{r,g} = 0,05$ , которое все же значительно больше затухания риплонов в чистом  $^4\text{He}$ . Важно, что компонента  $E_s^{(x)}$  не зависит от слабого затухания, а  $E_c^{(x)}$  убывает при уменьшении  $\gamma_g$ . Поэтому для жидкого  $^4\text{He}$  компонентой  $E_c^{(x)}$  можно пренебречь. В режиме заданного тока кривая  $E_s^{(x)}(u_0)$  описывает синус-компоненту силы  $[eE_s^{(x)}(u_0)]$ , действующей на ВК со стороны луночной решетки при быстропеременных смещениях определенной амплитуды.

Если в эксперименте реализуется режим заданного напряжения, то при ведущих полях, амплитуда которых превышает пороговое значение  $E_{th} = (E_s^{(x)})_{max}$ , баланс сил, приложенных к ВК, оказывается невозможным. При этом система должна перейти в новое состояние с большой амплитудой колебаний. Для условий рис. 25 величина  $E_{th} \simeq 56$  мВ/см. Этот переход напоминает модель ВК, соскальзывающего с неподвижного рельефа поверхности. Действительно, на высоких частотах  $\omega \gg \omega_{r,g}$  луночная решетка почти не движется, а пороговое значение  $E_{th}$  не зависит от затухания риплонов. Даже численно модель соскальзывающего ВК дает значение  $E_{th} \simeq 46$  мВ/см, близкое к значению, следующему из рис. 25.

### 5.3. Нелинейная проводимость на поверхности ферми-жидкости

Как отмечено выше, сильная вязкость ферми-жидкости приводит к тому, что релаксация импульса ВК над  $^3\text{He}$  в основном определяется эффектами торможения поверхностных лунок ( $v_D \gg v_e$ ). В этом случае линейный режим проводимости ВК реализуется в обычных для эксперимента с ПЭ в гелии ведущих по-

лях, а экспериментальные данные хорошо согласуются (см. рис. 14) с простым теоретическим описанием процесса передачи импульса от движущейся лунки к объемным возбуждениям жидкого  $^3\text{He}$ . В то же время оказывается, что очень большие значения коэффициента затухания риплонов  $\gamma_g$  могут приводить к нелинейному режиму проводимости ВК при скоростях движения, значительно меньших критической скорости  $v_1 = \omega_{r,g_1}/g_1$  для БЧ излучения капиллярных волн [41,96].

Причину указанной выше нелинейности легко понять из формулы (78) для деформационного рельефа  $\xi_g(\mathbf{v})$ , движущегося с некоторой произвольной скоростью  $\mathbf{v}$ . В этой формуле  $\mathbf{g} \cdot \mathbf{v}$  играет роль частоты внешнего возмущения. Если для малых значений коэффициента затухания, характерных для жидкого  $^4\text{He}$ , величина  $|\xi_g(\mathbf{v})|$  возрастает при  $\mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \rightarrow \omega_{r,g}$  из-за БЧ эффекта, то при очень большом его значении  $\gamma_g \gg \omega_{r,g}$  величина  $|\xi_g(\mathbf{v})|$  убывает при увеличении скорости, так как параметр  $2\gamma_g \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}$  в знаменателе правой части формулы (78) значительно превосходит  $(\mathbf{g} \cdot \mathbf{v})^2$ .

Типичная  $E_{\parallel} - v$  характеристика, рассчитанная с учетом конечности электронного вклада  $v_e(\mathbf{v}) = \text{const}$ , представлена на рис. 26. При малых скоростях движения сила  $F_D$ , действующая на ВК со стороны луночной решетки, линейно возрастает с увеличением скорости ( $E_{\parallel} \propto v$ , здесь  $E_{\parallel} = F_D/e$ ). Следует отметить, что  $F_D$  равна по величине силе трения  $F_{\text{fric}}$ , действующей на луночную решетку со стороны жидкого гелия, и направлена в противоположную сторону. Из-за уменьшения  $|\xi_g(\mathbf{v})|$  на кривой  $E_{\parallel}(v)$  появляется максимум, а затем происходит быстрое падение силы трения лу-

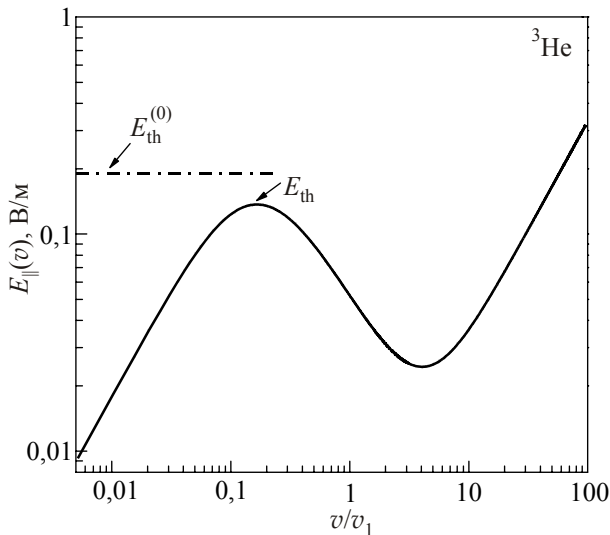


Рис. 26. Типичная  $E_{\parallel} - v$  характеристика для нелинейного транспорта двумерного ВК на поверхности жидкого  $^3\text{He}$  (сплошная линия) [41]. Пороговое значение ведущего поля  $E_{\text{th}}^{(0)}$  для модели соскальзывания ВК на недеформируемом рельефе поверхности показано штрих-пунктирной линией.

ночной решетки. Очевидно, что при ведущих полях  $E_{\parallel}$ , превышающих пороговое значение  $E_{\text{th}} \equiv (F_D/e)_{\text{max}}$ , баланс сил, действующих на ВК, оказывается невозможным для малых скоростей движения  $v < v_1$ . Соответствующее критическое значение  $v$  будем называть пороговой скоростью  $v_{\text{th}}$ . При больших скоростях  $v \gg v_1$  возможно новое равновесие из-за наличия электронной составляющей в частоте релаксации импульса  $v_e$ . При измерениях проводимости ПЭ в гелии часто фиксируется ток в системе, поэтому спадающий участок кривой  $E_{\parallel}(v)$  также хорошо наблюдается экспериментально [96].

При изменении температуры в широком интервале пороговое значение поля  $E_{\text{th}}$  изменяется в значительно меньшей степени, чем пороговое значение скорости  $v_{\text{th}}$ . Это обстоятельство хорошо иллюстрирует рис. 27, где представлены экспериментальные данные и теоретические расчеты. Сильная температурная зависимость  $v_{\text{th}}$  обусловлена тем, что нелинейная добавка в знаменателе формулы (78)  $2\gamma_g \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}$  пропорциональна коэффициенту затухания риплонов. Поэтому  $v_{\text{th}}(T) \propto 1/\gamma_g(T)$ . На рис. 27 теоретическая кривая  $v_{\text{th}}(T)$  подогнана к экспериментальным данным с помощью коэффициента пропорциональности порядка единицы. Поскольку для жидкого  $^3\text{He}$  сопротивление ВК пропорционально  $\gamma_g$ , вполне очевидна корреляция между зависимостями  $v_{\text{th}}(T)$  и  $\sigma(T)$  (см. рис. 14). Представляется удивительным, что расчетная зависимость  $E_{\text{th}}(T)$  на рис. 27 ведет себя подобно пороговому полю  $E_{\text{th}}^{(0)}(T)$  в модели соскальзывания ВК по недеформируемой луночной решетке. При этом, как правило,  $E_{\text{th}}$  немного меньше  $E_{\text{th}}^{(0)}$  [41].

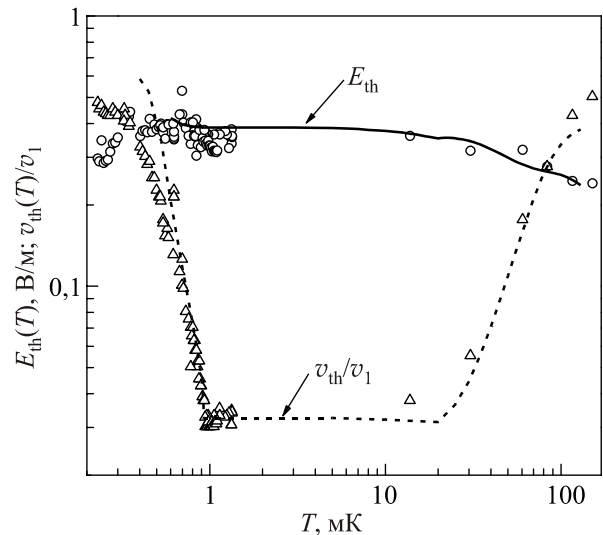


Рис. 27. Температурные зависимости пороговых значений поля (кружки — эксперимент, сплошная линия — теория) и скорости (треугольники — эксперимент, штриховая линия — теория) для ВК над жидким  $^3\text{He}$  при  $n_e = 1,5 \cdot 10^8 \text{ см}^{-2}$  [96].

5.4. Эксперименты с двумя возмущающими полями

В обсуждавшихся выше экспериментах одно и то же электрическое поле одновременно вызывало сильное возмущение вигнеровской решетки и использовалось для измерения характеристик системы, таких как проводимость и эффективная масса. Возможна и другая постановка эксперимента, когда сильное нелинейное возмущение ВК производится одним электрическим полем (обычно, высокой частоты), а для измерения проводимости используется слабое ведущее поле другой частоты. В таком подходе знание линейной проводимости в отсутствие разрушающего поля позволяет определить, насколько возмущаемая электронная система далека от своего равновесного состояния. Первый эксперимент такого рода был проведен с использованием микроволнового (МВ) излучения [97].

Следует напомнить, что в направлении, перпендикулярном поверхности жидкого гелия, спектр ПЭ подобен спектру атома водорода  $\varepsilon_l = -\Delta_R/l^2$ , где  $l = 1, 2, 3, \dots$ , а  $\Delta_R$  — характерная ридберговская энергия ( $\Delta_R \simeq 8$  К для жидкого  $^4\text{He}$  и  $\Delta_R \simeq 4,2$  К для жидкого  $^3\text{He}$ ). Прижимающее электрическое поле приводит к сдвигу поверхностных уровней (линейный эффект Штарка), что позволяет подстраивать электронную систему в резонанс к микроволновому излучению заданной частоты. Резонансные свойства ПЭ, связанные с возбуждением ридберговских уровней, подробно изучались в самом начале исследований этой электронной системы. Недавние исследования проводимости ПЭ в условиях МВ резонанса показали, что в жидкой фазе электронная система легко перегревается из-за квазиупругого распада электронов с возбужденного на основной поверхностный уровень [98]. Происходит это потому, что почти вся энергия возбуждения  $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$  переходит в кинетическую энергию продольного движения электрона, которая затем перераспределяется между всеми ПЭ вследствие частых межэлектронных столкновений. При этом теоретическая зависимость  $\sigma(T_e)$  позволяла достаточно точно оценить степень неравновесности электронной системы.

В кристаллическом состоянии ПЭ резонансное МВ излучение также должно приводить к разогреву электронной подсистемы и в конце концов привести к плавлению ВК. В эксперименте [97] для измерения  $\sigma_{xx}^{-1}$  над жидким  $^3\text{He}$  использовалось относительно слабое магнитное поле  $B_z = 160$  Э. В отсутствие МВ излучения величина  $\sigma_{xx}^{-1} \propto 1/v$  резко уменьшалась с понижением температуры в области  $T \simeq T_m = 170$  мК из-за поляронного эффекта, приводящего к появлению поверхностных лунок и связанной с ними дополнительной частоты релаксации импульса  $v_D$ . Ниже температуры плавления ( $T = 150$  мК) при наличии резонансного МВ излучения величина  $\sigma_{xx}^{-1}$  сильно возрастала (примерно в 5 раз). В то же время анало-

гичное облучение жидкой фазы ПЭ при  $T = 190$  мК приводило к значительно меньшему увеличению  $\sigma_{xx}^{-1}$ , порядка 25%. Большое увеличение  $\sigma_{xx}^{-1}$  для  $T = 150$  мК объяснялось плавлением ВК и потерей большой луночной составляющей в импульсной частоте релаксации  $v_D$ .

Неожиданным оказалось плавное изменение фотопроводимости как функции мощности МВ излучения, что контрастирует с резкой температурной зависимостью  $\sigma_{xx}^{-1}$  вблизи фазового перехода. Авторы [97] объясняют такое поведение локальным разрушением ВК при каждом акте распада возбужденного поверхностного состояния. Распад возбужденного поверхностного состояния в некотором смысле подобен выстрелу электроном с большой кинетической энергией продольного движения по ближайшим соседям ВК. В результате разрушение кристалла и потеря лунок вначале происходят локально, что приводит к значительно более плавному изменению проводимости ВК, чем при однородном нагреве системы.

В работе [97] исследовалось также влияние резонансного МВ излучения на зависимость  $\sigma_{xx}^{-1}(B)$  для достаточно больших значений ведущего электрического поля. Напомним, что для ПЭ над жидким  $^4\text{He}$  эта зависимость характеризуется скачкообразными изменениями и гистерезисом [21], показанными на рис. 21. В случае жидкой подложки  $^3\text{He}$  в отсутствие МВ излучения наблюдаются более плавные изменения, представленные на рис. 28 (кружки). В отличие от ПЭ над жидким  $^4\text{He}$  здесь величина  $\sigma_{xx}^{-1}$  как функция  $B^2$  в области слабых магнитных полей классически возрастает со скоростью, соответствующей малой подвижности поверхностных лунок на поверхности жидкого  $^3\text{He}$ . Затем при некотором критическом значении  $B_c$

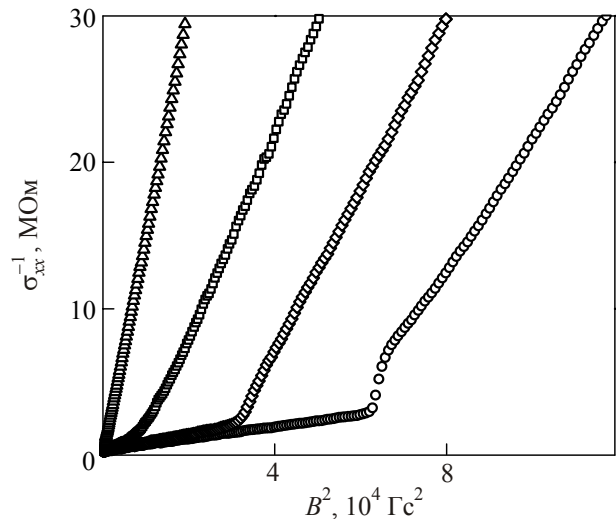


Рис. 28. Величина  $\sigma_{xx}^{-1}$  как функция  $B^2$  для ПЭ над жидким  $^3\text{He}$  при  $T = 100$  мК,  $n_e = 5,5 \cdot 10^7 \text{ см}^{-2}$  и различных значениях мощности МВ излучения:  $P_{MW} = 0$  (кружки),  $< 0,01$  мкВт (ромбы),  $0,02$  мкВт (квадраты) и  $5,1$  мкВт (треугольники) [97].

происходит резкое увеличение  $\sigma_{xx}^{-1}$  (скачок) и переход экспериментальных данных на другую классическую зависимость, соответствующую существенно большей подвижности электронов. Очевидно, что наблюдаемый скачок связан с резким уменьшением импульсной частоты релаксации вследствие потери поверхностных лунок. Удивительным оказалось то, что облучение ВК микроволновым излучением даже очень малой мощности  $P \lesssim 0,01$  мкВт сильно уменьшает пороговое значение магнитного поля  $B_c$ . При этом и величина скачка уменьшается настолько, что он становится практически незаметным, а зависимость  $\sigma_{xx}^{-1}$  от  $B^2$  приобретает характерный излом. Причина такого сильного влияния МВ излучения на нелинейный магнитотранспорт ВК пока не установлена. При дальнейшем увеличении мощности МВ излучения исчезает и излом и зависимость  $\sigma_{xx}^{-1}(B)$  приобретает классический вид, соответствующий частоте столкновений, не зависящей от напряженности магнитного поля.

В отличие от поперечного резонансного возбуждения электронов ВК, приводящего к разогреву электронной системы, в работе [93] реализован случай сильного продольного возбуждения ВК электрическим полем достаточно высокой частоты  $\omega > \omega_{r,g}$ . При этом

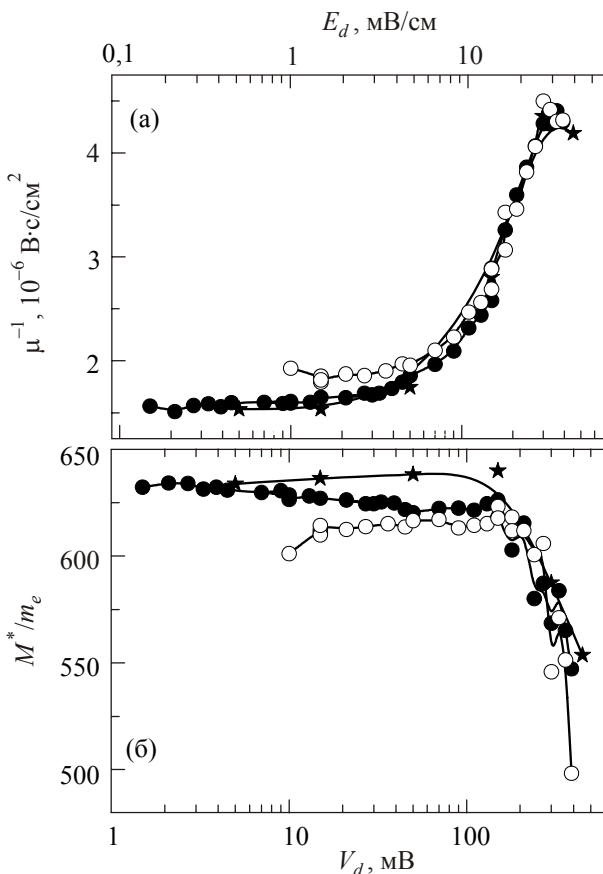


Рис. 29. Величина обратная подвижности ВК (а) и эффективная масса носителей заряда (б) как функции амплитуд разрушающего потенциала  $V_d$  (нижние оси) и электрического поля  $E_d$  (верхние оси) при  $T = 0,15$  мК и  $n_e = 8,5 \cdot 10^8$  см $^{-2}$  [93].

измерения подвижности ( $B = 0$ , жидкий  $^4\text{He}$ ) и эффективной массы  $M^*$  проводились с помощью другого продольного поля малой частоты и амплитуды. Экспериментальные данные для подвижности и эффективной массы, определявшихся согласно выражениям (61) и (62), представлены на рис. 29 в зависимости от амплитуды высокочастотного разрушающего потенциала  $V_d$  и напряженности разрушающего поля  $E_d$ . Хорошо видно, что сопротивление ВК плавно возрастает с увеличением напряженности разрушающего поля в широкой области значений  $E_d$ , и только в полях порядка 30 мВ/см наблюдаются максимум и признаки падения сопротивления. Качественно такое поведение напоминает максимум сопротивления равновесного ВК как функции температуры вблизи точки вигнеровского перехода. К сожалению, по указанным выше причинам, даже в равновесии низкочастотная проводимость ВК над жидким  $^4\text{He}$  пока не имеет достаточно точного теоретического описания. Что касается эффективной массы электронов в упорядоченном состоянии, то ее самосогласованное описание оказывается очень хорошим. Поэтому представляется интересным сравнить теоретические расчеты присоединенной массы лунок  $M_D$  при наличии быстропеременного потенциала возбуждения с данными, представленными на рис. 29(б).

Прежде всего, следует понять, можно ли свести наблюдаемые изменения  $M^*$  к простому увеличению эффективной температуры электронной подсистемы. Расчетная зависимость  $M_D(T_e)$  и равновесные данные для  $M^*$  при  $T_e = T$  представлены на рис. 30. Хорошо видно, что в широкой области  $T_e$  до температуры плавления эффективная масса плавно уменьшается в несколько раз перед началом резкого падения, соответ-

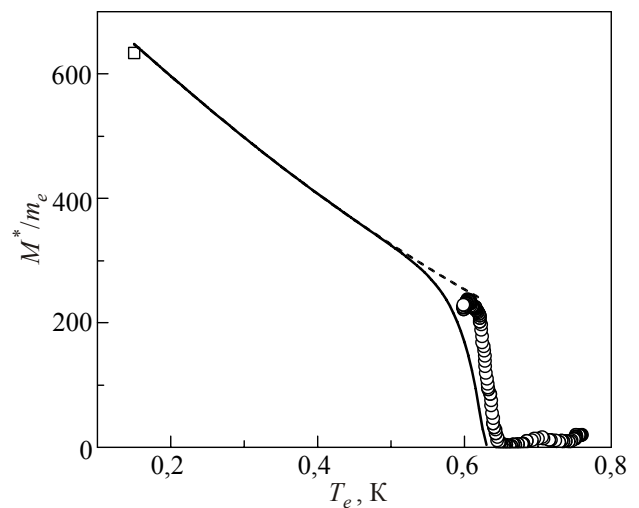


Рис. 30. Зависимость низкочастотной эффективной массы электронов  $M^*$  от температуры электронного слоя [93]: равновесные ( $T_e = T$ ) данные (кружки и квадрат), теоретический расчет (сплошная линия).



ствующего фазовому переходу. На рис. 29(б) такое плавное падение  $M^*$  отсутствует. Здесь эффективная масса почти не зависит от  $E_d$ , а для некоторых данных наблюдается даже плавное возрастание  $M^*$ , пока не начнется резкое падение в области  $E_d \sim 30$  мВ/см. Таким образом, действие сильного продольного высокочастотного разрушающего поля не сводится к нагреванию ВК, как для резонансного МВ излучения.

При одновременном наличии быстрых и медленных однородных смещений ВК, вызванных внешними полями, линейный отклик поверхности жидкого гелия может быть найден точно, подобно решению (44). Для нахождения связи между силой реакции жидкой среды  $F_D$  и амплитудой низкочастотных смещений кристалла можно провести усреднение по периоду высокочастотных колебаний кристалла. Это позволяет найти выражение для эффективной массы как функции амплитуды высокочастотных смещений кристалла  $u_d^{(0)}$  в разрушающем поле  $E_d$  [93]. На рис. 31 представлены результаты расчета  $M_D(u_d^{(0)})$  для условий рис. 29(б) и двух произвольных значений затухания риплонов. Возрастание эффективной массы при малых смещениях  $u_d^{(0)}$  связано с увеличением глубины поверхностных лунок из-за ВЧ излучения. Для однородных смещений значение в максимуме увеличивается при уменьшении затухания. Для неоднородных смещений, имеющих место в эксперименте, условие ВЧ излучения одновременно выполняется только для малой части электронов. Поэтому в реальных условиях максимум  $M_D(u_d^{(0)})$  размазан вследствие неоднородности разрушающего электрического поля. С другой стороны, уменьшение  $\gamma_g$  делает падение присоединенной массы в области  $u_d^{(0)} \simeq 0,1a$  более резким, что соответствует данным, представленным на рис. 29(б).

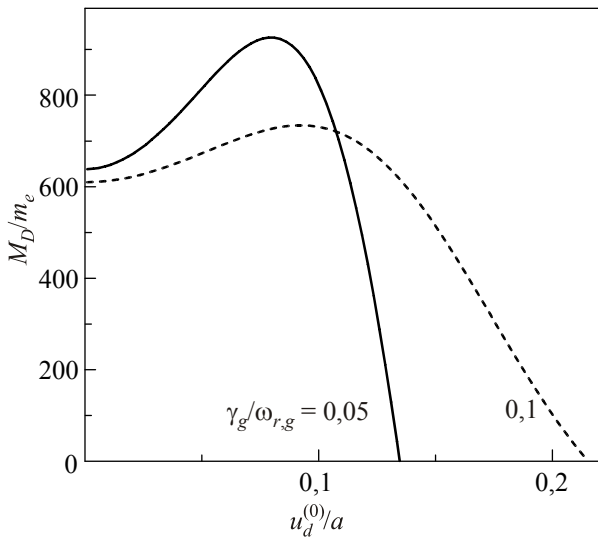


Рис. 31. Присоединенная масса отдельной поверхностной лунки для ВК на поверхности жидкого гелия как функция амплитуды высокочастотных смещений электронной решетки ( $\omega / 2\pi = 37$  МГц) [93].

Из рис. 25 следует, что для получения амплитуд высокочастотных смещений  $0,1a < u_d^{(0)} < 0,2a$ , необходимых для появления резкого падения  $M_D$ , амплитуда разрушающего электрического поля должна удовлетворять условию  $21 \text{ мВ/см} < E_d < 56 \text{ мВ/см}$ , что вполне соответствует экспериментальной оценке. Отметим, что приведенные оценки для  $E_d$  не зависят от слабого затухания риплонов. Представляется интересным, что и модель скольжения ВК по недеформируемому рельефу лунок дает близкую оценку для критического ведущего поля  $E_{th} = 46$  мВ/см. Следует однако иметь в виду, что в точном анализе [93] рельеф лунок существенно изменяется при увеличении  $u_d^{(0)}$ : средняя по периоду высокочастотных колебаний глубина лунки  $\bar{\xi}(0)$  уменьшается, а зависимость  $\bar{\xi}(x)$  в минимуме становится более плоской, поскольку электроны больше времени проводят в точках поворота, чем вблизи равновесного минимума.

Таким образом, резкое падение низкочастотной эффективной массы электронов, вызванное присутствием сильного быстропеременного ведущего поля, по видимому, обусловлено развязыванием электронной и луночной подрешеток, следующим из рис. 25 и возникающим при относительно небольших амплитудах колебаний электронов  $u_d^{(0)} \sim 0,2a$ . При амплитудах высокочастотных колебаний, превышающих критическое значение, ВК может перейти в новое состояние динамического равновесия со значительно большей амплитудой колебаний  $u_d^{(0)} > a$ . При этом, однако, нельзя утверждать, что для таких больших амплитуд колебаний ограниченность размеров системы не приведет к разрушению кристалла.

Подводя итоги обсуждения проблем нелинейного транспорта двумерного ВК на поверхности жидкого гелия, отметим, что к настоящему времени достигнуто достаточно полное понимание процессов, происходящих при быстром движении электронной решетки над жидким  $^3\text{He}$ . Это связано с тем, что импульсная релаксация ВК на поверхности ферми-жидкости обусловлена, главным образом, поляронным эффектом и торможением поверхностных лунок, которые с хорошей точностью удастся описать теоретически. Для нелинейной проводимости ВК над сверхтекучим  $^4\text{He}$  также имеется строгое и вполне согласующееся с экспериментом описание явлений, связанных с излучением Брэгга–Черенкова.

По поводу скачка  $\sigma_{xx}^{-1}(B)$ , наблюдавшегося при значительном увеличении потенциала возмущения  $V_{in}$ , пока нельзя сделать окончательные выводы. Понимание этого явления затруднено тем, что экспериментальные данные для обратной магнитопроводимости представлены в зависимости от потенциала, подаваемого на электрод  $V_{in}$ , а не от амплитуды ведущего электрического поля  $E_{||}$ , реализуемого в электронном слое. Прояснить эту ситуацию могли бы не-

линейные  $E_{||}-v$  характеристики системы в окрестности указанной аномалии. Пока же обе модели — сдвиговое плавление ВК и развязывание электронной и луночной подрешеток при прохождении БЧ порога скорости без разрушения упорядочения электронов — могут в равной степени рассматриваться причиной наблюдаемого скачка обратной магнитопроводимости.

1. E.P. Wigner, *Phys. Rev.* **46**, 1002 (1934).
2. H.M. Van Horn, *Phys. Rev.* **157**, 342 (1967).
3. R.S. Crandall and R. Williams, *Phys. Lett. A* **34**, 404 (1971).
4. A.B. Чаплик, *ЖЭТФ* **62**, 746 (1972) [*Sov. Phys. JETP* **35**, 395 (1972)].
5. Л.П. Горьков, Д.М. Черникова, *Письма ЖЭТФ* **18**, 119 (1973).
6. C.C. Grimes and G. Adams, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 795 (1979).
7. C.C. Grimes, *Surf. Sci.* **98**, 1 (1980).
8. H.W. Jiang and A.J. Dahm, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 1396 (1989).
9. von K. Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 494 (1980).
10. D.C. Tsui, H.L. Stormer, and A.C. Gossard, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1559 (1982).
11. R.B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1395 (1983).
12. Ю.Е. Лозовик, В.И. Юдсон, *Письма ЖЭТФ* **22**, 26 (1975) [Y.E. Lozovik and V.I. Yudson, *JETP Lett.* **22**, 11 (1975)].
13. E.Y. Andrei, G. Deville, D.C. Glatli, and F.I.B. Williams, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2765 (1988).
14. V.J. Goldman, M. Santos, M. Shayegan, and J.E. Cunningham, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2189 (1990).
15. F.I.B. Williams, P.A. Wright, R.G. Clark, E.Y. Andrei, G. Deville, D.C. Glatli, O. Probst, B. Etienne, C. Dorin, C.T. Foxon, and J.J. Harris, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 3285 (1991).
16. M.A. Paalanen, R.L. Willett, R.R. Ruel, P.B. Littlewood, K.W. West, and L.N. Pfeiffer, *Phys. Rev. B* **45**, 13784 (1992).
17. R. Chitra, T. Giamarchi, and P. Le Doussal, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 003827 (1998).
18. Yong P. Chen, G. Sambandamurthy, Z.H. Wang, R.M. Lewis, L.W. Engel, D.C. Tsui, P.D. Ye, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Nature Physics* **2**, 452 (2006).
19. Ю.П. Монарха, В.Б. Шикин, *ЖЭТФ* **68**, 1423 (1975) [*Sov. Phys. JETP* **68**, 710 (1975)].
20. D.S. Fisher, B.I. Halperin, and P.M. Platzman, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 798 (1979).
21. R. Giannetta and L. Wilen, *Solid State Commun.* **78**, 199 (1991).
22. K. Shirahama and K. Kono, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 781 (1995).
23. M.I. Dykman and Yu.G. Rubo, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 4813 (1997).
24. W.F. Vinen, *J. Phys.: Condens. Matter* **11**, 9709 (1999).
25. Yu.P. Monarkha and K. Kono, *ФHT* **35**, 459 (2009) [*Low Temp. Phys.* **35**, 356 (2009)].
26. Yu.P. Monarkha and K. Kono, *J. Phys. Soc. Jpn.* **66**, 3901 (1997).
27. K. Kono, H. Ikegami, and Yu.P. Monarkha, *J. Phys. Soc. Jpn.* **77**, 111004 (2008).
28. *Two-Dimensional Electron Systems on Helium and Other Cryogenic Substrates*, E.Y. Andrei (ed.), Kluwer, Dordrecht (1997).
29. Yu.P. Monarkha and K. Kono, *Two-Dimensional Coulomb Liquids and Solids*, Springer, Heidelberg (2004).
30. L. Bonsall and A.A. Maradudin, *Phys. Rev. B* **15**, 1959 (1977).
31. H. Namaizawa and M. Voss, *Phys. Rev. B* **13**, 1370 (1976).
32. Ю.М. Вильк, Ю.П. Монарха, *ФHT* **10**, 901 (1984) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **10**, 469 (1984)].
33. F.M. Peeters and P.M. Platzman, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 2021 (1983).
34. G.A. Csarthy, D.C. Tsui, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 066805 (2007).
35. Ф.Р. Улинич, Н.А. Усов, *ЖЭТФ* **76**, 288 (1979) [*Sov. Phys.-JETP* **49**, 147 (1979)].
36. Ю.П. Монарха, С.С. Соколов, *ФHT* **8**, 350 (1982) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **8**, 173 (1982)].
37. H. Fukuyama, *Solid State Commun.* **19**, 551 (1976).
38. J.M. Kosterlitz and D.J. Thouless, *J. Phys. C* **6**, 1181 (1973).
39. V.M. Bedanov, G.V. Gadiyak, and Y.E. Lozovik, *Phys. Lett. A* **109**, 289 (1985).
40. В.М. Беданов, Г.В. Гадияк, Ю.Е. Лозовик, *ЖЭТФ* **88**, 1622 (1985) [*Sov. Phys. JETP* **61**, 967 (1985)].
41. Yu.P. Monarkha and K. Kono, *J. Phys. Soc. Jpn.* **74**, 960 (2005).
42. D.J. Thouless, *J. Phys. C* **11**, L189 (1978).
43. R.H. Morf, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 931 (1979).
44. F. Gallet, G. Deville, A. Valdes, and F.I.B. Williams, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 212 (1982).
45. G. Deville, A. Valdes, E.Y. Andrei, and F.I.B. Williams, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 588 (1984).
46. P.M. Platzman and H. Fukuyama, *Phys. Rev. B* **10**, 3150 (1974).
47. D.R. Nelson and B.I. Halperin, *Phys. Rev. B* **19**, 2457 (1979).
48. Ю.М. Вильк, Ю.П. Монарха, *ФHT* **11**, 971 (1985) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **11**, 535 (1985)].
49. G. Gondoni and F.M. Peeters, *Phys. Rev. B* **53**, 4591 (1996).
50. W. Marshall and S.W. Lovesey, *Theory of Thermal Neutron Scattering*, Clarendon Press, Oxford (1971).
51. Ю.М. Вильк, Ю.П. Монарха, *ФHT* **15**, 235 (1989) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **15**, 131 (1989)].
52. A.G. Eguluz, A.A. Maradudin, and R.J. Elliott, *Phys. Rev. B* **24**, 197 (1981).
53. Yu.P. Monarkha, *ФHT* **27**, 627 (2001) [*Low Temp. Phys.* **27**, 463 (2001)].
54. M.I. Dykman, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **15**, 7397 (1982).
55. Yu.P. Monarkha, E. Teske, and P. Wyder, *Phys. Rep.* **370**, 1 (2002).
56. М.И. Дыкман, Л.С. Хазан, *ЖЭТФ* **77**, 1488 (1979) [*Sov. Phys. JETP* **50**, 747 (1979)].
57. Ю.П. Монарха, *ФHT* **37**, 108 (2011) [*Low Temp. Phys.* **37**, 90 (2011)].
58. Ю.П. Монарха, *ФHT* **37**, 829 (2011) [*Low Temp. Phys.* **37**, 655 (2011)].
59. Yu.P. Monarkha, *ФHT* **38**, 579 (2012) [*Low Temp. Phys.* **38**, 451 (2012)].
60. В.С. Эдельман, *ЖЭТФ* **77**, 673 (1979) [*Sov. Phys. JETP* **50**, 338 (1979)].
61. В.С. Эдельман, *УФН* **130**, 675 (1980) [*Sov. Phys. Usp.* **23**, 227 (1980)].

62. В.Б. Шикин, *Письма ЖЭТФ* **19**, 657 (1974) [*JETP Lett.* **19**, 335 (1974)].
63. H. Nomaizawa, *Solid State Commun.* **34**, 607 (1980).
64. Ю.П. Монарха, В.Б. Шикин, *ФНТ* **9**, 913 (1983) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **9**, 471 (1983)].
65. P. Roche, M. Roger, and F.I.B. Williams, *Phys. Rev. B* **53**, 2225 (1996).
66. O. Kirichek, M. Saitoh, K. Kono, and F.I.B. Williams, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4064 (2001).
67. Ю.П. Монарха, *ФНТ* **7**, 692 (1981) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **7**, 338 (1981)].
68. В.Е. Сивоконь, В.В. Доценко, Ю.З. Ковдря, В.Н. Григорьев, *ФНТ* **22**, 1107 (1996) [*Low Temp. Phys.* **22**, 845 (1996)].
69. G. Deville, *J. Low Temp. Phys.* **72**, 135 (1988).
70. D. Marty and J. Poitrenaud, *J. Physique* **45**, 1243 (1984).
71. T.R. Brown and C.C. Grimes, *Phys. Rev. Lett.* **29**, 1233 (1972).
72. C.C. Grimes and G. Adams, *Phys. Rev. Lett.* **36**, 145 (1976).
73. Yu.P. Monarkha, S. Ito, K. Shirahama, and K. Kono, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2445 (1997).
74. W.T. Sommer and D.J. Tanner, *Phys. Rev. Lett.* **27**, 1345 (1971).
75. Y. Iye, *J. Low Temp. Phys.* **40**, 441 (1980).
76. R. Mehrotra and A.J. Dahm, *J. Low Temp. Phys.* **67**, 115 (1987).
77. M.J. Lea, A.O. Stone, P. Fozooni, and J. Frost, *J. Low Temp. Phys.* **85**, 67 (1991).
78. E.Y. Andrei, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1149 (1984).
79. В.Е. Сивоконь, В.В. Доценко, С.С. Соколов, Ю.З. Ковдря, В.Н. Григорьев, *ФНТ* **22**, 715 (1996) [*Low Temp. Phys.* **22**, 549 (1996)].
80. K. Shirahama, O.I. Kirichek, and K. Kono, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4218 (1997).
81. K. Kono, *J. Low Temp. Phys.* **126**, 467 (2002).
82. K. Kono, *Physica B* **280**, 112 (2000).
83. W. Götze and J. Hajdu, *J. Phys. C* **11**, 3993 (1978).
84. Yu.P. Monarkha and K. Kono, *J. Phys. Soc. Jpn.* **70**, 1617 (2001).
85. O.I. Kirichek, K. Shirahama, and K. Kono, *J. Low Temp. Phys.* **113**, 1103 (1998).
86. М.И. Дыкман, *ЖЭТФ* **82**, 1318 (1982) [*Sov. Phys. JETP* **55**, 766 (1982)].
87. H. Makabe and M. Saitoh, *Physica E* **6**, 876 (2000).
88. R. Mehrotra, C.J. Guo, Y.Z. Ruan, D.B. Must, and A.J. Dahm, *Phys. Rev. B* **29**, 5239 (1984).
89. M.A. Stan and A.J. Dahm, *Phys. Rev. B* **40**, 8995 (1989).
90. L. Wilen and R. Giannetta, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 231 (1988).
91. K. Shirahama and K. Kono, *J. Low Temp. Phys.* **104**, 237 (1996).
92. V. Sivokon', V. Dotsenko, Yu. Kovdrya, and V. Grigor'ev, *J. Low Temp. Phys.* **111**, 609 (1998).
93. K.A. Nasyedkin, V.E. Syvokon, and Y.P. Monarkha, *J. Low Temp. Phys.* **163**, 148 (2011).
94. A. Kristensen, K. Djerfi, P. Fozooni, M.J. Lea, P.J. Richardson, A. Santrich-Badal, A. Blackburn, and R.W. van der Heijden, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1350 (1996).
95. P. Glasson, V. Dotsenko, P. Fozooni, M.J. Lea, W. Bailey, and G. Papageorgiou, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 176802 (2001).
96. K. Shirahama, Yu.P. Monarkha, and K. Kono, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 176805 (2004).
97. D. Konstantinov and K. Kono, *J. Low Temp. Phys.* **150**, 236 (2008).
98. D. Konstantinov, H. Isshiki, Yu. Monarkha, H. Akimoto, K. Shirahama, and K. Kono, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 235302 (2007).

## Two-dimensional Wigner solid (Review Article)

Yu.P. Monarkha and V.E. Syvokon

The current status of experimental and theoretical investigations of Wigner crystallization of a two-dimensional electron gas is reviewed. The Wigner solid (WS) was first observed in the two-dimensional electron system formed on the surface of liquid helium in 1979. The exceptional cleanness of the free surface of superfluid helium and the possibility of accurate description of deformation phenomena of polaronic origin accompanying the crystallization of electrons were instrumental in this success. High-quality samples of heterostructures (GaAs/GaAlAs) and high magnetic fields facilitating electron localization in the conducting layer were necessary to observe the Wigner crystallization in semiconductor two-dimensional electron systems. This review discusses the basic properties of the WS inherent in both aforementioned electron systems, as well as the main achievements in studying transport properties of the WS conditioned by the response of the medium to the motion of the electron lattice.

PACS: 73.20.Qt Electron solids;  
**73.40.-c** Electronic transport in interface structures;  
**67.90.+z** Other topics in quantum fluids and solids;  
 71.45.Lr Charge-density-wave systems.

Keywords: Wigner solid, two-dimensional electron systems, surface electrons, liquid helium, nonlinear transport.