УДК 53.01:53.05+519.2

И.И. ГОРБАНЬ*

МНОГОЗНАЧНЫЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ПРОЦЕССЫ СЛУЧАЙНОГО И ГИПЕРСЛУЧАЙНОГО ТИПОВ

*Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Киев, Украина

Анотація. *Систематизовані, узагальнені і розвинені результати щодо математичного аналізу багатозначних детермінованих величин і багатозначних детермінованих процесів. Отримані раніше результати, що стосуються математичного аналізу багатозначних процесів випадкового типу, узагальнені на багатозначні процеси гіпервипадкового типу. Запропоновано підхід до опису багатозначних процесів за допомогою диференційних рівнянь.*
Ключові слова: *багатозначна величина, багатозначний процес, теорія гіпервипадкових явищ, порушення збіжності.*

Аннотация. *Систематизированы, обобщены и развиты результаты, касающиеся математического анализа многозначных детерминированных величин и многозначных детерминированных процессов. Полученные ранее результаты в части математического анализа многозначных процессов случайного типа обобщены на многозначные процессы гиперслучайного типа. Предложен подход к описанию многозначных процессов с помощью дифференциальных уравнений.*
Ключевые слова: *многозначная величина, многозначный процесс, теория гиперслучайных явлений, нарушение сходимости.*

Abstract. *The results concerning the mathematical analysis of multi-valued determinate variables and multi-valued deterministic processes are systematized, generalized, and developed. The earlier results concerned the mathematical analysis of multi-valued processes of the random type are generalized on the multi-valued processes of the hyper-random type. It is proposed to describe the multi-valued processes by differential equations.*
Keywords: *multi-valued variable, multi-valued process, theory of hyper-random phenomena, violation of convergence.*

1. Введение

С древнейших времен ученые ведут спор по поводу принципов, лежащих в основе мироздания. На протяжении веков полагали, что все физические явления (события, величины, процессы и поля) детерминированы и однозначны. По мнению П.С. Лапласа, все в мире подчиняется детерминированным законам, а текущее состояние полностью определяется предыдущими его состояниями. Этой точки зрения придерживались И. Ньютон, Г.В. Лейбниц, Р. Декарт, Б. Спиноза, А. Эйнштейн и многие другие известные естествоиспытатели, физики и математики. Они полагали, что адекватное описание действительности обеспечивают детерминированные однозначные модели. Естественно, что при такой доминанте базовые понятия математического анализа – понятия предела, непрерывности, производной и интеграла – первоначально были введены применительно к детерминированным однозначным функциям.

Однако со временем стало понятно, что в реальном мире присутствует неопределенность и поэтому далеко не все физические явления поддаются однозначному детерминированному описанию. Был обнаружен физический феномен статистической устойчивости, исследование которого привело к формированию теории вероятностей. В рамках этой теории базовые понятия математического анализа были обобщены на последовательности случайных величин и случайные функции [1, 2].

В теории вероятностей под случайным явлением (случайным событием, величиной или функцией) понимается соответствующий математический объект, имеющий вероятностную меру. Событие, величина или функция, которая не имеет вероятностной меры, случайной не считается. В прикладных дисциплинах вероятность любого события интерпретируется как предел относительной частоты его появления при неограниченном увеличении числа испытаний. В теории вероятностей корректность применения вероятностных моделей обеспечивается принятием физической гипотезы идеальной статистической устойчивости, предполагающей наличие сходимости относительных частот.

До недавнего времени теория вероятностей использовалась в основном для описания массовых явлений не очень большого объема. В этих задачах наличие или отсутствие сходимости относительных частот существенной роли не играет. Главное, чтобы при рассматриваемом объеме данных феномен статистической устойчивости проявлялся явно.

С появлением новых задач, связанных с обработкой больших объемов данных, проводимых в интересах высокоточных измерений и высокоточного прогнозирования развития событий, вопрос о сходимости относительных частот приобрел актуальность.

Многочисленные экспериментальные исследования различных физических явлений показывают [3–7], что при относительно небольшом объеме данных прослеживается тенденция к сходимости, однако при большом объеме данных она не наблюдается.

Для описания физических явлений с учетом нарушений статистической устойчивости была разработана физико-математическая теория гиперслучайных явлений [3–5, 8, 9]. Под гиперслучайным явлением (событием, величиной или функцией) понимается множество несвязанных между собой случайных явлений (случайных событий, величин или функций), характеризуемых определенными вероятностными мерами.

Частным случаем гиперслучайных величин и функций являются многозначные объекты без меры – интервальные величины и функции [10–12], исчерпывающе характеризуемые границами.

В рамках теории гиперслучайных явлений базовые понятия математического анализа обобщены на последовательности гиперслучайных величин и гиперслучайные функции [3–5], а затем с использованием математического аппарата теории гиперслучайных явлений и на последовательности многозначных детерминированных величин и многозначные детерминированные функции, характеризуемые мерой и множеством мер [13, 14].

Обращено внимание, что многозначная детерминированная величина (функция), характеризуемая мерой, может рассматриваться как случайная величина (функция), а характеризуемая множеством мер, – как гиперслучайная величина (функция).

Основные полученные к настоящему времени результаты, касающиеся гиперслучайных и детерминированных многозначных величин и функций, приведены в монографиях [4, 5].

Распространение базовых понятий классического математического анализа на указанные классы математических объектов представляется важной и актуальной задачей, решение которой открывает новые возможности применения математики для решения сложных практических задач в условиях неопределенности.

Вопросы, касающиеся представления детерминированных многозначных величин и функций случайными и гиперслучайными величинами и функциями, изучены еще не достаточно глубоко. Многие концептуальные вопросы лишь обозначены, некоторые вопросы рассмотрены лишь применительно к простейшим частным случаям, часть результатов требует уточнения, развития и детализации.

Целью настоящей статьи является систематизация, обобщение и развитие результатов, касающихся математического анализа многозначных детерминированных величин и многозначных детерминированных скалярных процессов (многозначных детерминированных скалярных функций одной переменной) (рис. 1).

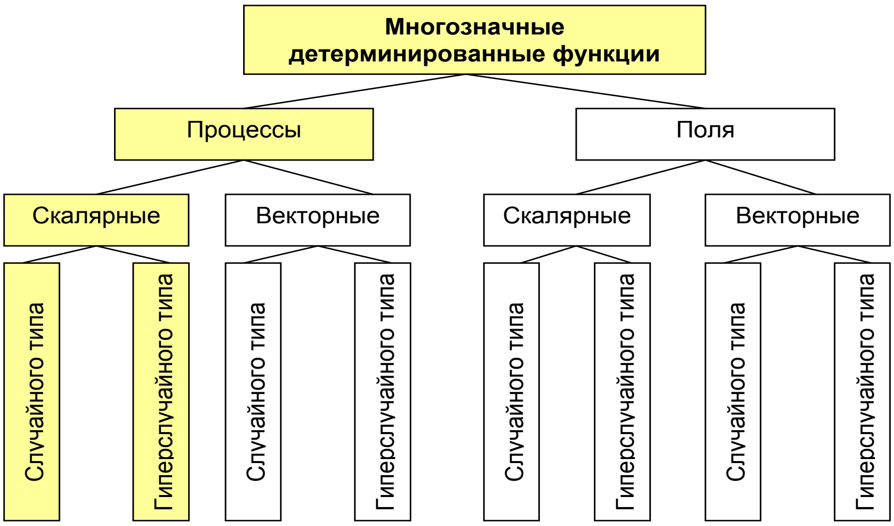


Рис. 1. Классификация многозначных детерминированных функций. Типы функций, рассматриваемые в статье, затемнены

Обобщение полученных результатов на многозначные детерминированные векторные процессы и многозначные детерминированные поля (многозначные детерминированные функции нескольких переменных) планируется осуществить в последующих статьях.

Главная специфика рассматриваемого далее способа описания многозначной детерминированной величины $\tilde{x}$ и многозначного детерминированного скалярного процесса $\tilde{x}(t)$ состоит в их представлении не только множеством значений, которые они принимают (спектрами значений), но и множеством мер – многозначными (в общем случае) функциями распределения $\tilde{F}_x(x)$, $\tilde{F}_x(\vec{x};\vec{t})$ этих значений.

Обратим внимание, что, следуя принятым в [5] обозначениям, многозначные величины и функции (или те, которые могут быть таковыми) обозначены буквами со знаком тильды над ними, а однозначные величины и функции – буквами без тильды.[1]

Прежде, чем переходить к изложению нового материала, напомним определения основных понятий, используемых для описания и анализа многозначных величин и функций.

2. Описание многозначных детерминированных величин

2.1. Обобщенный предел бесконечной числовой последовательности

Не все числовые последовательности и детерминированные однозначные функции обладают свойством сходимости. При описании расходящихся последовательностей и функций [4, 5] используют понятие частичной последовательности.

Определение 1. Частичной последовательностью (подпоследовательностью) числовой последовательности $\{x_n\}_{n\to\infty} = x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ называется любая числовая последовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$, образованная из исходной последовательности путем исключения части ее членов при сохранении порядка следования оставшихся членов.

[1] В выражениях, заимствованных из теории вероятностей, некоторые многозначные величины и функции не содержат знака тильды.

Некоторые из частичных последовательностей могут обладать свойством сходимости.

Определение 2. Частичным m-м пределом бесконечной числовой последовательности $\{x_n\}_{n\to\infty}$ называется предел a_m, соответствующий m-ой частичной последовательности, сформированной из исходной последовательности $\{x_n\}_{n\to\infty}$.

Определение 3. Спектром предельных точек $\tilde{x}$ (обобщенным пределом) бесконечной числовой последовательности $\{x_n\}_{n\to\infty}$ называется множество всех ее частичных пределов.

Аналитически обобщенный предел записывается следующим образом: $\tilde{x} = \operatorname*{LIM}_{n\to\infty} x_n$.

Как известно, обычный предел принимает обязательно единственное значение, обобщенный же предел характеризуется множеством значений, то есть является многозначной величиной.

Приведенные понятия обобщаются на случай многозначных последовательностей.

Определение 4. Однозначной частичной последовательностью (подпоследовательностью) бесконечной многозначной последовательности $\{\tilde{x}_n\}_{n\to\infty} = \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n, \ldots$ называется любая однозначная последовательность, образованная из исходной последовательности путем отбрасывания части ее членов с сохранением порядка следования оставшихся членов и сохранения для каждого оставшегося члена по одному значению.

Определение 5. Частичным m-м пределом бесконечной многозначной последовательности $\{\tilde{x}_n\}_{n\to\infty}$ называется предел a_m однозначной m-ой частичной последовательности, сформированной из исходной последовательности $\{\tilde{x}_n\}_{n\to\infty}$.

Определение 6. Спектром предельных точек $\tilde{x} = \operatorname*{LIM}_{n\to\infty} \tilde{x}_n$ (обобщенным пределом) бесконечной многозначной последовательности $\{\tilde{x}_n\}_{n\to\infty}$ называется множество всех ее частичных пределов.

Определение 7. Две бесконечные числовые последовательности, которые отличаются друг от друга бесконечным числом элементов, считаются разными, а те, которые отличаются конечным числом элементов, – одинаковыми.

Две разные сходящиеся частичные последовательности могут иметь один и тот же частичный предел. Это указывает на то, что частота встречаемости разных частичных пределов может отличаться. Поэтому обобщенный предел числовой последовательности $\{x_n\}_{n\to\infty}$ или многозначной последовательности $\{\tilde{x}_n\}_{n\to\infty}$ характеризуется не только спектром предельных точек, но также и функцией их распределения $\tilde{F}_x(x)$, определяемой следующим образом:

$$\tilde{F}_x(x) = \operatorname*{LIM}_{n\to\infty} \frac{n(x)}{n}, \tag{1}$$

где n – количество членов конечной последовательности $\{x_n\}$, $n(x)$ – количество членов этой конечной последовательности, меньших x.

Если последовательность относительных частот $\{n(x)/n\}_{n\to\infty}$ сходится в обычном смысле для всех x, то функция распределения $\tilde{F}_x(x)$ однозначная: $\tilde{F}_x(x) = F_x(x)$, если же эта последовательность не обладает свойством сходимости, то функция распределения многозначная.

Если спектр предельных точек дискретен, то при наличии сходимости последовательности (1) функция распределения представляет собой однозначную ступенчатую функцию (рис. 2 *а*), а при отсутствии сходимости – многозначную функцию, ограниченную двумя ступенчатыми функциями $F_{Sx}(x)$, $F_{Ix}(x)$ (рис. 2 *б*). Если спектр предельных точек непрерывен, то при наличии сходимости последовательности (1) функция распределения представляет собой однозначную неубывающую функцию (рис. 2 *в*), а при отсутствии сходимости – многозначную функцию (рис. 2 *г*), ограниченную двумя однозначными неубывающими функциями $F_{Sx}(x)$, $F_{Ix}(x)$.

Если функция распределения однозначна, то спектр предельных точек $\tilde{x}$ можно интерпретировать как случайную величину, принимающую одновременно множество значений, описываемых функцией распределения $F_x(x)$. Если же функция распределения $\tilde{F}_x(x)$ многозначна, то ее можно представить множеством однозначных условных функций распределения $F_{x/g}(x)$ с неопределенным законом распределения условий $g \in G$: $\tilde{F}_x(x) = \{F_{x/g}(x),\ g \in G\}$. Тогда спектр предельных точек $\tilde{x} = \{\tilde{x}/g,\ g \in G\} = \{\tilde{x}_g,\ g \in G\}$ можно рассматривать как гиперслучайную величину [4, 5], принимающую множество значений $\tilde{x}/g = \tilde{x}_g$ в различных условиях $g \in G$ и описываемую многозначной функцией распределения $\tilde{F}_x(x)$.

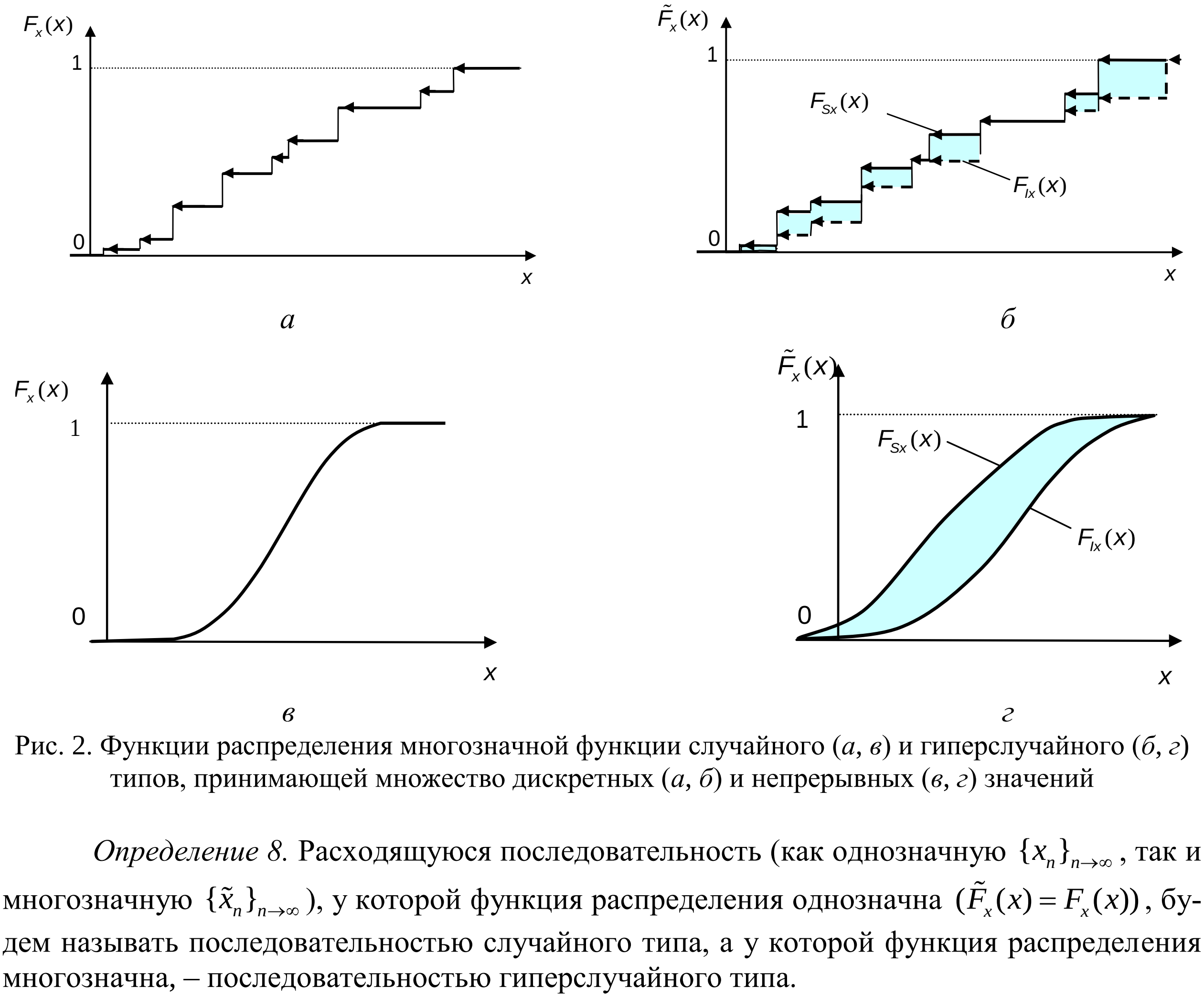


Рис. 2. Функции распределения многозначной функции случайного (*а*, *в*) и гиперслучайного (*б*, *г*) типов, принимающей множество дискретных (*а*, *б*) и непрерывных (*в*, *г*) значений

Определение 8. Расходящуюся последовательность (как однозначную $\{x_n\}_{n\to\infty}$, так и многозначную $\{\tilde{x}_n\}_{n\to\infty}$), у которой функция распределения однозначна $(\tilde{F}_x(x) = F_x(x))$, будем называть последовательностью случайного типа, а у которой функция распределения многозначна, – последовательностью гиперслучайного типа.

Доказано, что многозначная функция распределения $\tilde{F}_x(x)$ принимает все значения, лежащие между нижней $F_{Ix}(x)$ и верхней $F_{Sx}(x)$ ее границами (теорема о спектре частот значений расходящейся числовой последовательности [4, 5]). На рис. 2 *б* и рис. 2 *г* соответствующие области затемнены.

Заметим, что, если функция распределения $\tilde{F}_x(x)$ (ее можно назвать функцией распределения первого уровня) оказывается многозначной, то для описания частоты принимаемых ею значений при фиксированном значении x, в принципе, можно ввести функцию распределения второго уровня. Новая функция распределения также может оказаться многозначной. Для описания частоты принимаемых ею значений можно ввести функцию распределения третьего уровня и т.д. Использование функций распределения уровня выше первого сопряжено с существенным усложнением математического аппарата, при этом явных преимуществ от такого усложнения не видно. Поэтому ограничимся использованием лишь функции распределения первого уровня $\tilde{F}_x(x)$, далее называемой просто функцией распределения.

2.2. Описание скалярных многозначных величин

Определение 9. Многозначные величины можно разделить на дискретные, принимающие множество дискретных значений, непрерывные, принимающие непрерывное множество значений, и их комбинацию.

В зависимости от типа многозначной величины и решаемой задачи используют различные способы их описания. Дискретные многозначные величины часто представляют просто множеством значений. Непрерывные многозначные величины описываются интервальными величинами [10, 12].

Возникновение многозначности зачастую вызвано нарушением сходимости различных последовательностей, в частности, средних величин [4, 5]. Описывая многозначную величину, образованную в результате нарушения сходимости, представляется целесообразным сохранять информацию о частоте встречаемости разных ее значений при предельном переходе (о ее «весе»).

Многозначные величины могут быть скалярными и векторными.

Определение 10. Скалярную многозначную величину $\tilde{x}$ будем рассматривать как обобщенный предел $\operatorname*{LIM}_{n\to\infty} x_n$ (спектр предельных точек) некоторой порождающей однозначной $\{x_n\}_{n\to\infty}$ или многозначной $\{\tilde{x}_n\}_{n\to\infty}$ последовательности.

При такой трактовке многозначной величины множество всех многозначных величин можно разделить на два класса: многозначные величины случайного и гиперслучайного типов.

Определение 11. Скалярная многозначная величина $\tilde{x}$, у которой функция распределения однозначна $(\tilde{F}_x(x) = F_x(x))$, называется многозначной величиной случайного типа, а у которой функция распределения $\tilde{F}_x(x)$ многозначна, – многозначной величиной гиперслучайного типа.

Наиболее полное описание многозначной функции распределения $\tilde{F}_x(x)$ скалярной многозначной величины $\tilde{x}$ гиперслучайного типа обеспечивает множество условных функций распределения $F_{x/g}(x)$ и соответствующие плотности распределения $f_{x/g}(x) = dF_{x/g}(x)/dx$ $(g \in G)$. Менее полное описание дают границы функции распределения $F_{Sx}(x) = \sup_{g\in G} F_{x/g}(x)$, $F_{Ix}(x) = \inf_{g\in G} F_{x/g}(x)$. Границы функции распределения многозначной величины случайного типа совпадают с функцией распределения $(F_{Sx}(x) = F_{Ix}(x) = F_x(x))$.

В теории вероятностей используются четыре варианта сходимости случайных последовательностей и функций (сходимость по функции распределения, в среднеквадратическом, почти наверное (с вероятностью единица) и по вероятности). В монографиях [4, 5] эти варианты сходимости обобщены на гиперслучайные величины и функции. С точки зрения сходимости описанная выше многозначная величина $\tilde{x}$ представляет собой обобщенный предел сходящейся по распределению числовой последовательности, описываемый гиперслучайной (в общем случае) или случайной (в частном случае) величиной. Сходимость по распределению используется далее и для описания многозначных функций.

Вариант сходимости по распределению был выбран в первую очередь из соображения простоты и наглядности. В принципе, могут быть использованы и другие варианты сходимости. Вопрос о целесообразности их применения требует отдельного изучения.

Скалярную многозначную величину $\tilde{x}$ также характеризуют

- условные начальные $m_{x/g\nu} = \mathrm{M}_g\left[X^\nu\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^\nu f_{x/g}(x)dx$ и центральные $\mu_{x/g\nu} = \mathrm{M}_g\left[(X - m_{x/g})^\nu\right]$ моменты, где ν – порядок момента, $m_{x/g} = \mathrm{M}_g\ X$;
- начальные $m_{Sx\nu} = \mathrm{M}_S\left[X^\nu\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^\nu f_{Sx}(x)dx$, $m_{Ix\nu} = \mathrm{M}_I\left[X^\nu\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^\nu f_{Ix}(x)dx$ и центральные $\mu_{Sx\nu} = \mathrm{M}_S\left[(X - m_{Sx})^\nu\right]$, $\mu_{Ix\nu} = \mathrm{M}_S\left[(X - m_{Ix})^\nu\right]$ моменты границ, где $m_{Sx} = \mathrm{M}_S\ X$;
- границы моментов, в частности, начальных моментов $m_{sx\nu} = \sup\limits_{g\in G} m_{x/g\nu}$, $m_{ix\nu} = \inf\limits_{g\in G} m_{x/g\nu}$ и центральных моментов $\mu_{sx\nu} = \sup\limits_{g\in G} \mu_{x/g\nu}$, $\mu_{ix\nu} = \inf\limits_{g\in G} \mu_{x/g\nu}$.

2.3. Описание векторных многозначных величин

Определение 12. Векторная многозначная величина $\vec{\tilde{x}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_L)$ – вектор, компоненты которого – скалярные многозначные величины $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_L$. Векторная многозначная величина $\vec{\tilde{x}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_L)$ описывается L-мерной функцией распределения $\tilde{F}_{\vec{x}}(x_1, \ldots, x_L) = \tilde{F}_{\vec{x}}(\vec{x}) = \ F_{\vec{x}/g}(\vec{x}),\ g \in G\ $.

Определение 13. Векторная многозначная величина $\vec{\tilde{x}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_L)$, у которой функция распределения однозначна $(\tilde{F}_{\vec{x}}(\vec{x}) = F_{\vec{x}}(\vec{x}))$, называется многозначной величиной случайного типа, а у которой функция распределения $\tilde{F}_{\vec{x}}(\vec{x})$ многозначна, – многозначной величиной гиперслучайного типа.

Наиболее полное описание многозначной функции распределения $\tilde{F}_{\vec{x}}(\vec{x})$ векторной многозначной величины гиперслучайного типа обеспечивает множество условных функций распределения $F_{\vec{x}/g}(\vec{x})$ и соответствующие плотности распределения $f_{\vec{x}/g}(\vec{x}) = \partial^L F_{\vec{x}/g}(\vec{x}) / \partial x_1 \ldots \partial x_L\ \ (g \in G)$. Менее полное описание дают границы функции распределения $F_{S\vec{x}}(\vec{x}) = \sup\limits_{g\in G} F_{\vec{x}/g}(\vec{x})$, $F_{I\vec{x}}(\vec{x}) = \inf\limits_{g\in G} F_{\vec{x}/g}(\vec{x})$ и плотности распределения границ $f_{S\vec{x}}(\vec{x}) = \partial^L F_{S\vec{x}}(\vec{x}) / \partial x_1 \ldots \partial x_L$, $f_{I\vec{x}}(\vec{x}) = \partial^L F_{I\vec{x}}(\vec{x}) / \partial x_1 \ldots \partial x_L$.

Векторную многозначную величину $\vec{\tilde{x}}$ также характеризуют

• условные начальные $m_{\vec{x}/g\nu_1\ldots\nu_L} = \mathrm{M}_g\left[X_1^{\nu_1}\ldots X_L^{\nu_L}\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1^{\nu_1}\ldots x_L^{\nu_L} f_{\vec{x}/g}(\vec{x})d\vec{x}$ и центральные $\mu_{\vec{x}/g\nu_1\ldots\nu_L} = \mathrm{M}_g\left[(X_1 - m_{x_1/g})^{\nu_1}\ldots(X_L - m_{x_L/g})^{\nu_L}\right]$ моменты, где $m_{x_l/g} = \mathrm{M}_g\left[X_l^{\nu_l}\right]$, $l = \overline{1, L}$,

• начальные $m_{S\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L} = \mathrm{M}_S\left[X_1^{\nu_1}\ldots X_L^{\nu_L}\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1^{\nu_1}\ldots x_L^{\nu_L} f_{S\vec{x}}(\vec{x})d\vec{x}$, $m_{I\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L} = \mathrm{M}_I\left[X_1^{\nu_1}\ldots X_L^{\nu_L}\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1^{\nu_1}\ldots x_L^{\nu_L} f_{I\vec{x}}(\vec{x})d\vec{x}$ и центральные $\mu_{S\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L} = \mathrm{M}_S\left[(X_1 - m_{Sx_1})^{\nu_1}\ldots(X_L - m_{Sx_L})^{\nu_L}\right]$, $\mu_{I\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L} = \mathrm{M}_I\left[(X_1 - m_{Ix_1})^{\nu_1}\ldots(X_L - m_{Ix_L})^{\nu_L}\right]$ моменты границ, где $m_{Sx_l} = \mathrm{M}_S\left[X_l^{\nu_l}\right]$, $m_{Ix_l} = \mathrm{M}_I\left[X_l^{\nu_l}\right]$,

• границы моментов, в частности, начальных моментов $m_{s\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L} = \sup\limits_{g\in G} m_{\vec{x}/g\nu_1\ldots\nu_L}$, $m_{i\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L} = \inf\limits_{g\in G} m_{\vec{x}/g\nu_1\ldots\nu_L}$ и центральных моментов $\mu_{s\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L} = \sup\limits_{g\in G}\mu_{\vec{x}/g\nu_1\ldots\nu_L}$, $\mu_{i\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L} = \inf\limits_{g\in G}\mu_{\vec{x}/g\nu_1\ldots\nu_L}$.

3. Описание многозначных процессов

3.1. Описание многозначного процесса одномерной функцией распределения

Определение 14. Многозначным процессом (функцией) называется функция $\tilde{x}(t)$, принимающая при фиксированном значении аргумента t множество значений.

Многозначный процесс устанавливает многозначное соответствие между точками области определения и областью ее значений. Принимая во внимание Определения 10 и 11, многозначный процесс будем рассматривать как функцию, которая при фиксированном значении аргумента t представляет собой многозначную величину, характеризуемую множеством (спектром) значений в этой точке и соответствующей функцией распределения $\tilde{F}_x(x;t)$, в общем случае многозначной.

Определение 15. m-м частичным пределом при $t \to t_0 - 0$ $(t \to t_0 + 0)$ многозначного процесса $\tilde{x}(t)$ называется m-й предел (число) однозначной частичной последовательности, сформированной из исходного процесса $\tilde{x}(t)$ при $t \to t_0 - 0$ $(t \to t_0 + 0)$.

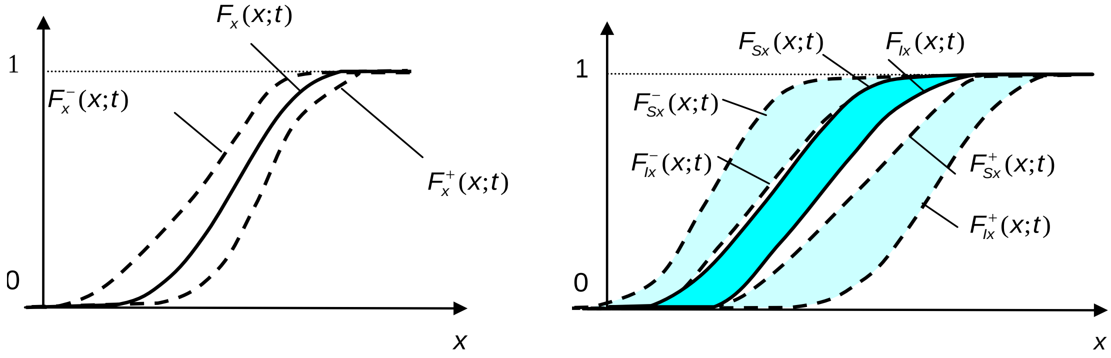
Определение 16. Левосторонним (правосторонним) спектром предельных точек $\tilde{x}^-(t_0) = \operatorname*{LIM}\limits_{t\to t_0-0}\tilde{x}(t)$ $(\tilde{x}^+(t_0) = \operatorname*{LIM}\limits_{t\to t_0+0}\tilde{x}(t))$ однозначного или многозначного процесса $\tilde{x}(t)$ называется множество всех его частичных пределов при $t \to t_0 - 0$ $(t \to t_0 + 0)$.

Спектры предельных точек $\tilde{x}^-(t_0)$, $\tilde{x}^+(t_0)$ процесса $\tilde{x}(t)$ описываются соответственно функциями распределения $\tilde{F}_x^-(x;t_0)$, $\tilde{F}_x^+(x;t_0)$. В общем случае эти функции многозначные, в частном же случае они могут быть однозначными.

Наиболее полно спектры предельных точек $\tilde{x}^-(t)$, $\tilde{x}^+(t)$ процесса $\tilde{x}(t)$ и спектр его значений в фиксированный момент t описывают множества условных функций распределения $F_{x/g}^-(x;t)$, $F_{x/g}^+(x;t)$, $F_{x/g}(x;t)$ для всех $g \in G$. Менее полно эти спектры характеризуют границы функций распределения, а именно: верхние $F_{Sx}^-(x;t)$, $F_{Sx}^+(x;t)$, $F_{Sx}(x;t)$ и нижние $F_{Ix}^-(x;t)$, $F_{Ix}^+(x;t)$, $F_{Ix}(x;t)$.

Определение 17. Многозначный процесс $\tilde{x}(t)$, у которого на всей области его определения функции распределения $\tilde{F}_x^-(x;t)$, $\tilde{F}_x^+(x;t)$ и $\tilde{F}_x(x;t)$ однозначные (то есть $\tilde{F}_x^-(x;t) = F_x^-(x;t)$, $\tilde{F}_x^+(x;t) = F_x^+(x;t)$ и $\tilde{F}_x(x;t) = F_x(x;t)$) (рис. 3 *а*), называется процессом случайного типа, а у которого указанное условие не выполняется (рис. 3 *б*), – процессом гиперслучайного типа.

Обратим внимание, что многозначный процесс, который при фиксированном значении аргумента t представляет собой многозначную величину, описываемую однозначной функцией распределения $F_x(x;t)$, не обязательно является многозначным процессом случайного типа. Для того, чтобы он был таковым, необходимо и достаточно, чтобы левосторонние и правосторонние пределы также описывались однозначными функциями распределения.



а *б*

Рис. 3. Функции распределения многозначного процесса случайного (*а*) и гиперслучайного (*б*) типов

Многозначный процесс случайного типа можно интерпретировать как своеобразный случайный процесс, принимающий одновременно множество значений и характеризуемый однозначными функциями распределения $F_x^-(x;t)$, $F_x^+(x;t)$ и $F_x(x;t)$.

Многозначный процесс гиперслучайного типа аналогично можно интерпретировать как своеобразный гиперслучайный процесс, также принимающий одновременно множество значений, но характеризуемый многозначными функциями распределения $\tilde{F}_x^-(x;t)$, $\tilde{F}_x^+(x;t)$ и $\tilde{F}_x(x;t)$.

У процесса случайного типа верхние и нижние границы функций распределения совпадают: $F_{Sx}^-(x;t) = F_{Ix}^-(x;t) = F_x^-(x;t)$, $F_{Sx}^+(x;t) = F_{Ix}^+(x;t) = F_x^+(x;t)$, $F_{Sx}(x;t) = F_{Ix}(x;t) = F_x(x;t)$, а у процесса гиперслучайного типа они разные.

3.2. Описание многозначного процесса многомерными функциями распределения

Более полное описание многозначного процесса $\tilde{x}(t)$ дают многомерные функции $\tilde{F}_{\vec{x}}(\vec{x};\vec{t})$ распределения, характеризующие процесс во множестве сечений $\vec{t} = (t_1,\ldots,t_L)$.

Наиболее полное описание многозначной функции распределения $\tilde{F}_{\vec{x}}(\vec{x};\vec{t}) = \{F_{\vec{x}/g}(\vec{x};\vec{t}),\ g \in G\}$ многозначного процесса гиперслучайного типа обеспечивает множество условных функций распределения $F_{\vec{x}/g}(\vec{x};\vec{t})$ и соответствующие плотности распределения $f_{\vec{x}/g}(\vec{x};\vec{t}) = \partial^L F_{\vec{x}/g}(\vec{x};\vec{t}) / \partial x_1 \ldots \partial x_L$ $(g \in G)$. Менее полное описание дают границы функции распределения $F_{S\vec{x}}(\vec{x};\vec{t}) = \sup_{g\in G} F_{\vec{x}/g}(\vec{x};\vec{t})$, $F_{I\vec{x}}(\vec{x};\vec{t}) = \inf_{g\in G} F_{\vec{x}/g}(\vec{x};\vec{t})$ и плотности распределения границ $f_{S\vec{x}}(\vec{x};\vec{t}) = \partial^L F_{S\vec{x}}(\vec{x};\vec{t}) / \partial x_1 \ldots \partial x_L$, $f_{I\vec{x}}(\vec{x};\vec{t}) = \partial^L F_{I\vec{x}}(\vec{x};\vec{t}) / \partial x_1 \ldots \partial x_L$.

По аналогии с векторной многозначной величиной многозначный процесс характеризуют также

• условные начальные

$$m_{\vec{x}/g\nu_1\ldots\nu_L}(t_1,\ldots,t_L) = \mathrm{M}_g\left[X^{\nu_1}(t_1)\ldots X^{\nu_L}(t_L)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} x_1^{\nu_1}\ldots x_L^{\nu_L} f_{\vec{x}/g}(\vec{x};\vec{t})d\vec{x}$$

и центральные

$$\mu_{\vec{x}/g\nu_1\ldots\nu_L}(t_1,\ldots,t_L) = \mathrm{M}_g\left[(X(t_1)-m_{x/g}(t_1))^{\nu_1}\ldots(X(t_L)-m_{x/g}(t_L))^{\nu_L}\right]$$

моменты, где $m_{x/g}(t_l) = \mathrm{M}_g\left[X^{\nu_l}(t_l)\right]$, $l = \overline{1,L}$,

• начальные

$$m_{S\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L}(t_1,\ldots,t_L) = \mathrm{M}_S[X^{\nu_1}(t_1)\ldots X^{\nu_L}(t_L)] = \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} x_1^{\nu_1}\ldots x_L^{\nu_L} f_{S\vec{x}}(\vec{x};\vec{t})d\vec{x},$$

$$m_{I\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L}(t_1,\ldots,t_L) = \mathrm{M}_I[X^{\nu_1}(t_1)\ldots X^{\nu_L}(t_L)] = \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} x_1^{\nu_1}\ldots x_L^{\nu_L} f_{I\vec{x}}(\vec{x};\vec{t})d\vec{x}$$

и центральные

$$\mu_{S\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L}(t_1,\ldots,t_L) = \mathrm{M}_S\left[(X(t_1)-m_{Sx_1})^{\nu_1}\ldots(X(t_L)-m_{Sx_L})^{\nu_L}\right],$$

$$\mu_{I\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L}(t_1,\ldots,t_L) = \mathrm{M}_I\left[(X(t_1)-m_{Ix_1})^{\nu_1}\ldots(X(t_L)-m_{Ix_L})^{\nu_L}\right]$$

моменты границ, где $m_{Sx_l} = \mathrm{M}_S\left[X^{\nu_l}(t_l)\right]$, $m_{Ix_l} = \mathrm{M}_I\left[X^{\nu_l}(t_l)\right]$,

• границы моментов, в частности, начальных моментов

$$m_{s\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L}(t_1,\ldots,t_L) = \sup_{g\in G} m_{\vec{x}/g\nu_1\ldots\nu_L}(t_1,\ldots,t_L),\; m_{i\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L}(t_1,\ldots,t_L) = \inf_{g\in G} m_{\vec{x}/g\nu_1\ldots\nu_L}(t_1,\ldots,t_L)$$

и центральных моментов

$$\mu_{s\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L}(t_1,\ldots,t_L) = \sup_{g\in G} \mu_{\vec{x}/g\nu_1\ldots\nu_L}(t_1,\ldots,t_L),\; \mu_{i\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L}(t_1,\ldots,t_L) = \inf_{g\in G} \mu_{\vec{x}/g\nu_1\ldots\nu_L}(t_1,\ldots,t_L).$$

4. Основы математического анализа многозначных процессов случайного типа

4.1. Непрерывный многозначный процесс случайного типа

Определение 18. Многозначный процесс $\tilde{x}(t)$ случайного типа называется непрерывным в точке t слева (справа), если

– он определен в этой точке и ее окрестности слева (справа);

– его левосторонняя $F_x^-(x;t)$ (правосторонняя $F_x^+(x;t)$) функция распределения в точке t совпадает с функцией распределения $F_x(x;t)$ в этой же точке (то есть в точке t функция распределения $F_x(x;t)$ непрерывна слева (справа) по t).

Определение 19. Многозначный процесс $\tilde{x}(t)$ случайного типа называется непрерывным на интервале (t_1, t_2), если он непрерывен слева и справа во всех точках рассматриваемого интервала.

Для непрерывного процесса $\tilde{x}^-(t) = \tilde{x}^+(t) = \tilde{x}(t)$ и $F_x^-(x;t) = F_x^+(x;t) = F_x(x;t)$.

Многие задачи анализа можно решать, используя понятие ветви (расслоения) многозначного процесса случайного типа.

Определение 20. c-ой ветвью ($c \in (0,1]$) непрерывного на интервале (t_1, t_2) многозначного процесса $\tilde{x}(t)$ случайного типа называется определенная на этом интервале однозначная функция

$$x_c(t) = \inf_x \arg_x (F_x(x;t) = c). \qquad (2)$$

Обратим внимание в Определении 20 на слова «определенная на этом интервале». Они означают, что функция $x_c(t)$, описываемая лишь на части интервала (t_1, t_2) выражением (2), c-ой ветвью не считается.

Из Определения 20 следует, что ветви многозначного процесса случайного типа не имеют общих точек (в частности, не пересекаются).

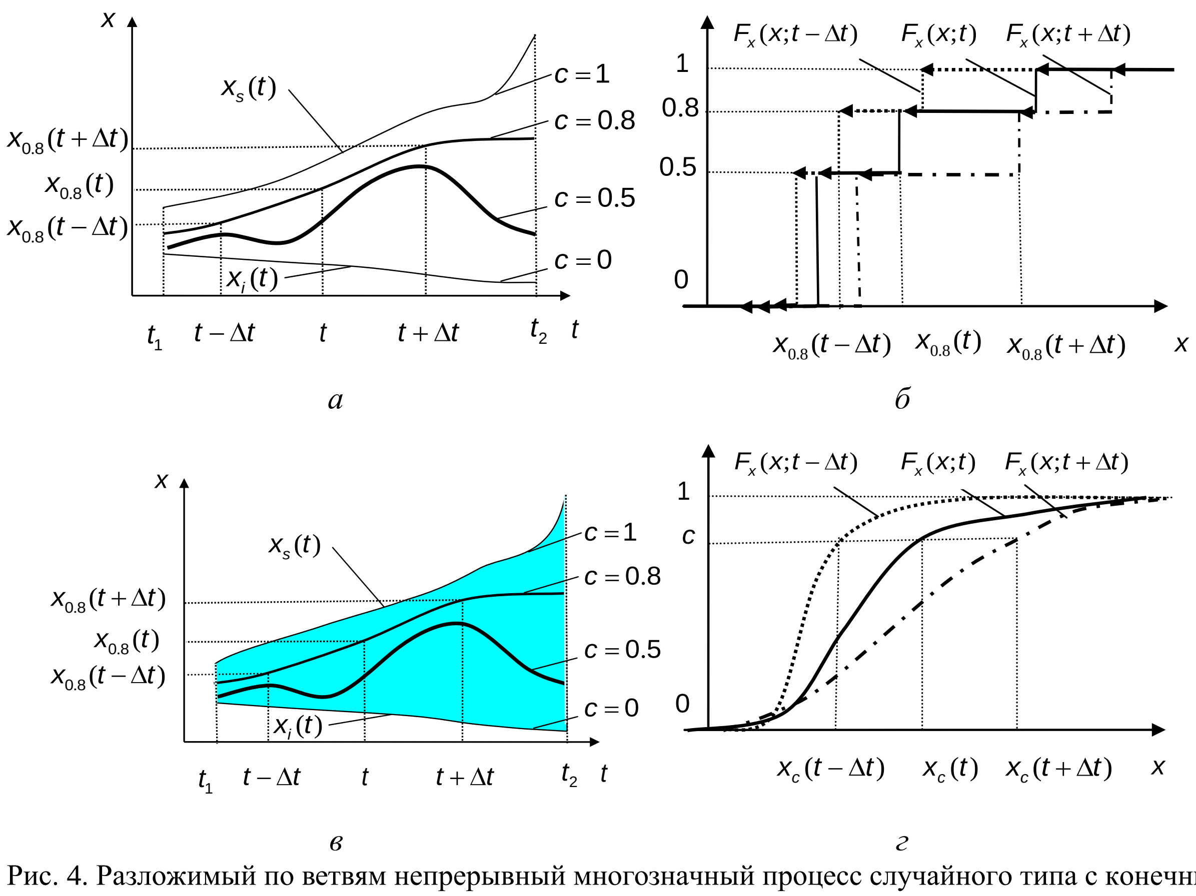


Рис. 4. Разложимый по ветвям непрерывный многозначный процесс случайного типа с конечным (*а*) и несчетным (*в*) числом ветвей, а также соответствующие функции распределения в моменты времени $t-\Delta t$, t, $t+\Delta t$ (*б*, *г*). На рис. 4 *а* и 4 *в* сплошными линиями изображены ветви; толщина линий пропорциональна плотности распределения по ветвям $f_c(c)$

Количество ветвей может быть конечным (рис. 4 *а*), счетным (ветви принадлежат сепарабельному пространству) или несчетным (рис. 4 *в*). Если количество ветвей конечное или счетное, то при $t = \text{const}$ функция распределения $F_x(x;t)$ – ступенчатая функция аргумента x (рис. 4 *б*), если же количество ветвей несчетное и для всех $t \in (t_1, t_2)$ значения функции плотно заполняют интервал $(x_i(t),\ x_s(t))$ (где $x_i(t) = \inf\limits_x \tilde{x}(t)$, $x_s(t) = \sup\limits_x \tilde{x}(t)$ – границы $\tilde{x}(t)$), то при $t = \mathrm{const}$ функция распределения $F_x(x;t)$ – строго возрастающая функция x (рис. 4 *г*). В любом случае при фиксированном t зависимость $x_c(t)$ от c представляет собой монотонно возрастающую функцию (рис. 4 *а, в*).

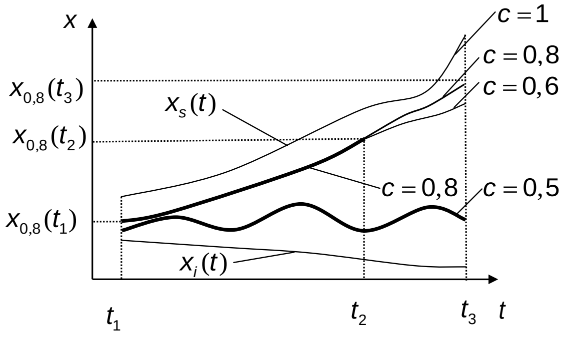


Рис. 5. Непрерывный многозначный процесс случайного типа, не раскладываемый на ветви на интервале (t_1, t_3). Сплошными линиями изображены ветви; толщина линий пропорциональна плотности распределения по ветвям $f_c(c)$

Не все непрерывные многозначные процессы случайного типа допускают разложение по ветвям. Для примера на рис. 5 изображен многозначный процесс, который на интервале (t_1, t_3) на ветви не раскладывается. При этом на интервалах $(t_1, t_2]$ и (t_2, t_3) он раскладывается на ветви: на интервале $(t_1, t_2]$ состоит из четырех ветвей, а на интервале (t_2, t_3) – из пяти.

Если на рассматриваемом интервале T разложить процесс на ветви не удается, однако на прилегающих друг к другу интервалах T_q $(q = \overline{1, Q}$, $\sum\limits_{q=1}^{Q} T_q = T)$ процесс раскладывается на ветви, то, разделив интервал T на интервалы T_q, можно избежать трудностей, вызванных невозможностью его разложения по ветвям на всем интервале T.

Определение 21. Многозначный непрерывный на интервале $t \in (t_1, t_2)$ процесс $\tilde{x}(t)$ случайного типа разложим по ветвям на интервале (t_1, t_2), если его можно представить на этом интервале множеством ветвей $x_c(t)$: $\tilde{x}(t) = \{x_c(t), c \in C\}$.

Ветви могут иметь разную «массу», которая описывается однозначной функцией распределения $F_c(c)$ по ветвям или соответствующей плотностью распределения $f_c(c) = dF_c(c)/dc$. В частном случае конечного или счетного количества ветвей функция $f_c(c)$ представляет собой сумму взвешенных обобщенных дельта-функций Дирака.

Если функция $x = \eta(c;t)$, обратная функции $c = F_x(x;t)$, однозначная и дифференцируема, то

$$f_c(c) = f_x(\eta(c;t);t)\left|\frac{d\eta(c;t)}{dc}\right|.$$

4.2. Производная и дифференциал многозначного процесса случайного типа

Определение 22. Правосторонней производной $\tilde{x}'^{+}(t)$ (левосторонней производной $\tilde{x}'^{-}(t)$) многозначного непрерывного процесса $\tilde{x}(t)$ случайного типа, разложимого по ветвям $x_c(t)$ $(c \in C)$, называется множество правосторонних (левосторонних) производных

$$\tilde{x}_c'^{\pm}(t) = \operatorname*{LIM}_{\Delta t \to \pm 0} \frac{x_c(t + \Delta t) - x_c(t)}{\Delta t}, \tag{3}$$

рассчитанных в точке t для всех ветвей $c \in C$, то есть $\tilde{x}'^{\pm}(t) = \{\tilde{x}_c'^{\pm}(t),\ c \in C\}$.

Производные $\tilde{x}_c'^{\pm}(t)$ могут быть однозначными и многозначными. Если эти производные однозначные, то они представляют собой скорости $x_c'^{\pm}(t)$ изменения c-ой ветви при приближении к t справа (слева). Тогда $\tilde{x}'^{\pm}(t)$ описываются функциями распределения $F_{x'}^{\pm}(x';t)$. Если же производные $\tilde{x}_c'^{\pm}(t)$ многозначные (не характеризуются конкретными числами), то они носят неопределенный характер. При этом $\tilde{x}'^{\pm}(t)$ описываются многозначными функциями распределения $\tilde{F}_{x'}^{\pm}(x';t)$, которые могут быть охарактеризованы границами функции распределения $F_{Sx'}^{\pm}(x';t)$, $F_{Ix'}^{\pm}(x';t)$.

Определение 23. Многозначный непрерывный процесс $\tilde{x}(t)$ случайного типа, разложимый по ветвям, называется дифференцируемым в точке t, если все его производные по ветвям однозначные и для всех ветвей левосторонняя производная совпадает с правосторонней производной: $x_c'^{-}(t) = x_c'^{+}(t) = x_c'(t)$.

Определение 24. Многозначный непрерывный процесс $\tilde{x}(t)$ случайного типа, разложимый по ветвям, называют дифференцируемым, если он дифференцируем на всем интервале его определения. Его производная $\tilde{x}'(t)$ представляет собой множество производных по ветвям $x_c'(t)$: $\tilde{x}'(t) = \{x_c'(t),\ c \in C\}$.

При изменении аргумента t производные по ветвям $x_c'(t)$ дифференцируемого процесса $\tilde{x}(t)$ могут принимать строго положительные значения, неотрицательные значения, строго отрицательные значения или менять знак. На рис. 4 *а*, 4 *в* указанные варианты представлены ветвями соответственно с параметрами $c = 1;\ 0{,}8;\ 0;\ 0{,}2$.

Поскольку у дифференцируемого процесса $\tilde{x}(t)$ производные по ветвям $x_c'(t)$ однозначные, производная $\tilde{x}'(t)$ описывается однозначной функцией распределения значений скоростей $F_{x'}(x';t)$ и соответствующей однозначной плотностью распределения $f_{x'}(x';t)$.

Определение 25. Дифференциалом $d\tilde{x}(t)$ многозначного непрерывного дифференцируемого процесса $\tilde{x}(t)$ случайного типа, разложимого по ветвям, назовем совокупность главных линейных частей приращений этого процесса по t

$$\Delta x_c \equiv x_c(t+dt) - x_c(t) = x_c'(t)dt + o(dt), \tag{4}$$

рассчитанных для множества ветвей $c \in C$, то есть

$$d\tilde{x}(t) = \{dx_c(t),\ c \in C\} = \{x_c'(t)dt,\ c \in C\} = \{x_c'(t),\ c \in C\}dt = \tilde{x}'(t)dt\,, \tag{5}$$

где dt – приращение по t, $o(dt)$ – бесконечно малая величина.

Дифференциал $d\tilde{x}(t)$ в силу линейной связи с производной $\tilde{x}'(t)$ и однозначности производных по ветвям описывается однозначными функцией распределения $F_{dx}(dx;t)$ и плотностью распределения

$$f_{dx}(dx;t) = \frac{1}{|dt|} f_{x'}(dx/dt;t)\,. \tag{6}$$

В общем случае производные не обязательно непрерывные и разложимы по ветвям. Для многозначной непрерывной разложимой по ветвям производной $\tilde{x}'(t)$ можно определить вторые производные $\tilde{x}''^{\pm}(t)$ и далее итерационно для многозначной непрерывной разложимой по ветвям производной $\tilde{x}^{(r)}(t)$ любого r-го порядка – производные $\tilde{x}^{(r+1)\pm}(t)$ порядка $(r+1)$.

Производные характеризуются своими функциями распределения, однозначными или многозначными. Если все вторые производные $\tilde{x}_c''^{\pm}(t)$ однозначные $(\tilde{x}_c''^{\pm}(t) = x_c''^{\pm}(t))$, то в точке t они характеризуют ускорения, с которыми изменяется процесс $\tilde{x}(t)$ по ветвям при приближении к t слева и справа. При этом ускорения $\tilde{x}''^{\pm}(t) = \{x_c''^{\pm}(t), c \in C\}$ описываются однозначными функциями распределения $F_{x''}^{\pm}(x''; t)$. Если производные $\tilde{x}_c''^{\pm}(t)$ многозначные (не характеризуются конкретными числами), то они носят неопределенный характер и тогда $\tilde{x}''^{\pm}(t) = \{\tilde{x}_c''^{\pm}(t), c \in C\}$ описываются многозначными функциями распределения $\tilde{F}_{x''}^{\pm}(x''; t)$.

Многозначный разложимый по ветвям дифференцируемый процесс $\tilde{x}(t)$, имеющий в точке t_0 однозначные дифференцируемые производные по ветвям $x_c^{(r)}(t_0)$ любого порядка r $(c \in C)$, может быть описан множеством ветвей $x_c(t)$, раскладываемых в точке t_0 в ряд Тейлора. При этом процесс $\tilde{x}(t)$ может быть представлен множеством своих значений $\tilde{x}(t_0) = \{x_c(t_0),\ c \in C\}$ в точке t_0, множеством значений производных $\{x_c^{(r)}(t_0),\ c \in C\}$ в этой же точке и множеством соответствующих функций распределения $F_x(x; t_0)$, $F_{x^{(r)}}(x^{(r)}; t_0)$, $r = 1, 2, \ldots$.

4.3. Интеграл от многозначного процесса случайного типа

Определение 26. Первообразной (примитивной) многозначного процесса $\tilde{x}(t)$ случайного типа, определенного на интервале $[a, b]$, называется дифференцируемый многозначный процесс $\tilde{y}(t)$, производная которого во всех точках этого интервала равна процессу $\tilde{x}(t)$: $\tilde{y}'(t) = \tilde{x}(t)$.

Определение 27. Неопределенным интегралом от многозначного процесса $\tilde{x}(t)$ случайного типа называется дифференцируемый многозначный процесс

$$\int \tilde{x}(t)\, dt = \tilde{y}(t) + C_0, \tag{7}$$

где C_0 – произвольная постоянная.

Определение 28. Определенным интегралом от многозначного непрерывного разложимого по ветвям процесса $\tilde{x}(t)$ случайного типа, определенного на интервале $[a, b]$, называется множество предельных точек

$$\tilde{y} = \int_a^b \tilde{x}(t) dt = \left\{ \operatorname*{LIM}_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{I} x_c(\xi_i) \Delta t_i, \quad c \in C \right\}, \tag{8}$$

а нижней y_I и верхней y_S границами интеграла – соответственно нижняя и верхняя границы этого множества, где $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_I = b$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $x_c(\xi_i)$ – значение c-той ветви процесса в произвольной точке $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

Если пределы LIM в выражении (8) однозначные, то определенный интеграл можно записать как

$$\tilde{y} = \int_a^b \tilde{x}(t) dt = \left\{ \int_a^b x_c(t) dt, \quad c \in C \right\} = \{y_c, \quad c \in C\}. \tag{9}$$

Определение 29. Определенный интеграл, допускающий представление в виде выражения (9), называется интегралом случайного типа, а определенный интеграл, не допускающий такое представление – интегралом гиперслучайного типа.

Интегралы (8), (9), как и любое множество предельных точек, описываются не только множеством своих значений, но и функциями их распределения. У интеграла гиперслучайного типа функция распределения значений $\tilde{F}_y(y)$ и плотности распределения $\tilde{f}_y(y)$ многозначные, а у интеграла случайного типа – однозначные ($\tilde{F}_y(y) = F_y(y)$, $\tilde{f}_y(y) = f_y(y)$).

Значения интеграла случайного типа связаны с параметром c однозначной зависимостью $y_c = y(c)$. Ее обратная функция $\tilde{c}(y)$ может быть как однозначной (тогда $\tilde{c}(y) = c(y)$), так и многозначной.

В первом случае, если функция $c(y)$ дифференцируема, то плотность распределения

$$f_y(y) = f_c(c(y)) \left| \frac{dc(y)}{dy} \right|, \tag{10}$$

а во втором случае, если обратная функция $\tilde{c}(y)$ многозначная и имеет R дифференцируемых ветвей $c^r(y),\ r = \overline{1, R}$, то

$$f_y(y) = \sum_{r=1}^{R} f_c(c^r(y)) \left| \frac{dc^r(y)}{dy} \right| \tag{11}$$

[2, 15].

4.4. Представление многозначного процесса случайного типа с помощью дифференциального уравнения

Дифференцируемый многозначный процесс случайного типа $\tilde{x}(t)$, разложимый по ветвям, можно рассматривать как множество $\tilde{x}^*(t) = \{x_c^*(t),\ c \in C\}$ частных решений $x_c^*(t)$, соответствующих разным начальным условиям, некоторого дифференциального уравнения первого порядка

$$x'(t) = h(x(t), t), \tag{12}$$

имеющего для фиксированных начальных условий единственное решение.

Единственность решения уравнения обеспечивается, как известно, если функция $h(x(t), t)$ представляет собой однозначную непрерывную функцию $x(t)$ и t, удовлетворяющую условию Липшица: $|h(x(t), t) - h(y(t), t)| \le M_0 |x(t) - y(t)|$, где M_0 – некоторая положительная постоянная.

В этом случае частные решения $x_c^*(t)$ для разных значений параметра $c \in C$ представляют собой ветви многозначного процесса $\tilde{x}(t)$, удовлетворяющего разным начальным условиям $x_c^*(t_0)$.

Заметим, что многозначный процесс случайного типа $\tilde{x}(t)$, разложимый по ветвям, можно также рассматривать как множество $\tilde{x}^*(t) = \{x_c^*(t),\ c \in C\}$ соответствующих разным граничным условиям частных решений $x_c^*(t)$ дифференциального уравнения (12), которое для фиксированных граничных условий имеет единственное решение.

Таким образом, многозначность процесса случайного типа, описываемого дифференциальным уравнением (12), может быть обусловлена неоднозначностью начальных условий и (или) неоднозначностью граничных условий.

Для дальнейшего рассмотрения тип накладываемых условий несуществен. Для определенности будем полагать, что частные решения $x_c^*(t)$ соответствуют разным начальным условиям.

Множество $\tilde{x}^*(t)$ характеризуется не только множеством функций $x_c^*(t)$, соответствующих разным ветвям $c \in C$, но также функцией распределения значений $F_x(x;t)$ для разных значений x и t. Эта функция распределения определяется функцией распределения ветвей $F_c(c)$ по оси c (или плотностью распределения ветвей $f_c(c)$).

5. Многозначные процессы гиперслучайного типа

5.1. Непрерывный многозначный процесс гиперслучайного типа

Многозначный процесс гиперслучайного типа $\tilde{x}(t)$ – множество многозначных процессов случайного типа $\tilde{x}_g(t)$: $\tilde{x}(t) = \{\tilde{x}_g(t),\ g \in G\}$. Описывающие его многозначные функции распределения $\tilde{F}_x^-(x;t)$, $\tilde{F}_x^+(x;t)$ и $\tilde{F}_x(x;t)$ представляют собой множества функций распределения $F_{x/g}^-(x;t)$, $F_{x/g}^+(x;t)$ и $F_{x/g}(x;t)$ составляющих процессов случайного типа $(g \in G)$:

$$\tilde{F}_x^-(x;t) = \{F_{x/g}^-(x;t),\ g \in G\},$$

$$\tilde{F}_x^+(x;t) = \{F_{x/g}^+(x;t),\ g \in G\},$$

$$\tilde{F}_x(x;t) = \{F_{x/g}(x;t),\ g \in G\}.$$

Определение 30. Многозначный процесс $\tilde{x}(t)$ гиперслучайного типа назовем непрерывным на интервале (t_1, t_2), если составляющие его многозначные процессы случайного типа непрерывны на этом же интервале.

Математический анализ многозначных процессов гиперслучайного типа, даже непрерывных, оказывается существенно более сложной задачей, чем математический анализ многозначных процессов случайного типа. Упрощение имеет место, если составляющие процессы случайного типа оказываются дифференцируемыми на всем интервале определения (а, следовательно, разложимыми по ветвям), и к тому же множества ветвей $c \in C_g$, соответствующие разным составляющим $g \in G$, одинаковы: $C_g = C\ \ \forall g \in G$.

В этом случае можно ввести понятие c/g-той ветви процесса.

Определение 31. c/g-ой ветвью $(c \in (0,1],\ g \in G)$ непрерывного на интервале (t_1, t_2) многозначного процесса $\tilde{x}(t)$ гиперслучайного типа назовем c-тую ветвь g-той составляющей процесса случайного типа:

$$x_{c/g}(t) = \inf_x \arg_x(F_{x/g}(x;t) = c). \tag{13}$$

Определяемые таким образом ветви – однозначные функции. Они могут иметь разную «массу», которая для фиксированного параметра $g \in G$ описывается однозначной функцией распределения по ветвям $F_{c/g}(c)$ или соответствующей плотностью распределения $f_{c/g}(c) = dF_{c/g}(c)/dc$. В частном случае конечного или счетного количества ветвей функция $f_{c/g}(c)$ представляет собой сумму взвешенных обобщенных дельта-функций Дирака.

Если функции $x=\eta_g(c;t)$, обратные функциям $c=F_{x/g}(x;t)$, однозначные и дифференцируемы $\forall g\in G$, то плотности распределения по ветвям $f_{c/g}(c)$ составляющих процессов связаны с плотностями распределения $f_{x/g}(x;t)=dF_{x/g}(x;t)/dx$ этих составляющих следующими соотношениями:

$$f_{c/g}(c)=f_{x/g}(\eta_g(c;t);t)\left|\frac{d\eta_g(c;t)}{dc}\right|,\ g\in G\,. \quad (14)$$

Однозначные ветви образуют многозначные ветви, определяемые следующим образом: $\tilde{c}=\{c/g,\ g\in G\}$.

Определение 32. Многозначный непрерывный на интервале $t\in(t_1,t_2)$ процесс $\tilde{x}(t)$ гиперслучайного типа будем называть разложимым по ветвям, если его составляющие процессы случайного типа $\tilde{x}_g(t)$ допускают разложение по ветвям $x_{c/g}(t)$: $\tilde{x}(t)=\{x_{c/g}(t),\quad c\in C,\ g\in G\}$.

5.2. Производная и дифференциал многозначного процесса гиперслучайного типа

Производные многозначного непрерывного разложимого по ветвям процесса гиперслучайного типа можно определить следующим образом.

Определение 33. Правосторонней производной $\tilde{x}'^{+}(t)$ (левосторонней производной $\tilde{x}'^{-}(t)$) многозначного непрерывного процесса $\tilde{x}(t)$ гиперслучайного типа, разложимого по ветвям $x_{c/g}(t)$ $(c\in C,\ g\in G)$, назовем множество правосторонних (левосторонних) производных

$$\tilde{x}'^{\pm}_{c/g}(t)=\underset{\Delta t\to\pm 0}{\mathrm{LIM}}\frac{x_{c/g}(t+\Delta t)-x_{c/g}(t)}{\Delta t}, \quad (15)$$

рассчитанных в точке t для всех $c\in C$ и составляющих $g\in G$.

Определение 34. Многозначный непрерывный процесс $\tilde{x}(t)$ гиперслучайного типа, разложимый по ветвям, назовем дифференцируемым в точке t, если все его производные по ветвям однозначные и для всех ветвей левосторонняя производная совпадает с правосторонней производной: $x'^{-}_{c/g}(t)=x'^{+}_{c/g}(t)=x'_{c/g}(t)\ \ \forall c\in C,\ g\in G$.

Определение 35. Многозначный непрерывный процесс $\tilde{x}(t)$ гиперслучайного типа, разложимый по ветвям, назовем дифференцируемым, если на всем интервале его определения дифференцируемы его составляющие процессы случайного типа. Производная $\tilde{x}'(t)$ такого процесса представляет собой множество производных его ветвей $x'_{c/g}(t)$: $\tilde{x}'(t)=\{x'_{c/g}(t),\ c\in C,\ g\in G\}$.

Определение 36. Дифференциалом $d\tilde{x}(t)$ многозначного непрерывного дифференцируемого процесса $\tilde{x}(t)$ гиперслучайного типа, разложимого по ветвям, назовем множество дифференциалов составляющих процессов случайного типа, то есть

$$d\tilde{x}(t)=\{dx_{c/g},\ c\in C,\ g\in G\}=\{x'_{c/g}(t)dt,\ c\in C,\ g\in G\}=\{x'_{c/g}(t),\ c\in C,\ g\in G\}dt\,.$$

5.3. Интеграл от многозначного процесса гиперслучайного типа

Понятия первообразной (примитивной), неопределенного и определенного интегралов от многозначного процесса гиперслучайного типа определим аналогично Определениям 26–28 для многозначного процесса случайного типа.

Определение 37. Первообразной (примитивной) многозначного процесса $\tilde{x}(t)$ гиперслучайного типа, определенного на интервале $[a,b]$, назовем дифференцируемый многозначный процесс $\tilde{y}(t)$, производная которого во всех точках этого интервала равна процессу $\tilde{x}(t)$: $\tilde{y}'(t) = \tilde{x}(t)$.

Определение 38. Неопределенным интегралом от многозначного процесса $\tilde{x}(t)$ гиперслучайного типа назовем дифференцируемый многозначный процесс

$$\int \tilde{x}(t)\,dt = \tilde{y}(t) + C_0 , \tag{16}$$

где C_0 – произвольная постоянная.

Определение 39. Определенным интегралом от многозначного непрерывного разложимого по ветвям процесса $\tilde{x}(t)$ гиперслучайного типа, определенного на интервале $[a,b]$, назовем множество предельных точек

$$\tilde{y} = \int_a^b \tilde{x}(t)dt = \left\{ \mathop{\mathrm{LIM}}_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{I} x_{c/g}(\xi_i)\Delta t_i, \quad c \in C,\ g \in G \right\}, \tag{17}$$

а нижней y_I и верхней y_S границами интеграла – соответственно нижнюю и верхнюю границы этого множества, где $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_I = b$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

Если пределы LIM в выражении (17) однозначные, то определенный интеграл можно записать как

$$\tilde{y} = \int_a^b \tilde{x}(t)dt = \left\{ \int_a^b x_{c/g}(t)dt, \quad c \in C,\ g \in G \right\} = \{ y_{c/g}, \quad c \in C,\ g \in G \} . \tag{18}$$

Определение 40. Определенный интеграл, допускающий представление в виде выражения (18), назовем интегралом случайного типа, а определенный интеграл, не допускающий такое представление, – интегралом гиперслучайного типа.

Интегралы (17), (18), как и любое множество предельных точек, описываются не только множеством своих значений, но и функциями их распределения. У интеграла гиперслучайного типа функция распределения значений $\tilde{F}_y(y)$ и плотности распределения $\tilde{f}_y(y)$ многозначные, а у интеграла случайного типа – однозначные ($\tilde{F}_y(y) = F_y(y)$, $\tilde{f}_y(y) = f_y(y)$).

5.4. Представление многозначного процесса гиперслучайного типа с помощью дифференциальных уравнений

Дифференцируемый многозначный процесс гиперслучайного типа $\tilde{x}(t)$, разложимый по ветвям, можно рассматривать как множество $\tilde{x}^*(t) = \{\tilde{x}_g^*(t),\ g \in G\}$ частных решений $\tilde{x}_g^*(t)$ совокупности дифференциальных уравнений первого порядка, описывающих составляющие функции случайного типа при определенных начальных условиях, где $\tilde{x}_g^*(t) = \{x_{c/g}^*(t),\ c \in C\}$ – множество частных решений g-го дифференциального уравнения

$$x'_g(t) = h_g(x_g(t), t) \quad (19)$$

при разных начальных условиях $x^*_{c/g}(t_0)$ $(c \in C)$ (или разных граничных условиях).

Множество $\tilde{x}^*(t)$ характеризуется не только множеством функций $x^*_{c/g}(t)$, соответствующих разным составляющим функциям $g \in G$ и ветвям $c \in C$, но также многозначной функцией распределения значений $\tilde{F}_x(x;t) = \{F_{x/g}(x;t),\ g \in G\}$.

Обратим внимание, что в описанном способе представления многозначного процесса многозначность обусловлена двумя причинами: отличием ядер $h_g(x_g(t),t)$ дифференциальных уравнений друг от друга, что порождает множество составляющих $\tilde{x}^*_g(t)$ функции $\tilde{x}(t)$, и отличием начальных условий $x^*_{c/g}(t_0)$ (или отличием граничных условий), что приводит к появлению множества ветвей $x^*_{c/g}(t)$ у каждой составляющей $\tilde{x}^*_g(t)$.

Поскольку многозначный процесс гиперслучайного типа состоит из многозначных процессов случайного типа, порождаемых дифференциальными уравнениями с разными ядрами, ветви $x^*_{c/g}(t)$, соответствующие разным составляющим $g \in G$, могут пересекаться и даже совпадать на отдельных участках.

Обратим внимание, что уравнение (19) напоминает дифференциальное включение [16], описываемое выражением $x'(t) \in H(x(t),t)$, где $H(x(t),t)$ – некоторое многозначное отображение. Однако между рассматриваемым подходом и подходом, разрабатываемым в рамках дифференциальных включений, имеется существенное отличие: в рассматриваемом подходе используется множество мер, в то время как в прототипе понятие меры вообще не используется.

6. Описание физических величин и процессов многозначными детерминированными величинами и процессами

Перспективными областями применения описанного математического аппарата представляются метрология, моделирование физических процессов в условиях неопределенности, обработка демографических, океанографических, метеорологических и других распределенных данных.

6.1. Представление результатов измерения физических величин и процессов многозначными детерминированными величинами и процессами

Ни один измерительный прибор не обеспечивает проведение точечных мгновенных измерений. Результат любых измерений формируется путем усреднения истинных значений измеряемой величины, соответствующих множеству точек определенной пространственно-временной области наблюдения.

Метрология построена на предположении, что истинное значение измеряемой величины одно и то же во всех точках этой области (точнее, отклонения от среднего значения пренебрежимо малы). Это предположение позволяет считать, что результат однократного измерения представляет собой однозначную детерминированную величину.

Конечно, в действительности в разных точках пространственно-временной области наблюдения истинные значения измеряемой величины разные. Имеющееся различие можно учесть, рассматривая результат измерения $\tilde{x}$ в виде многозначной детерминированной величины, описываемой определенной многозначной (в общем случае) функцией распределения $\tilde{F}_x(x)$. При проведении непрерывных измерений множество однократных измерений образует многозначный детерминированный процесс $\tilde{x}(t)$, характеризуемый функцией распределения $\tilde{F}_x(x;t)$.

Представление данных в виде многозначной величины, характеризуемой функцией или плотностью распределения, нашло достаточно широкое распространение. Многие компьютерные программы обработки изображений, современные телевизоры и цифровые фотоаппараты предоставляют возможность пользователю анализировать распределение яркости, контрастности и цветовой гаммы изображений.

Следует обратить внимание на то, что существует множество задач, в которых представление данных в виде однозначной детерминированной величины в принципе неприемлемо.

В качестве примера может служить следующая задача. При быстром вращении гребных винтов корабля возникает кавитация – образование и схлопывание пузырьков газа, вызываемых понижением давления в локальных областях. Это явление сопровождается повышением температуры газа пузырьков. Исследования показывают, что температура доходит до полутора тысяч градусов по Цельсию. Степень кавитации может быть оценена по результатам измерения температуры воды в районе гребных винтов.

Естественно, результат обычных измерений температуры по классической методике, представляющей результат измерения в виде однозначной величины, характеризующей среднюю температуру в области винтов, не адекватно отражает истинную температуру среды в разных точках исследуемой области, а, следовательно, и уровень возникающей кавитации.

Использование более совершенной методики измерения, предполагающей проведение измерений температуры во множестве локальных областей и представление результатов измерения в виде многозначной детерминированной величины $\tilde{x}$, характеризуемой функцией распределения $F_x(x)$, или в динамике в виде многозначной детерминированной функции $\tilde{x}(t)$, характеризуемой функцией распределения $F_x(x;t)$, позволяет получить существенно более объективную картину.

6.2. Моделирование физических процессов

Реальные физические процессы с неоднозначными начальными условиями адекватно описываются многозначными детерминированными функциями случайного типа, а с неоднозначными начальными условиями и параметрами, характеризующими развитие процесса во времени, – многозначными детерминированными функциями гиперслучайного типа.

В первом случае эти процессы описываются дифференциальным уравнением вида (12) и функцией распределения $F_x(x;t)$, а во втором – дифференциальным уравнением вида (19) и функцией распределения $\tilde{F}_x(x;t) = \{F_{x/g}(x;t),\ g \in G\}$.

Использование многозначных детерминированных функций, по всей видимости, может представлять особый интерес для моделирования широкополосных шумовых процессов.

При многообразии задач, в которых применение многозначных детерминированных величин и процессов представляется возможным и оправданным, область безусловной целесообразности применения именно рассмотренного подхода, а не какого-то иного, пока остается неясной. Для выработки конкретных рекомендаций по применению рассмотренного подхода к решению разнообразных практических задач необходимо проведение дополнительных исследований прикладного плана.

7. Выводы

1. Систематизированы, обобщены и развиты результаты, касающиеся математического анализа многозначных детерминированных величин и скалярных процессов, в частности, понятия обобщенного предела, непрерывности многозначных процессов случайного типа (описываемых однозначными функциями распределения), их производных и интеграла. Для многозначных процессов случайного типа введено понятие дифференциала.
2. Результаты, касающиеся математического анализа многозначных процессов случайного типа, обобщены на случай многозначных процессов гиперслучайного типа, представляемых совокупностью многозначных процессов случайного типа и описываемых многозначными функциями распределения.
3. Предложено описание многозначных процессов с помощью дифференциальных уравнений. Показано, что многозначный процесс случайного типа может быть представлен множеством частных решений дифференциального уравнения первого порядка, соответствующих разным начальным или граничным условиям, а многозначный процесс гиперслучайного типа – множеством частных решений совокупности таких дифференциальных уравнений.
4. Установлено, что многозначность процессов случайного типа может быть вызвана неоднозначностью начальных или граничных условий дифференциального уравнения, описывающего многозначный процесс, а многозначность процесса гиперслучайного типа – неоднозначностью ядра дифференциального уравнения.
5. Потенциальная область применения многозначных детерминированных величин и процессов представляется достаточно широкой. Однако для выработки конкретных рекомендаций по применению рассмотренного подхода к решению практических задач необходимо проведение дополнительных исследований прикладного плана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей / Гнеденко Б.В. – М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 1988. – 448 с.
2. Горбань І.І. Теорія ймовірностей і математична статистика для наукових працівників та інженерів [Електронний режим] / Горбань І.І. – К.: ІПММС НАН України, 2003. – 245 с. – Режим доступу: http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban_i_i/Pubications/4.pdf.
3. Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений: физические и математические основы [Электронный режим] / Горбань И.И. – К.: Наукова думка, 2011. – 318 с. – Режим доступа: http://www.immsp.kiev.ua/ perspages/gorban_i_i/Pubications/8.pdf.
4. Горбань И.И. Феномен статистической устойчивости [Электронный режим] / Горбань И.И. – К.: Наукова думка, 2014. – 444 с. – Режим доступа: http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban_i_i/Pubications/9_.pdf.
5. Gorban I.I. The statistical stability phenomenon / Gorban I.I. – Springer, 2017. – 362 p.
6. Эльясберг П.С. Измерительная информация. Сколько ее нужно? Как ее обрабатывать? / Эльясберг П.С. – М.: Наука, 1983. – 207 с.
7. Горбань И.И. Феномен статистической устойчивости / И.И. Горбань // Журнал технической физики. – 2014. – Т. 84, № 3. – С. 22 – 30.
8. Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений [Электронный режим] / Горбань И.И. – К.: ИПММС НАН Украины, 2007. – 184 с. – Режим доступа: http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban_i_i/Pubications/5.pdf.
9. Горбань И.И. Случайность и гиперслучайность [Электронный режим] / Горбань И.И. – К.: Наукова думка, 2016. – 287 с. – Режим доступа: http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban_i_i/Pubications/11_.pdf.
10. Moor R.E. Interval analyses / Moor R.E. – Englewood Cliffs. N.J.: Prentice-Hall, 1966. – 159 p.
11. Шокин Ю.И. Интервальный анализ / Шокин Ю.И. – Новосибирск: Наука, 1981. – 112 с.
12. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ / Шарый С.П. – Новосибирск: Изд-во XYZ; Институт вычислительных технологий, 2010. – 597 с.

13. Горбань И.И. Многозначные величины, последовательности и функции / И.И. Горбань // Математичні машини і системи. – 2012. – № 3. – С. 147 – 161.
14. Gorban I.I. Divergent and multiple-valued sequences and functions / I.I. Gorban // Problems of Computer Intellectualization. Book 28. – Kiev–Sofia: ITHEA, 2012. – P. 359 – 374.
15. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Левин Б.Р. – М.: Радио и связь, 1989. – 454 с.
16. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис [и др.]. – Москва: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. – 244 с.

Стаття надійшла до редакції 30.01.2017