Физика низких температур, 2010, т. 36, № 8/9, с. 1006–1012

Динамика нормальных и вырожденных неравновесных состояний магнетиков со спином $S = 1$

М.Ю. Ковалевский

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»
ул. Академическая, 1, г. Харьков, 61108, *Украина*
E-mail: mikov51@mail.ru

Статья поступила в редакцию 28 декабря 2009 г.

Исходя из вариационного принципа получены скобки Пуассона для макроскопических параметров и найдены нелинейные уравнения динамики магнитных сред со спином $S = 1$ для нормальных и вырожденных состояний. Введены в рассмотрение два типа обменных магнитных гамильтонианов, соответствующих двум инвариантам Казимира группы $SU(3)$. Построена термодинамика изучаемых магнитных систем и найдены плотности потоков аддитивных интегралов движения в терминах плотности магнитной энергии. Введен импульс магнонов в рассматриваемой конденсированной среде и получено для него уравнение динамики. Найдены спектры спиновых и квадрупольных волн для магнитных состояний с различной симметрией состояния равновесия относительно преобразования обращения времени.

Виходячи з варіаційного принципу отримано дужки Пуассона для макроскопічних параметрів та знайдено нелінійні рівняння динаміки магнітних середовищ зі спіном $S = 1$ для нормальних і вироджених станів. Введено в розгляд два типи обмінних магнітних гамільтоніанів, що відповідають двом інваріантам Казимира групи $SU(3)$. Побудовано термодинаміку магнітних систем, які вивчаються, та знайдено щільності потоків адитивних інтегралів руху в термінах щільності магнітної енергії. Введено імпульс магнонів в розглянутому конденсованому середовищі та отримано для нього рівняння динаміки. Знайдено спектри спінових і квадрупольних хвиль для магнітних станів з різною симетрією стану рівноваги щодо перетворення звернення часу.

PACS: **75.10.–b** Общая теория и модели магнитного упорядочения.

Ключевые слова: магнетики, гамильтонов подход, скобки Пуассона, законы сохранения, уравнение Ландау–Лифшица, спектр спиновых волн.

Введение

В статье рассмотрена динамика магнетиков со спином $S = 1$. В отличие от известного уравнения Лифшица [1], которое описывает эволюцию среды только с помощью вектора спина и хорошо обосновано для спина $1/2$, в более сложных магнитных системах со спином $S > 1/2$ необходимо расширение набора магнитных степеней свободы. В частности, для нормальных магнитных сред со спином $S = 1$ и гамильтонианом, обладающим $SU(3)$ симметрией, требуется в общем случае задание восьми динамических величин — плотности спина и квадрупольной матрицы. Изучение динамики таких магнитных систем осуществлялось в [2–4] и соответствовало учету только чистых квантовых состояний, для которых минимально полный набор динамических переменных включал четыре величины. В работе [5] развит гамильтонов подход, описывающий нелинейную динамику смешанных квантовых состояний для таких сред. Свойства равновесия магнетиков со спином $S = 1$ рассмотрены в работах [6–11], предсказана возможность нематических магнитных состояний, в которых состояние равновесия инвариантно относительно обращения времени.

Описание вырожденных магнитных состояний приводит к необходимости включения дополнительных магнитных степеней свободы. Вопросам описания динамики таких магнитных состояний посвящены работы [12–16] для магнетиков с $SO(3)$ симметричным гамильтонианом. Вариант построения гамильтоновой механики магнетиков с полным спонтанным нарушением $SU(3)$ симметрии рассмотрен в [5].

Симметрия гамильтониана и симметрия состояния равновесия имеют решающее значение в установлении набора динамических величин, которые необходимы для макроскопически полного задания физического состояния среды. Для магнетиков со спином $S=1$ может быть реализовано несколько возможностей динамического описания различающихся симметрией гамильтониана и состояния равновесия. В статье рассмотрены два случая. В первом случае (нормальные состояния магнетиков), для которых симметрия состояния равновесия $SU(3)$ и симметрия гамильтониана совпадают. Спин и квадрупольная матрица являются интегралами движения. В другом рассмотренном случае гамильтониан обладает $SU(3)$ симметрией, а состояние равновесия спонтанно нарушено по отношению к этой симметрии, при этом общее число динамических величин равно шестнадцати. Наше исследование основывается на гамильтоновом формализме [17]. Исходя из вариационного принципа найдены скобки Пуассона (СП) для всего набора параметров характеризующих макроскопически полно состояние локального равновесия и получены нелинейные уравнения динамики магнитных сред со спином $S=1$ для нормальных и вырожденных состояний. Вычислены спектры спиновых и квадрупольных волн, соответствующие нормальным магнитным состояниям, и установлен их явный вид, зависящий от свойства инвариантности состояния равновесия по отношению к обращению времени.

1. Вариационный принцип и скобки Пуассона в магнетиках со спином *S = 1*

Согласно общему подходу механики сплошных сред лагранжиан произвольной физической системы представим в виде $L = L_k - H \equiv \int d^3x F_a(\mathbf{x},\phi(\mathbf{x}'))\dot{\phi}_a(\mathbf{x}) - H$, где $L_k(\phi,\phi)$ — кинематическая часть лагранжиана, $H(\phi) = \int d^3x e(\mathbf{x},\phi)$ — гамильтониан системы. Плотность энергии среды $e(\mathbf{x},\phi(\mathbf{x}'))$ и величины $F_a(\mathbf{x},\phi(\mathbf{x}'))$ — определенные функционалы динамических переменных $\phi_a(\mathbf{x})$. Из принципа стационарного действия следуют уравнения динамики для величин $\phi_a(\mathbf{x})$ [17]:

$$\dot{\phi}_a(\mathbf{x}) = \int d^3x' J^{-1}_{ab}(\mathbf{x},\mathbf{x}';\phi)\frac{\delta H(\phi)}{\delta\phi_b(\mathbf{x}')} = \{\phi_a(\mathbf{x}), H(\phi)\}\,. \quad (1)$$

Входящая в это уравнение матрица $J_{ab}(\mathbf{x},\mathbf{x}';\phi)$ определяется равенством

$$J_{ab}(\mathbf{x},\mathbf{x}';\phi) \equiv \frac{\delta F_b(\mathbf{x}',\phi)}{\delta\phi_a(\mathbf{x})} - \frac{\delta F_a(\mathbf{x},\phi)}{\delta\phi_b(\mathbf{x}')}, \quad (2)$$

в терминах которой скобки Пуассона для величин $\phi_a(\mathbf{x})$ имеют вид

$$\{\phi_a(\mathbf{x}),\phi_b(\mathbf{x}')\} = J^{-1}_{ab}(\mathbf{x},\mathbf{x}';\phi)\,. \quad (3)$$

Для произвольных функционалов $A(\phi), B(\phi)$ введем скобки Пуассона соотношением

$$\{A,B\} \equiv \int d^3x \int d^3x' \frac{\delta A}{\delta\phi_a(\mathbf{x})}\{\phi_a(\mathbf{x}),\phi_b(\mathbf{x}')\}\frac{\delta B}{\delta\phi_b(\mathbf{x}')}\,. \quad (4)$$

Учитывая определения (1)–(4), видим, что эти скобки антисимметричны относительно перестановки $a \leftrightarrow b$, $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$ и удовлетворяют тождествам Лейбница и Якоби.

Конечные преобразования

$$\phi_a(\mathbf{x}) \to \phi'_a(\mathbf{x}) = \phi_a(\mathbf{x},\phi(\mathbf{x}')),$$

оставляющие инвариантной кинематическую часть действия

$$L_k(\phi,\dot{\phi}) = \int d^3x F_a(\mathbf{x};\phi)\dot{\phi}_a(\mathbf{x}) = L_k(\phi',\dot{\phi}') =$$

$$= \int d^3x F_a(\mathbf{x};\phi')\dot{\phi}'_a(\mathbf{x})\,,$$

будут каноническими, если выполняется соотношение $F_b(\mathbf{x}';\phi) = \int d^3x F_a(\mathbf{x};\phi')\delta\phi'_a(\mathbf{x})/\delta\phi_b(\mathbf{x}')$. В случае бесконечно малых преобразований $\phi_a(\mathbf{x}) \to \phi'_a(\mathbf{x}) = \phi_a(\mathbf{x}) + \delta\phi_a(\mathbf{x};\phi(\mathbf{x}'))$ отсюда следует равенство

$$\delta\phi_a(\mathbf{x}) = \{\phi_a(\mathbf{x}), G\},\ G(\phi) \equiv \int d^3x F_a(\mathbf{x},\phi)\,\delta\phi_a(\mathbf{x})\,, \quad (5)$$

где $G(\phi)$ — генератор бесконечно малых канонических преобразований. Формулировка гамильтонова подхода для описания неравновесных процессов в магнетиках предполагает выбор определенного набора динамических переменных, для которых вводится пуассонова структура. В изучаемых магнитных системах мы исходим из выражения для кинематической части лагранжиана вида

$$L_k(\mathbf{x}) = b_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\dot{a}_{\beta\alpha}(\mathbf{x}) \equiv \mathrm{Sp}\hat{b}(\mathbf{x})\dot{\hat{a}}(\mathbf{x})\,. \quad (6)$$

Здесь $b_{\alpha\beta}$ и $a_{\alpha\beta}$ — эрмитовы 3×3 матрицы ($\hat{a} = \hat{a}^+, \hat{b} = \hat{b}^+$), которые содержат по девять независимых величин. Для удобства и сокращения записи будем опускать спиновые индексы у матричных элементов там, где это возможно. Ниже мы свяжем матрицы $(\hat{a},\hat{b})$ с физическими динамическими переменными, которые используются в теории магнетизма.

Найдем бесконечно малые канонические преобразования $\delta\phi_\alpha(\mathbf{x};\phi)$, оставляющие инвариантной кинематическую часть лагранжиана. Зная, с одной стороны, их явный вид, а с другой стороны, учитывая соотношение (5), нетрудно найти скобки Пуассона динамических переменных. В частности, легко видеть, что вариации $\delta b_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = 0$, $\delta a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \neq 0$ (функции $\delta a_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ не зависят от $\hat{a}(\mathbf{x}), \hat{b}(\mathbf{x})$) оставляют инвариантной кинематическую часть лагранжиана и согласно (5) представимы в виде

$$\delta a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \{a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), G\}, \quad \delta b_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \{b_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), G\}, \quad (7)$$

здесь генератор преобразований имеет вид $G = \int d^3x b_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\delta a_{\beta\alpha}(\mathbf{x})$. Сравнивая (5) и (7) получим набор скобок Пуассона для этих матриц

$$\left\{b_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), b_{\mu\nu}(\mathbf{x}')\right\} = 0,$$

$$\left\{b_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), a_{\mu\nu}(\mathbf{x}')\right\} = -\delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \quad (8)$$

Для кинематической части лагранжиана $L_k(\mathbf{x}) \equiv -\mathrm{Sp}\hat{b}(\mathbf{x})\dot{\hat{a}}(\mathbf{x})$, которая отличается на полную производную по времени от функции (6), аналогично найдем

$$\begin{gathered}\left\{a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), a_{\mu\nu}(\mathbf{x}')\right\} = 0,\\ \left\{a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), b_{\mu\nu}(\mathbf{x}')\right\} = \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}').\end{gathered} \quad (9)$$

Полученные выражения СП согласованы с условием эрмитовости этих матриц и удовлетворяют тождеству Якоби. Видим, что матрицы $\hat{a}$ и $\hat{b}$ представляют собой канонически сопряженные величины.

Введем в рассмотрение матрицу

$$\hat{g}(\mathbf{x}) \equiv i\left[\hat{b}(\mathbf{x}), \hat{a}(\mathbf{x})\right]. \quad (10)$$

Квадратные скобки здесь и далее обозначают коммутатор двух матриц. Эрмитова матрица $\hat{g}(\mathbf{x})$ содержит восемь независимых величин в силу соотношения $\mathrm{Sp}\hat{g}(\mathbf{x}) = 0$. С этой матрицей связаны плотности квадрупольной матрицы $q_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ и спина $s_\alpha(\mathbf{x})$ соотношением

$$g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \equiv q_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) - i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}s_\gamma(\mathbf{x})/2. \quad (11)$$

Квадрупольная матрица $q_{\alpha\beta}$ симметрична и бесследна $q_{\alpha\beta} = q_{\beta\alpha}$, $q_{\alpha\alpha} = 0$. Пять ее независимых компонент могут быть параметризованы соотношением

$$q_{\alpha\beta} = q\left(e_\alpha e_\beta - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\right) + q'\left(f_\alpha f_\beta - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\right). \quad (12)$$

Здесь q и q' модули этой матрицы. Векторы $d_\alpha, e_\alpha, f_\alpha = (\mathbf{d}\times\mathbf{e})_\alpha$ образуют ортонормированный репер.

Величины $G_{\alpha\beta} = \int d^3x g_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ — представляют собой аддитивные интегралы движения

$$\left\{G_{\alpha\beta}, H\right\} = 0, \quad (13)$$

если принять во внимание только обменные магнитные взаимодействия.

Формулы (8),(9) и (10) позволяют найти скобки Пуассона переменных $\hat{a}(\mathbf{x})$ и $\hat{g}(\mathbf{x})$. Нетрудно показать, что эти выражения имеют вид

$$\begin{gathered} i\left\{g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), g_{\gamma\rho}(\mathbf{x}')\right\} = \\ = \left(-g_{\alpha\rho}(\mathbf{x})\delta_{\gamma\beta} + g_{\gamma\beta}(\mathbf{x})\delta_{\alpha\rho}\right)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered} i\left\{a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), g_{\gamma\rho}(\mathbf{x}')\right\} = \\ = \left(-a_{\alpha\rho}(\mathbf{x})\delta_{\gamma\beta} + a_{\gamma\beta}(\mathbf{x})\delta_{\alpha\rho}\right)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \end{gathered} \quad (14)$$

Легко видеть, что эти скобки Пуассона совместимы с условиями эрмитовости матриц $\hat{a}$, $\hat{g}$ и удовлетворяют тождествам Якоби. Заметим, что $\{\det\hat{a}(\mathbf{x}), g_{\gamma\rho}(\mathbf{x}')\} = 0$, поэтому, без ограничения общности в силу линейности правой части скобок Пуассона (14), можно положить $\det\hat{a} = 1$, так что матрица $\hat{a}(\mathbf{x})$ будет содержать восемь независимых величин. С помощью (15) могут быть получены уравнения динамики для ряда магнитных состояний со спином 1.

Случай 1. Гамильтониан $H = H(\hat{g})$ и нормальное состояние магнитной среды обладает симметрией *SU*(3). Элементы матрицы $g_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$, образующие подалгебру (14), содержат два инварианта Казимира**:**

$$\begin{gathered} g_2(\mathbf{x}) \equiv \mathrm{Sp}\hat{g}^2(\mathbf{x}), \quad g_3(\mathbf{x}) \equiv \mathrm{Sp}\hat{g}^3(\mathbf{x}), \\ \{g_2(\mathbf{x}), g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}')\} = 0, \ \{g_3(\mathbf{x}), g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}')\} = 0. \end{gathered} \quad (15)$$

Наличие таких инвариантов уменьшает число независимых матричных элементов соответственно до шести в двухосном случае и до четырех в одноосном случае.

Случай 2. Гамильтониан среды $H = H(\hat{g}, \hat{a})$ обладает *SU*(3) симметрией, а симметрия состояния равновесия спонтанно нарушена по отношению к генераторам $G_{\alpha\beta}$. Алгебра скобок Пуассона для шестнадцати величин (14) позволяет описать динамику среды со спином 1, учитывая спиновые и квадрупольные степени свободы, а также нарушение *SU*(3) симметрии.

В заключение этого раздела введем импульс рассматриваемой магнитной системы:

$$P_k = \int d^3x \pi_k(\mathbf{x}), \ \pi_k(\mathbf{x}) \equiv -\mathrm{Sp}\hat{b}(\mathbf{x})\nabla_k\hat{a}(\mathbf{x}). \quad (16)$$

Очевидно, в виду справедливости (8),(9),(16), имеют место соотношения

$$\{P_k, a_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\} = \nabla_k a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), \ \{P_k, b_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\} = \nabla_k b_{\alpha\beta}(\mathbf{x}).$$

2. Симметрия обменных взаимодействий, дифференциальные законы сохранения и модели гамильтонианов

Основные взаимодействия в магнитных системах носят обменный характер. Рассмотрение динамических процессов в таких средах требует формулировки законов сохранения в дифференциальной форме с учетом симметрии гамильтониана. В случае *SO*(3) симметрии гамильтониана $\{S_\alpha, H\} = 0$ набор интегралов движения γ_a состоит их гамильтониана и спинового момента $\gamma_a = H, S_\alpha = \int d^3x\zeta_a(\mathbf{x})$. Здесь $\zeta_a(\mathbf{x}) = e(\mathbf{x}), s_\alpha(\mathbf{x})$ — плотности аддитивных интегралов движения, $(a = 0, \alpha)$. Используя представление плотности потоков аддитивных интегралов движения работы [18], получим уравнения динамики, отражающие законы сохранения в дифференциальной форме:

$$\dot{e}(\mathbf{x}) = -\nabla_k q_k(\mathbf{x}),$$
$$q_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\int d^3x' x'_k \int_0^1 d\lambda \{e(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{x}'), e(\mathbf{x}-(1-\lambda)\mathbf{x}')\},$$
$$\dot{s}_\alpha(\mathbf{x}) = -\nabla_k j^k_\alpha(\mathbf{x}), \tag{17}$$
$$j^k_\alpha(\mathbf{x}) = \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\lambda \{s_\alpha(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{x}'), e(\mathbf{x}-(1-\lambda)\mathbf{x}')\},$$

где $q_k(\mathbf{x})$ — плотность потока энергии и $j^k_\alpha(\mathbf{x})$ — плотность потока спина. При получении последнего равенства учтена симметрия плотности обменной магнитной энергии относительно однородных спиновых поворотов

$$\{S_\alpha, e(\mathbf{x})\} = 0\,. \tag{18}$$

В случае $SU(3)$ симметрии гамильтониана $\{G_{\alpha\beta}, H\} = 0$ набор интегралов движения состоит их гамильтониана и матрицы $G_{\alpha\beta}$: $\gamma_a = H, G_{\alpha\beta} = \int d^3x \zeta_a(\mathbf{x})$ и $\zeta_a(\mathbf{x}) = e(\mathbf{x}), g_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ — плотности аддитивных интегралов движения, ($a = 0, \alpha\beta$). Уравнение движения для плотности энергии и выражение для плотности ее потока (17) не изменятся. Плотность энергии инвариантна относительно однородных линейных преобразований:

$$\{G_{\alpha\beta}, e(\mathbf{x})\} = 0\,. \tag{19}$$

Учитывая последнее соотношение, получим дифференциальный закон сохранения

$$\dot{g}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = -\nabla_k j^k_{\alpha\beta}(\mathbf{x}),$$
$$j^k_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\lambda \{g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{x}'), e(\mathbf{x}-(1-\lambda)\mathbf{x}')\}. \tag{20}$$

Здесь $j^k_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ — плотность потока, соответствующая сохраняющейся величине $G_{\alpha\beta}$.

Помимо свойства симметрии (13), обменный гамильтониан H трансляционно-инвариантен $\{L_k, H\} = 0$ и инвариантен относительно поворотов в конфигурационном пространстве $\{L_k, H\} = 0$, здесь L_k — орбитальный момент системы. Для соответствующей плотности магнитной энергии справедливы соотношения симметрии

$$\{P_k, e(\mathbf{x})\} = \nabla_k e(\mathbf{x}),\ \{L_i, e(\mathbf{x})\} = \varepsilon_{ikl} x_k \nabla_l e(\mathbf{x}), \tag{21}$$

Учет соотношений (21) и представление плотностей потоков в форме работы [18] позволяют сформулировать закон сохранения для плотности импульса магнонов в дифференциальной форме

$$\dot{\pi}_i(\mathbf{x}) = -\nabla_k t_{ik}(\mathbf{x}),\quad t_{ik}(\mathbf{x}) = -e(\mathbf{x})\delta_{ik} +$$
$$+ \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\lambda \{\pi_i(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{x}'), e(\mathbf{x}-(1-\lambda)\mathbf{x}')\}\,. \tag{22}$$

Гамильтониан Гейзенберга имеет вид

$$H = \int d^3x e(\mathbf{x}) = -\int d^3x d^3x' J(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|) s_\alpha(\mathbf{x}) s_\alpha(\mathbf{x}'),$$

где $J(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)$ — обменный интеграл двухчастичного магнитного взаимодействия. С точностью до членов квадратичных по пространственным градиентам плотности спина приведем выражение плотности магнитной энергии, соответствующее этому гамильтониану

$$e(\mathbf{x}) = -J s_\alpha(\mathbf{x}) s_\alpha(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\bar{J}\nabla_k s_\alpha(\mathbf{x}) \nabla_k s_\alpha(\mathbf{x}), \tag{23}$$

где $J \equiv \int d^3x J(|\mathbf{x}|)$, $\bar{J} \equiv \frac{1}{3}\int d^3x x^2 J(|\mathbf{x}|) > 0$ — эффективные обменные интегралы двухчастичного взаимодействия. Первое и второе слагаемые в (23) описывают соответственно однородное и неоднородное обменные взаимодействия, причем функциональный вид однородной части этой энергии определяется инвариантом Казимира.

Аналитический вид $SU(3)$ симметричного гамильтониана строим по аналогии с гамильтонианом Гейзенберга. Запишем магнитный гамильтониан в таком виде, чтобы однородная часть плотности энергии была выражена в терминах инвариантов g_2 и g_3:

$$H(g_2, g_3) = H(g_2) + H(g_3),$$
$$H(g_2) = 2\int d^3x d^3x' J(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|) \mathrm{Sp}\hat{g}(\mathbf{x})\hat{g}(\mathbf{x}'), \tag{24}$$
$$H(g_3) = -\int d^3x d^3x' d^3x'' I(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|, |\mathbf{x}-\mathbf{x}''|, |\mathbf{x}'-\mathbf{x}''|) \times$$
$$\times \mathrm{Sp}\hat{g}(\mathbf{x})\hat{g}(\mathbf{x}')\hat{g}(\mathbf{x}'')\,.$$

Здесь $J(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)$ и $I(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|, |\mathbf{x}-\mathbf{x}''|, |\mathbf{x}'-\mathbf{x}''|)$ — обменные интегралы двух- и трехчастичного магнитных взаимодействий.

Плотность энергии, соответствующая гамильтониану $H(g_2)$, имеет вид

$$e(\mathbf{x}, g_2(\mathbf{x})) = 2J g_2(\mathbf{x}) + \bar{J}\mathrm{Sp}\nabla_k \hat{g}(\mathbf{x}) \nabla_k \hat{g}(\mathbf{x}), \tag{25}$$

где $J \equiv \int d^3x J(|\mathbf{x}|)$, $\bar{J} \equiv \frac{1}{3}\int d^3x x^2 J(|\mathbf{x}|)$ — эффективные интегралы однородного и неоднородного двухчастичных обменных взаимодействий. Знаки и коэффициент в плотности энергии (25) выбраны таким образом, чтобы при отсутствии квадрупольных степеней свободы это выражение перешло в формулу (23).

Плотность энергии, соответствующая гамильтониану $H(g_3)$, имеет вид

$$e(\mathbf{x}, g_3(\mathbf{x})) = -I g_3(\mathbf{x}) + 2\bar{I}\mathrm{Sp}\hat{g}(\mathbf{x}) \nabla_k \hat{g}(\mathbf{x}) \nabla_k \hat{g}(\mathbf{x}), \tag{26}$$

и для нее также справедливо соотношение $SU(3)$ симметрии (19) относительно преобразований, генераторами которых являются матрицы $G_{\alpha\beta}$. Здесь

$$I \equiv \int d^3xd^3x' I\left(|\mathbf{x}|,|\mathbf{x}'|,|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\right),$$

$$\overline{I} \equiv \int d^3xd^3x'\left(x^2 + x'^2 - \mathbf{x}\mathbf{x}'\right) I\left(|\mathbf{x}|,|\mathbf{x}'|,|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\right)/3$$

— эффективные обменные интегралы однородного и неоднородного трехчастичного магнитного взаимодействия.

3. Динамика нормальных магнетиков со спином *S* = 1. *SU*(3) симметрия гамильтониана и состояния равновесия

«Нормальное» состояние изучаемой магнитной среды характеризуется плотностью обменной энергии, которая является функцией матрицы $g_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ и ее градиента $e(\mathbf{x}) = e\left(\hat{g}(\mathbf{x}), \nabla\hat{g}(\mathbf{x})\right)$. Основное термодинамическое соотношение имеет вид

$$de = \mathrm{Sp}\frac{\partial\hat{e}}{\partial g}d\hat{g} + \frac{\partial e}{\partial s}ds + \mathrm{Sp}\frac{\partial\hat{e}}{\partial\nabla_k g}d\nabla_k\hat{g}\,.$$

Здесь s — плотность энтропии.

В соответствии с формулами (14) алгебра скобок Пуассона произвольных функционалов для нормальных состояний приобретет вид

$$\{A,B\} = i\int d^3x\mathrm{Sp}\hat{g}(\mathbf{x})\left[\frac{\delta\hat{B}}{\delta g(\mathbf{x})},\frac{\delta\hat{A}}{\delta g(\mathbf{x})}\right]. \qquad (27)$$

Согласно (1) и (27) получим уравнение динамики магнетика со спином $S = 1$, соответствующее нормальным состояниям

$$\dot{\hat{g}}(\mathbf{x}) = i\left[\hat{g}(\mathbf{x}),\frac{\delta\hat{H}(\hat{g})}{\delta g(\mathbf{x})}\right], \qquad (28)$$

которые обобщают уравнения Ландау–Лифшица на магнитные системы с $SU(3)$ симметрией. Учитывая свойство симметрии обменных взаимодействий для плотности энергии (19), получим соотношение

$$\left[\frac{\partial\hat{e}}{\partial g},\hat{g}\right] + \left[\frac{\partial\hat{e}}{\partial\nabla_k g},\nabla_k\hat{g}\right] = 0\,.$$

Принимая во внимание это равенство из (17), (20) и (14) следуют выражения для плотностей потоков аддитивных интегралов движения:

$$\hat{j}_k = i\left[\hat{g},\frac{\partial\hat{e}}{\partial\nabla_k g}\right], \quad q_k = \mathrm{Sp}\frac{\delta\hat{H}}{\delta g}\hat{j}_k\,. \qquad (29)$$

Уравнения (17), (20) и плотности потоков в форме (29) описывают динамику нормальных состояний магнетиков со спином 1 в адиабатическом приближении для гамильтониана с $SU(3)$ симметрией. Легко видеть, что структура потоков (29) обеспечивает справедливость уравнений $\dot{g}_2 = \dot{g}_3 = 0$ для инвариантов Казимира.

Свойства симметрии (21) позволяют сформулировать уравнение динамики плотности импульса магнонов. В соответствии с (1), (8) и (9), для канонически сопряженных матриц $\hat{a}$ и $\hat{b}$ получим уравнения движения:

$$\dot{\hat{a}}(\mathbf{x}) = \frac{\delta\hat{H}}{\delta b(\mathbf{x})}, \quad \dot{\hat{b}}(\mathbf{x}) = -\frac{\delta\hat{H}}{\delta a(\mathbf{x})}\,.$$

Для нормальных магнитных состояний гамильтониан зависит от этих матриц посредством матрицы $\hat{g}$: $H\left(\hat{b},\hat{a}\right) = H\left(\hat{g}\left(\hat{b},\hat{a}\right)\right)$, поэтому в силу соотношения (10) последние уравнения перепишутся в виде

$$\dot{\hat{a}}(\mathbf{x}) = i\left[\hat{a}(\mathbf{x}),\frac{\delta\hat{H}}{\delta g(\mathbf{x})}\right], \quad \dot{\hat{b}}(\mathbf{x}) = i\left[\hat{b}(\mathbf{x}),\frac{\delta\hat{H}}{\delta g(\mathbf{x})}\right].$$

Принимая далее определение (16), приходим к уравнению динамики для плотности импульса магнонов (22), где плотность потока импульса магнонов для нормальных неравновесных состояний имеет вид

$$t_{ik} = \delta_{ik}\left(-e + \mathrm{Sp}\frac{\delta\hat{H}}{\delta g}\hat{g}\right) + \mathrm{Sp}\frac{\partial\hat{e}}{\partial\nabla_k g}\nabla_i\hat{g}\,.$$

Дальнейший анализ уравнений (20) и (29) проведем, используя модельное выражение плотности энергии $e(g_2)$ (25). Нетрудно преобразовать нелинейное уравнение (28) в уравнения для квадрупольной матрицы и антисимметричной матрицы $\varepsilon_{\alpha\beta} \equiv \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}s_\gamma$:

$$\dot{\hat{q}} = \overline{J}\left[\Delta\hat{\varepsilon},\hat{q}\right] + \overline{J}\left[\Delta\hat{q},\hat{\varepsilon}\right], \quad \dot{\hat{\varepsilon}} = 4\overline{J}\left[\hat{q},\Delta\hat{q}\right] + \overline{J}\left[\Delta\hat{\varepsilon},\hat{\varepsilon}\right]. \qquad (30)$$

Линеаризуя эти уравнения около состояния равновесия $\left(\hat{\varepsilon}_0\right)_{\alpha\beta} \equiv 0, \left(\hat{q}_0\right)_{\alpha\beta} \neq 0$ (T-четные состояния (спиновый нематик)) и переходя к фурье-представлению, приходим к дисперсионному уравнению:

$$\det\hat{D}(\mathbf{k},\omega) = 0\,,$$

$$D_{\beta\alpha}(\mathbf{k},\omega) = \delta_{\beta\alpha}[\omega^2 - 8\overline{J}^2k^4\mathrm{Sp}(\hat{q}_0^2)] + 12\overline{J}^2k^4(\hat{q}_0^2)_{\beta\alpha}\,.$$

В одноосном случае получим решения $\omega = 0$ и $\omega = \pm 2\overline{J}k^2q_0$. Для двухосной квадрупольной матрицы в состоянии равновесия решение приводит к трем спектрам квадрупольных волн:

$$\omega_\pm^{(1)} = \pm 2\overline{J}k^2q_0\,, \quad \omega_\pm^{(2)} = \pm 2\overline{J}k^2q_0'\,,$$

$$\omega_\pm^{(3)} = \pm 2\overline{J}k^2\left|q_0 - q_0'\right|.$$

Здесь q_0 и q_0' — модули этой квадрупольной матрицы в состоянии равновесия, определяемые соотношением (12). Линеаризуя уравнения (20) и (29) около состояния равновесия $\left(\hat{\varepsilon}_0\right)_{\alpha\beta} \neq 0, \left(\hat{q}_0\right)_{\alpha\beta} \equiv 0$ (T-нечетные состояния (ферромагнетик)) приходим к спектрам спиновых волн

$$\omega_{\pm}^{(1)} = 0, \ \ \omega_{\pm}^{(2)} = \pm \bar{J} k^2 s_0 , \ \ \omega_{\pm}^{(3)} = \pm 2 \bar{J} k^2 s_0 \ .$$

Параболическая зависимость частоты от волнового вектора в этих спектрах согласуется с результатами работы [19].

Аналогично рассмотрим динамические процессы с магнитным гамильтонианом $H(g_3)$. В результате получим дисперсионное уравнение:

$$\delta s_{\beta}(\mathbf{k},\omega) D_{\beta\alpha}(\mathbf{k},\omega) = 0 \ ,$$

$$D_{\beta\alpha}(\mathbf{k},\omega) \equiv \delta_{\beta\alpha} \{ \omega^2 - 4 \bar{I}^2 k^4 [2 \mathrm{Sp} \hat{q}_0^4 - (\mathrm{Sp} \hat{q}_0^2)^2] \} +$$

$$+ \ 4 \bar{I}^2 k^4 [3(\hat{q}_0^4) - 2(\hat{q}_0^2) \mathrm{Sp} \hat{q}_0^2]_{\beta\alpha} \ .$$

Если состояние спинового нематика одноосно, то приходим к двум спектрам квадрупольных волн:

$$\omega = 0, \qquad \omega = \pm \frac{2}{3} \bar{I} q^2 k^2 \ .$$

В двухосном случае квадрупольной матрицы получим дисперсионное уравнение:

$$\det | \hat{D}(\mathbf{k},\omega) | = 0, \ D_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega) = \delta_{\alpha\beta} X + e_{\alpha} e_{\beta} Y + f_{\alpha} f_{\beta} Z,$$

$$X = \omega^2 - \frac{4}{9} \bar{I}^2 k^4 [(q_0^2 - q_0'^2)^2 + 4 q_0 q_0' (q_0^2 + q_0'^2)] \ ,$$

$$Y = \frac{4}{9} \bar{I}^2 k^4 q_0 (q_0 - 2q_0')(q_0^2 + 2 q_0 q_0' - 2 q_0'^2) \ ,$$

$$Z = \frac{4}{9} \bar{I}^2 k^4 q_0' (q_0' - 2q_0)(q_0'^2 + 2 q_0 q_0' - 2 q_0^2) \ ,$$

откуда следуют спектры возбуждений, обусловленные двухосностью квадрупольной матрицы:

$$\omega_{\pm}^{(1)} = \pm 2 \bar{I} k^2 \sqrt{(q_0^2 - q_0'^2)^2 + 4 q_0 q_0' (q_0^2 + q_0'^2)} \ / \ 3 \ ,$$

$$\omega_{\pm}^{(2)} = \pm 2 \bar{I} k^2 \sqrt{q_0' (q_0'^3 + 4 q_0^3 + 4 q_0^2 q_0')} \ / \ 3 \ ,$$

$$\omega_{\pm}^{(2)} = \pm 2 \bar{I} k^2 \sqrt{q_0 (q_0^3 + 4 q_0'^3 + 4 q_0'^2 q_0)} \ / \ 3 \ .$$

Качественно они аналогичны случаю с гамильтонианом $H(g_2)$, но спектральная зависимость от модулей квадрупольной матрицы сложнее.

4. Магнетики с полным спонтанным нарушением *SU*(3) симметрии состояния равновесия

Изучим теперь случай, при котором гамильтониан обладает *SU*(3) симметрией, а в состоянии равновесия эта симметрия полностью нарушена. Вырожденное состояние изучаемой магнитной среды характеризуется плотностью обменной энергии, которая является функцией матриц $g_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ и $a_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$, а также их градиентов $e(\mathbf{x}) = e(\hat{g}(\mathbf{x}), \nabla \hat{g}(\mathbf{x}), \hat{a}(\mathbf{x}), \nabla \hat{a}(\mathbf{x}))$. Основное термодинамическое соотношение имеет вид

$$de = \mathrm{Sp} \frac{\partial \hat{e}}{\partial g} d\hat{g} + \frac{\partial e}{\partial s} ds + \mathrm{Sp} \frac{\partial \hat{e}}{\partial \nabla_k g} d\nabla_k \hat{g} + .$$

$$+ \ \mathrm{Sp} \frac{\partial \hat{e}}{\partial a} d\hat{a} + \mathrm{Sp} \frac{\partial \hat{e}}{\partial \nabla_k a} d\nabla_k \hat{a} \ .$$

Для вырожденных магнетиков со спином 1, используя формулы (14), найдем уравнения динамики

$$\dot{\hat{g}}(\mathbf{x}) = i \left[\hat{g}(\mathbf{x}), \frac{\delta \hat{H}(\hat{g},\hat{a})}{\delta g(\mathbf{x})} \right] + i \left[\hat{a}(\mathbf{x}), \frac{\delta \hat{H}(\hat{g},\hat{a})}{\delta a(\mathbf{x})} \right] ,$$

$$\dot{\hat{a}}(\mathbf{x}) = i \left[\frac{\delta \hat{H}(\hat{g},\hat{a})}{\delta g(\mathbf{x})}, \hat{a}(\mathbf{x}) \right]. \qquad (31)$$

Свойство *SU*(3) симметрии плотности обменной магнитной энергии (19) приводит к соотношению

$$\left[\frac{\partial \hat{e}}{\partial g}, \hat{g} \right] + \left[\frac{\partial \hat{e}}{\partial \nabla_k g}, \nabla_k \hat{g} \right] + \left[\frac{\partial \hat{e}}{\partial a}, \hat{a} \right] + \left[\frac{\partial \hat{e}}{\partial \nabla_k a}, \nabla_k \hat{a} \right] = 0 \ ,$$

учитывая которое уравнение динамики для матрицы $\hat{g}$ приобретает вид

$$\dot{\hat{g}} = -\nabla_k \hat{j}_k , \ \hat{j}_k = i \left[\hat{g}, \frac{\partial \hat{e}}{\partial \nabla_k g} \right] + i \left[\hat{a}, \frac{\partial \hat{e}}{\partial \nabla_k a} \right]. \quad (32)$$

Используя формулы (17) и (32), приходим к уравнению динамики плотности энергии и выражению для плотности потока энергии

$$\dot{e} = -\nabla_k q_k , \ \ q_k = i \mathrm{Sp} \frac{\delta \hat{H}}{\delta a} \left[\frac{\partial \hat{e}}{\partial \nabla_k g}, \hat{a} \right] + \mathrm{Sp} \frac{\delta \hat{H}}{\delta g} \hat{j}_k .$$

Получим уравнение динамики для плотности импульса магнонов для вырожденных магнитных состояний рассматриваемых магнетиков. В этом случае $H(\hat{b},\hat{a}) = H(\hat{g}(\hat{b},\hat{a}),\hat{a})$ и, учитывая далее формулы (16) и (14), приходим к уравнению (22), где плотность потока импульса магнонов для вырожденных неравновесных состояний имеет вид

$$t_{ik} = \delta_{ik} \left(-e + \mathrm{Sp} \frac{\delta \hat{H}}{\delta g} \hat{g} \right) + \mathrm{Sp} \frac{\partial \hat{e}}{\partial \nabla_k g} \nabla_i \hat{g} + \mathrm{Sp} \frac{\partial \hat{e}}{\partial \nabla_k a} \nabla_i \hat{a} \ .$$

В заключение автор выражает благодарность профессорам В.Г. Барьяхтару и С.В. Пелетминскому за интерес к работе и ценные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 09-01-00086-а.

1. L.D. Landau and E.M. Lifshits, *Phys. Z. Sov.* **8**, 155 (1935).
2. В.Л. Островский, *ЖЭТФ* **91,** 1690 (1986).
3. В.М. Локтев, В.С. Островский, *ФНТ* **20**, 983 (1994) [*Low Temp. Phys*. **20**, 775 (1994)].
4. B.A. Ivanov and A.K. Kolezhuk, *Phys. Rev.* **B68**, 052401 (2003).
5. А.А. Исаев, М.Ю. Ковалевский, С.В. Пелетминский, *ФММ* **77**, 20 (1994).
6. M. Nauciel-Bloch, G. Sarma, and A. Castets, *Phys. Rev.* **B5**, 4603 (1972).
7. Э.Л. Нагаев, *УФН* **136**, 61 (1982).
8. А.Ф. Андреев, И.А. Грищук, *ЖЭТФ* **87** 467 (1984).
9. N. Papanicolaou, *Nuclear Phys.* **B305**, 367 (1988).
10. G. Fath and J. Solyom, *Phys. Rev.* **B51**, 3620 (1995).
11. J. Bernatska and P. Holod, *J. Phys.* **42**, 075401 (2009).
12. Д.В. Волков, А.А. Желтухин, Ю.П. Блиох, *ФТТ* **13**, 1668 (1971).
13. W.M. Saslow, *Phys. Rev.* **B22**, 1174 (1980).
14. А.Ф. Андреев, В.И. Марченко, *УФН* **130**, 39 (1980).
15. В.Г. Барьяхтар, В.Г. Белых, Т.К. Соболева, *ТМФ* **77**, 311 (1988).
16. М.Ю. Ковалевский, С.В. Пелетминский, *ТМФ* **100**, 59 (1994).
17. А.А. Исаев М.Ю. Ковалевский, С.В. Пелетминский, *ЭЧАЯ* **27**, 431 (1996).
18. С.В. Пелетминский, А.И. Соколовский, *ТМФ* **18**, 121 (1974).
19. В.И. Бутрим, Б.А. Иванов, А.С. Кузнецов, Р.С. Химин, *ФНТ* **34**, 1266 (2008) [*Low Temp. Phys*. **34**, 997 (2006)].

Dynamics of normal and degenerate nonequilibrium states of magnets with spin *S* = 1

M.Y. Kovalevsky

Using the variation principle the Poisson brackets for the whole set of macroscopic parameters are obtained and nonlinear dynamic equations of magnetic media with spin $S = 1$ for normal and degenerate states are derived. Two types of exchange magnetic Hamiltonians corresponding to two Kazimir invariants of $SU(3)$ group are introduced in consideration. A thermodynamics of magnets investigated is constructed and flux densities of additive integrals of motion in terms of energy density are found. A magnon momentum in the condensed matter under consideration is introduced and its dynamic equation is derived. Spectra of spin and quadrupole waves for various time symmetry of equilibrium states obtained are.

PACS: **75.10.–b** General theory and models of magnetic ordering.

Keywords: magnets, Hamiltonian approach, Poisson brackets, conservation laws, Landau–Lifshitz equation, spin wave spectrum.