

ПІДХІД ДО МІНІМІЗАЦІЇ ПОХИБОК ПРИ КОМП'ЮТЕРНОМУ МОДЕЛЮВАННІ

*Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, Київ, Україна

**Інститут технології та бізнесу в Чеських Будійовицях, Чеські Будійовиці, Чеська Республіка

Анотація. У статті розглядається підхід до мінімізації похибок при комп'ютерному моделюванні території ймовірного забруднення при обчисленні ряду математичних функцій за допомогою програми «Випадкова точка». Запропоновано застосувати розкладання функцій за нев'язками. Доведена доцільність використання апроксимації із застосуванням моделі погрішності, що дозволить проводити розрахунки із змінною точністю при мінімізації витрат часу. Зазначений підхід дозволить розширити можливості аналітичного модуля програми «Випадкова точка», що дасть можливість використання зазначеного програмного виробу в екологічній експертизі, при аналізі причин і наслідків техногенних аварій, прогнозуванні розповсюдження забруднень локального характеру, в агроекології, при плануванні будівельних майданчиків з урахуванням екологічного стану території, при оцінці радіаційної небезпеки, а також для визначення якості рекреаційних зон та місць відпочинку.

Ключові слова: функція, похибка, ітерації, поліном, мінімізація, параметр.

Аннотация. В статье рассматривается подход к минимизации погрешностей при компьютерном моделировании территории вероятного загрязнения при исчислении математических функций с помощью программы «Случайная точка». Предложено применить разложение функций по невязкам. Доказана целесообразность использования аппроксимации с применением модели погрешности, что позволит проводить расчеты с переменной точностью при минимизации затрат времени. Указанный подход позволит расширить возможности аналитического модуля программы «Случайная точка», что даст возможность использования указанного программного изделия в экологической экспертизе, при анализе причин и последствий техногенных аварий, прогнозирования распространения загрязнений локального характера, в агроэкологии, при планировке строительных площадок с учетом экологического состояния территории, при оценке радиационной опасности, а также для определения качества рекреационных зон и мест отдыха.

Ключевые слова: функция, погрешность, итерации, полином, минимизация, параметр.

Abstract. The article discusses the approach to errors minimization under computer simulation of the probabilistic contamination theory under calculating mathematical functions by using the "Random point" program. Decomposition of functions on the residuals is suggested to apply. The feasibility of using approximation by applying the model error is proved. This will allow you to perform the calculations with variable accuracy under minimization downtime. This approach will expand the capabilities of the analytical module of the "Random point" program. In the case of the creation of such a module this program can be used in environmental review, the analysis of the causes and consequences of industrial accidents, predict the spreading of the pollution is of local nature, in agroecology, in the planning of construction sites taking into account the environmental condition of the territory, in the evaluation of the radiation danger and to determine the quality of the recreational areas and recreation.

Keywords: function, inaccuracy, iteration, polynomials, minimization, parameter.

1. Вступ

При оптимізації складних моделей дослідники, як правило, дотримуються вимоги, щоб похибка оптимізації не була більше, ніж похибка експерименту чи моделі, побудованої за результатами спостережень. Оптимізацією є представлення найвигідніших характеристик моделі, системи, процесу [1]. У прикладних задачах опису території оптимізаційною задачею за різними критеріями може виступати як узагальнення, так і деталізація області (ділянки, сектора), що описується, в залежності від мети, поставленої дослідником. Проте це

може призвести до неточності розрахунків через велику похибку або, навіть, помилки, які виникають при великій кількості ітерацій.

У ході виконання робіт з вивчення міграції тритію [2] було розроблено спосіб щодо дослідження екологічного стану території при техногенному забрудненні та виконання його програмною реалізацією «Випадкова точка» [3]. В основу способу покладено базовий підхід Дж. Зойтендейка – методу можливих напрямів, зокрема, доведення, що базисна точка може бути невідома і взята довільно. З цієї базисної точки визначаються напрями, будуються вектори за напрямками та вирішується задача пошуку полюсних точок за напрямом для визначеної дослідником безперервної обмеженої функції [4]. Спосіб та комп'ютерну програму було перевірено на практиці для уточнення зон забруднень території радіоізотопом водню тритію, а також рядом хімічних речовин. При цьому було виявлено, що опис складної території вимагає побудови складних функцій з великою кількістю арифметичних операцій для виконання умови збереження заданої точності обчислень. У цьому випадку може використовуватися властивість поліномів Чебишева – зводити до мінімуму максимальну помилку наближення, тобто, економізувати структуру ряду в бік збіжності, іноді одночасно зі зменшенням членів ряду. На деяких кроках опису забруднення території доцільно використовувати методи стохастичної апроксимації, коли оцінка уточнюється при отриманні нового спостереження. Це відбувається, наприклад, при зменшенні кроків для відбору проб на ділянках, які мають високий рівень забруднення.

Актуальність теми полягає у необхідності отримання підходів для уточнення прогнозів з мінімізацією похибок у розрахунках при моделюванні можливого забруднення пересічених територій, виходу аварійної ситуації за межі санітарних зон, при стихійних лихах природного характеру, які можуть призвести до розмиву берегів ставків-відстійників, розмивання територій полігонів твердих побутових відходів та ін.

Метою роботи є представлення варіантів мінімізації помилок у прикладних задачах опису території для подальшої прикладної реалізації у вигляді аналітичного модуля комп'ютерної програми «Випадкова точка».

Задачі роботи:

– обґрунтувати підхід до вирішення окремих проблем похибок при ітераціях, що є суттєвим у випадку наближення деяких функцій при реалізації способу опису екологічного стану території за допомогою програми «Випадкова точка»;

– запропонувати можливий підхід до мінімізації похибок при виборі методу обчислень з метою пошуку оптимальних рішень.

Різноманітні методи мінімізації похибок при розрахунках з метою вирішення практичних задач досить широко представлені у роботах вітчизняних дослідників [5–7]. Оптимізаційні рішення з прикладними аспектами широко представлені у закордонних роботах, зокрема, цікавими є роботи чеських науковців [8–10]. Вищезазначене доводить, що практичне застосування методів мінімізації похибок залежить від вимог конкретного дослідження або характеристик моделі, яка описує певні процеси чи явища.

2. Постановка задачі

В основу способу опису території, на якому базується ця робота, покладено метод можливих напрямів Дж. Зойтендейка [4]. З обраної базисної точки визначаються напрями, кроки вираховуються з підвищенням або пониженням ступеня, будуються вектори за напрямками з урахуванням умови невід'ємного невідомого, вирішується задача пошуку полюсних точок за напрямом для визначеної дослідником безперервної обмеженої функції, яка описує територію. У підсумку це дозволяє отримати полюсні точки, в кожній з яких відбираються проби для забезпечення статистичної достовірності отриманих результатів та побудови контуру забрудненої території.

Задача з реалізації способу [3] дослідження екологічного стану території при техногенному забрудненні вирішується за допомогою таких кроків:

– 1-й крок: умовно обмежується деяка обрана територія X прямокутником з координатною сіткою, де розміри кожної фіксованої зони комірки (клітини) дослідження визначаються дослідником. Для зручного орієнтування на місцевості використовується карта або схема;

– 2-й крок: довільно обирається базисна точка x_k , визначаються об'єкти для досліджень (рослини, ґрунт, роса, тала вода снігового покриву та ін.);

– 3-й крок: проводяться виміри концентрації небезпечної речовини, що потрапила в оточуюче середовище в результаті викиду з небезпечного підприємства, без урахування того, перевищена чи ні гранично допустима концентрація речовини;

– 4-й крок: від точки x_k обираються напрями від 1 до n та здійснюється довільно будь-який малий крок $\alpha_k > 0$ для отримання полюсної точки, яка стане центром відбору нової партії проб. Щоб комірки ділянок досліджень не дублювалися, обирається напрям за методом генерації випадкових чисел;

– 5-й крок: за отриманими напрямками та в полюсних точках збираються проби з базового об'єкта для досліджень, отримуються виміри небезпечної речовини, дані заносяться до таблиці вимірів, на основі яких буде побудований контур забруднення;

– 6-й крок: обирається точка, за якою отримане найбільше значення концентрації небезпечної речовини. Вона стає базисною точкою, за якою повторюються перелічені кроки.

Дослідження триває покроково за напрямом, де отримується найбільше значення вимірів. Це необов'язково повинне бути перевищення концентрації речовини, а просто поступове збільшення результатів. Виміри за наведеним способом проводяться до тих пір, поки базисна точка перестане належати ділянці, що досліджується ($x_k \notin X$), або всі отримані результати вимірів будуть від'ємними. Для достовірності досліджень можна також обирати базисною точкою будь-яку іншу точку або високе значення вимірів за полюсними точками на кінцях променів при реалізації кроку 5. Описана покрокова методика дозволяє реалізувати спосіб опису забрудненої території за напрямом на проміжку $[a, b]$ деякої заданої безперервної обмеженої функції $f(x)$. В процесі реалізації способу буде цікавити знаходження кусочно-поліноміальної функції $P(x) \in C_1(a, b)$, яка найкращим чином наближує $f(x)$ за підходом Чебишева, що розглядалося у [11].

На карті результати таких досліджень можна візуалізувати у вигляді променів, що виходять з однієї точки. Велика «густина» таких променів – територія окреслена і вивчена детально. Проте прогнозний варіант буде мати меншу точність без застосування спеціальних функцій оптимізації обчислень з мінімізації помилки наближення.

3. Приклад реалізації опису території з використанням методу Дж. Зойтендейка

Програма «Випадкова точка» була задумана як інструмент для проведення польових досліджень в екологічній експертизі, агроекології, при оцінці радіаційної обстановки та прогнозуванні токсичної дії забруднювачів, що накопичуються у ґрунті, воді та рослинному покриві, а також визначення якості рекреаційних зон і призначена для роботи у середовищі MS Windows (XP, Vista, 7, 8, 10) на персональному комп'ютері. Програма є простою у використанні і не вимагає спеціальних навиків.

Першим етапом роботи є завантаження карти чи схеми території, на якій проводяться дослідження і які попередньо зберігаються на персональному комп'ютері у фор-

маті .jpg. При підключенні до мережі Інтернет є можливість завантаження карт чи схем територій безпосередньо з Google карти або Яндекс карти.

Тестування програми відбувалося на території підприємства, яке тривалий час працювало з тритієм.

Умови, обмеження та алгоритм дій дослідження були обрані такі:

а) загальна площа ділянки, що досліджується, – 42 Га. Схема досліджуваної ділянки була завантажена у програму «Випадкова точка», де розбита на 100 квадратів, серед яких було досліджено 10 випадкових точок. У разі, якщо випадкова точка попадала за межі ділянки, що досліджувалася, вважалося, що умову невід’ємного невідомого порушено;

б) серед отриманих результатів замірів були обрані найбільші значення. Схема дослідження деталізувалася – до програми завантажувалися плани місцевості великого масштабу, обиралися, на яку кількість квадратів розбивається цей план (умови деталізації визначаються дослідником), визначалася випадкова точка X^0 ;

в) знаходився вектор напрямку S_1 , визначалася довжина кроку. На кожному кроці проводився збір проб, на векторі – не менше 10 для забезпечення статистичної достовірності. Як об’єкт досліджень були обрані рослини (кульбаба лікарська, молочай-сонцегляд, латук дикий або молокан), які за своїми біологічними особливостями мають здатність при певних умовах акумулювати тритій в органічній сировині у різних формах;

г) за більшим значенням результатів вимірів, проведених досліджень будувався новий вектор. Алгоритм повторювався до отримання стійких значень зменшення питомої активності тритію у вимірах.

Результати вимірів питомої активності тритію в кульбабі лікарській за максимальним значенням отриманих результатів за кожним вектором були введені в таблицю бази даних експерименту для обробки та візуалізації за наведеним алгоритмом у вигляді векторів, на яких відбувався збір проб (рис. 1).

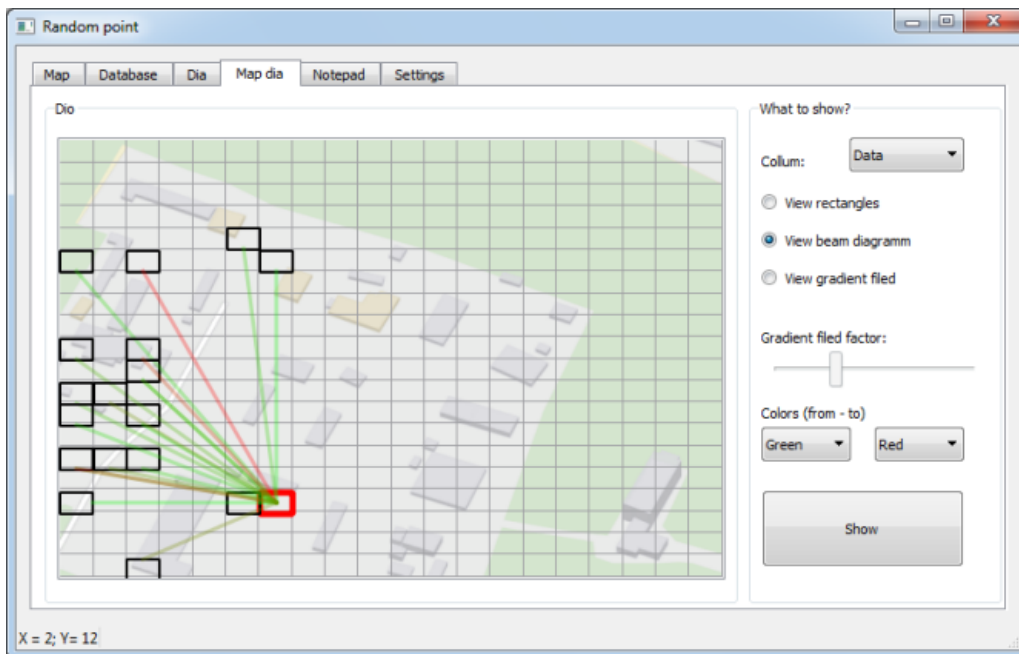


Рис. 1. Візуальне представлення результатів досліджень за допомогою програми «Випадкова точка»

При необхідності можна ще більше деталізувати ділянку, що досліджується, і на основі отриманих даних зробити прогноз розповсюдження забруднення. Але використання для цього складних функцій вимагатиме оптимізації розрахунків.

Крім того, покрокова реалізація та велика кількість ітерацій за методом Дж. Зойтендейка також може призвести до отримання неточних результатів, що буде істотним при дослідженні невеликих за площею територій. У цьому випадку можна застосувати розкладання функцій за нев'язками, яке дозволяє отримати оптимальні по точності ітераційні формули довільного порядку збіжності, узгоджені з використовуваними початковими наближеннями як за рахунок використання найкращих наближень, так і шляхом використання спеціальних норм погрішностей, що враховують структуру нев'язки. Розклад функцій за нев'язками свого часу глибоко досліджений Г.С. Теслером [7].

Зокрема, деякі елементарні функції є єдиними безперервними рішеннями функціональних рівнянь виду

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y), & f(x+y) &= f(x) \cdot f(y), \\ f(x \cdot y) &= f(x) + f(y), & f(x \cdot y) &= f(x) \cdot f(y), & D(f) &= R. \end{aligned}$$

Враховуючи поставлену задачу, приймемо, що якась функція задана в неявному вигляді:

$$F(x, y) = 0. \quad (1)$$

Розглянемо нев'язку

$$Z_0 = F(x, y_0), \quad (2)$$

де y_0 – наближення функції на заданому інтервалі $[a, b]$ і $\lim_{y_0 \rightarrow y} Z_0 = 0$. Величина погрішності нев'язки може бути отримана шляхом підставки у вираз (2) величини $y_0 = y(1 + \delta_0)$ або $y_0 = y + \Delta_0$, де δ_0, Δ_0 відповідно відносна і абсолютна погрішності.

Запишемо рівняння (1) у вигляді

$$\Phi(x, y_0, z_0) = 0. \quad (3)$$

Запропонуємо, що функція $\Phi(x, y_0, z_0)$ визначена і безперервна в області

$$D = \{x^0 - \Delta_1, x^0 + \Delta_1, y_0^0 - \Delta_2, y_0^0 + \Delta_2, z_0^0 - \Delta_3, z_0^0 + \Delta_3\}$$

- з центром у точці (x_1^0, y_1^0, z_0^0) ;
- приватні похідні $\Phi'_x, \Phi'_y, \Phi'_z$ існують і безперервні в області D;
- функція Φ у точці (x^0, y_0^0, z_0^0) перетворюється на нуль;
- приватна похідна $\Phi'_x(x^0, y_0^0, z_0^0) \neq 0$.

При цих припущеннях за теоремою про неявну функцію від декількох змінних рівняння (3) визначає x як однозначну функцію від y_0, z_0 , тобто

$$x = \varphi(y_0, z_0). \quad (4)$$

При $y_0 = y_0^0$, $z_0 = z_0^0$ ця функція набуває значення $x^0 = \varphi(y_0^0, z_0^0)$ і, крім цього, функція $\varphi(y_0, z_0)$ безперервна по сукупності своїх аргументів і має безперервні приватні похідні φ'_{y_0} , φ'_{z_0} .

Ґрунтуючись на рівнянні (1), можна записати рівність

$$f(x) = f[\varphi(y_0, z_0)],$$

де $f(x) \equiv y$ – шукана функція; $f[\varphi(y_0, z_0)]$ – суперпозиція функцій f і φ .

Розклавши функцію $f[\varphi(y_0, z_0)]$ за ступенями z_0 в межах точки $M_l(y_0, 0)$ у кратний ряд Тейлора, отримуємо такий ряд нев'язок:

$$\begin{aligned} y &= f[\varphi(y_0, 0)] + \frac{\partial}{\partial z_0} (f[\varphi(y_0, z_0)]|_{z_0=0}) z_0 + \\ &+ \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial z_0^2} (f[\varphi(y_0, z_0)]|_{z_0=0}) z_0^2 + \dots + \\ &+ \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial z_0^k} (f[\varphi(y_0, z_0)]|_{z_0=0}) z_0^k + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Відзначимо, що члени розкладання в ряд Тейлора функції $f[\varphi(y_0, z_0)]$ з похідними по y в точці $M_l(y_0, 0)$ дорівнюють нулю, оскільки множаться на величину $(y - y_0)^k|_{y=y_0} = 0$.

У деяких випадках для отримання ряду нев'язок у виді

$$y = \psi(y_0) \sum_{k=0}^{\infty} a_k t_0^k, \quad y = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k t_0^k \quad (6)$$

робиться заміна $t_0 = H(y_0, z_0)$. В окремому випадку можливі рівності $t_0 \equiv z_0$, $\psi(y_0) \equiv y_0$.

Для збіжності отриманого розкладання до функції $f(x)$ у межах точки $M_l(y_0, 0)$ необхідно і достатньо (7), щоб функція $f[\varphi(y_0, z_0)]$ мала область D безперервних приватних похідних будь-якого порядку і $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$, де R_n – залишковий член кратного ряду Тейлора (5).

При значенні y_0 , що дорівнює константі, розкладання (5) і (6) перетворюються на звичайне розкладання функції в ряд Тейлора, проте іноді у підсумку виникає значна похибка, що знецінює результати моделі.

4. Вибір методу обчислень при пошуку оптимальних рішень

Часто при розрахунку прямих та зворотних тригонометричних, гіперболічних функцій, експоненти і логарифму важко добрати метод обчислень або через велику кількість розрахунків, або через необхідність вирахування спеціальних констант (потрібно, як правило, $n/2$ констант з довільною розрядністю), що ускладнюватиме комп'ютерну реалізацію обчислень.

Слід зазначити, що обчислення цих констант з довільною точністю часто виступає більш трудомісткою задачею, ніж початкова. Одночасно, для функцій y/x , $1/x$, \sqrt{x} , $\sqrt[3]{x}$ не потрібно обчислення спеціальних констант. З точки зору збільшення швидкості комп'ютерної обробки інформації і адаптованості до обчислювальних засобів з різними платформами, бажано використовувати алгоритми, які мають різні види початкових або

завершальних наближень. При цьому в цих початкових і завершальних наближеннях залишається в силі вимога щодо обчислення констант. Тобто, для цих цілей придатні далеко не всі методи. Наприклад, це можуть бути обчислення, які ґрунтуються на попередніх даних, тобто, рекурентні записи розкладання в ряд. При цьому початкове наближення і відповідне йому бажано задавати у вигляді констант простого виду або легко обчислюваних виразів.

Також можуть бути використані ортогональні багаточлени, рекурентні записи ланцюгових дробів, нескінченних добутків та методи апроксимації. Також є великий набір методів для отримання ітераційних формул і початкових наближень. Однак найбільш часто ці методи використовуються для обчислення степеневі функції і зворотних функцій, коли вони обчислюються набагато складніше від прямих.

У деяких випадках при пошуку оптимальних рішень доцільне використання диференціальних та інтегральних рівнянь. Однак ні за швидкістю, ні за точністю обчислень ці методи довільної розрядності не мають переваг.

Для вирішення поставленої задачі можна з успіхом використати режим апроксимації, який дозволить проводити розрахунки із змінною точністю при мінімізації витрат часу. Для реалізації такого підходу в зазначеному програмному продукті «Випадкова точка» є суттєва перевага: в обчислювальному алгоритмі програми вже використовуються ітерації, а застосування рекурентних відношень дозволить зменшити вихідний інтервал у N^i разів, де N – параметр, який визначається видом рекурентного відношення ($N=2$ або 3), i – номер ітерації.

Як приклад з реалізації такого підходу можна розглянути модель погрішності апроксимації функцій з використанням початкових наближень. Загально таку модель можна представити таким чином:

$$\Delta \approx C_n \left(x/N^m \right)^n \approx \left[x/N^{mn+l} \right], \quad (7)$$

де C_n – константи, які в цілому залежні від параметра n ;

N – число, яке визначає розмір зменшення інтервалу;

m – кількість ітерацій з використанням рекурентної формули;

n – порядок члена у виразі, що апроксимується, який буде відкинута для початкового наближення рекурентного співвідношення;

$$l = -\log_N |C_n|.$$

На основі наведеної моделі (7) можна визначити потрібні значення параметрів m та n .

Розглянемо внесок кожного параметра, що входить до цієї моделі, за їх впливом на погрішність при апроксимації Z_m .

Маючи на увазі, що для багатьох функцій, зокрема, таких, як e^x , $\sin x$, $\cos x$ та інші, значення коефіцієнта C_n має істотний вплив на зменшення погрішності методу. Але певні межі впливу на питання, що досліджується, мають параметри n та m , а також величина N^{mn} . Це можна пояснити таким чином: припустимо, що коефіцієнт є пропорційним величині $1/(n+m)!$, тоді за певних значень n та m функція N^{mn} зростає швидше, ніж значення виразу $(n+m)!$. Наприклад, для $N=2$, $n=4$, $m=4$ отримаємо $(n+m)! = 40320$, а $2^{nm} = 65536$.

Необхідно відзначити, що використання апроксимації є еквівалентним багатократному зменшенню інтервалу, пропорційному значенню величини $1/N^m$. Збільшення величини N призводить в основному до ускладнення формул апроксимації Z_m при $N > 3$. То-

му комп'ютерна реалізація для планшетів програми для опису територій, заснована на такому методі, є недоцільною. Проте такий метод має сенс при використанні у кластерних обчисленнях для отримання розрахунків з мінімальною погрішністю. Із збільшенням величини збільшується можливість розпаралелювання рекурентних співвідношень, заснованих на апроксимації Z_m .

Для більш точного дослідження параметрів, що входять у модель похибки апроксимації функцій, запишемо вихідну модель (7) у вигляді

$$\Delta \approx C'_n \left(x / (N + \Delta N)^{m + \Delta m} \right)^{n + \Delta n}, \quad (8)$$

де ΔN , Δm , Δn – відповідне прирощення параметрів N , m та n .

Цей вираз через логарифм матиме вигляд

$$\ln \Delta \approx \ln C'_n + (n + \Delta n)(\ln x - (m + \Delta m)\ln(N + \Delta N)). \quad (9)$$

Помітно, що збільшення величин Δm і Δn впливає на зменшення похибки Δ . Тож при розробці версії програми слід враховувати, що для планшетних і стаціонарних комп'ютерів можуть знадобитися окремі алгоритмічні рішення щодо вибору параметрів n , m та N . Збільшення параметра m призведе до збільшення кількості ітерацій за рекурентною формулою і до накопичення похибки. Збільшення параметра n призведе до збільшення кількості членів у початковому або завершальному наближенні та зменшить коефіцієнт C'_n . Тому для кожного фіксованого N необхідно витримати певні відношення між величинами m та n . Тобто, слід визначитися, яке наближення буде задовільним для визнання розрахунків точними.

Програма для опису території, пристосована для будь-якого типу комп'ютерів, може базуватися на використанні методів базових послідовностей рекурентних відношень, асинхронних обчислень або економічних алгоритмів. Після відповідних перетворень зазначені методи будуть більш ефективними за критерієм мінімізації похибки для обчислення функцій $\log_2 x$, $\arcsin x$ та $\arctg x$, ніж апроксимація.

5. Висновки

У статті запропонований підхід до вирішення задачі комп'ютерного моделювання території ймовірного забруднення з мінімізацією похибок при обчисленні ряду математичних функцій. Збільшення ітерацій при розрахунках може викликати накопичення похибки. Для вирішення завдання мінімізації похибки запропоновано:

1. Застосувати розкладання функцій за нев'язками, яке дозволяє отримати оптимальні по точності ітераційні формули довільного порядку збіжності, узгоджені з використовуваними початковими наближеннями як за рахунок використання найкращих наближень, так шляхом використання спеціальних норм погрішностей, що враховують структуру нев'язки.
2. Добрати метод обчислень, для реалізації якого потрібно або меншу кількість розрахунків, або відсутність необхідності вирахування спеціальних констант.
3. Використати апроксимацію із застосуванням моделі погрішності, що дозволить проводити розрахунки із змінною точністю при мінімізації витрат часу, але при цьому слід брати до уваги вплив окремих величин на збільшення або зменшення похибки.

Зазначений підхід дозволить розширити можливості аналітичного модуля програми «Випадкова точка», зокрема, на основі отриманих вимірів забруднювачів певної території прогнозувати їх поширення за межі визначеної зони, проводити оптимізацію прогнозних моделей за рядом обраних факторів, робити узагальнення або деталізувати окремі процеси, що впливають на розповсюдження забруднюючих речовин на території дослідження.

Реалізація аналітичного модуля у програмі «Випадкова точка» дозволить використовувати його в екологічній експертизі, при аналізі причин і наслідків техногенних аварій, прогнозуванні розповсюдження забруднень локального характеру, в агроекології, при плануванні будівельних майданчиків з урахуванням екологічного стану території, при оцінці радіаційної небезпеки, а також для визначення якості рекреаційних зон та місць відпочинку.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Мала гірнича енциклопедія: у 3 т. / Під ред. В.С. Білецького. – Д.: Східний видавничий дім, 2004–2013.
2. Коваленко О.В. Спосіб опису екологічного стану території та його програмна реалізація «Випадкова точка» з використанням методу можливих напрямків / О.В. Коваленко, О.О. Кряжич // Вісник УжНУ. – 2016. – № 1 (28). – С. 60 – 71.
3. А.с. про реєстрацію авторського права на твір № 67750 «Комп'ютерна програма з реалізації способу опису забрудненої території «Випадкова точка» («Випадкова точка (Random point)») / О.О. Кряжич, О.В. Коваленко. – Заявл. 12.07.2016; зареєстр. 12.09.2016.
4. Зойтендейк Г. Методы возможных направлений / Зойтендейк Г. – М.: Издательство Иностранной литературы, 1963. – 178 с.
5. Методи прогнозування в системах підтримки прийняття рішень / С.О. Довгий, П.І. Бідюк, О.М. Трофимчук, О.І. Савенков. – К.: Азимут-Україна, 2011. – 608 с.
6. Довгий С.О. Системи підтримки прийняття рішень на основі статистично-ймовірнісних методів / Довгий С.О., Бідюк П.І., Трофимчук О.М. – К.: Логос, 2014. – 419 с.
7. Теслер Г.С. Адаптивні апроксимації та ітеративні процеси / Г.С. Теслер // Математичні машини і системи. – 2004. – № 2. – С. 22 – 41.
8. Proposal for Optimization of the Inventory Level Using the Appropriate Method for its Procurement / O. Stopka, M. Chovancova, J. Lizbetin, V. Klapita. – Nase More, Dubrovnik: University of Dubrovnik, 2016. – роč. 63, č. 3. – P. 195 – 199.
9. The Application of ABC Analysis to Inventories in the Automotive Industry Utilizing the Cost Saving Effect / R. Kampf, S. Lorincova, M. Hitka, Z. Caha. – Nase More, Dubrovnik: University of Dubrovnik, 2016. – роč. 63, č. 3. – P. 120 – 125.
10. Lizbetin J. The optimization of the intermodal terminals / J. Lizbetin, Z. Caha. – Nase More, Dubrovnik: University of Dubrovnik, 2015. – Vol. 62, Special Issue. – P. 97 – 100.
11. Кряжич О.О. Апроксимація складних функцій для опису розвитку локальної надзвичайної ситуації / О.О. Кряжич // Математичні машини і системи. – 2016. – № 1. – С. 148 – 157.

Стаття надійшла до редакції 15.01.2016