

Двойной нелинейный резонанс в ферромагнетиках и других динамических системах

А.С. Бакай

*Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»
ул. Академическая, 1, г. Харьков, 61108, Украина
E-mail: bakai@kipt.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 22 января 2010 г.

Описано явление двойного нелинейного резонанса в нелинейном осцилляторе общего вида. Результаты применяются для описания двойного нелинейного ферромагнитного резонанса в одноосном ферромагнетике. Обсуждается возможность появления подобного резонанса в системе биотоков головного мозга.

Описано явище подвійного нелінійного резонансу в нелінійному осциляторі загального вигляду. Результати застосовано для опису подвійного нелінійного ферромагнітного резонансу в одноосному ферромагнітнику. Розглянуто можливість появи подібного резонансу в системі біострумів головного мозку.

PACS: **05.45.-a** Нелинейная динамика и хаос;

87.15.A– Теория, моделирование и компьютерное моделирование.

Ключевые слова: нелинейный резонанс, ферромагнитный резонанс, биотоки мозга.

1. Введение

Во второй половине прошлого века в физике и других естественных науках значительное место заняли исследования явлений, обусловленных нелинейными динамическими и кинетическими процессами. В этом нет ничего удивительного, если учесть, что линейная динамика теряет применимость, как только отклонение от состояния устойчивого равновесия в известном смысле не мало и не затухает со временем. При потере равновесным состоянием устойчивости линейная динамика описывает начальный этап эволюции, но бесполезна при поисках тех устойчивых состояний, в которые система может со временем перейти. В давней работе, выполненной с В.Г. Барьяхтаром [1], исследован специальный случай подобных явлений — параметрическая неустойчивость звуковых волн под действием переменного однородного магнитного поля в магнитоупругом твердом теле. Нами был получен критерий неустойчивости основного состояния тела и найдены амплитуды звуковых волн в асимптотически устойчивом динамическом состоянии. Несколько позже в близком подходе был рассмотрен нелинейный ферромагнитный резонанс [2]. В ту же пору нами обсуждались вопросы нелинейной динамики более сложных систем, но в силу сложившихся обстоятельств эти исследования не были завершены. Подготовка к изда-

нию настоящего выпуска журнала «ФНТ» — хороший повод для того, чтобы вернуться к рассмотрению одной из обсуждавшихся ранее проблем, которая не утратила своей актуальности до сих пор. Речь идет о нелинейной динамике электромагнитных ритмов мозга, которой Н. Винер уделил большое внимание [3]. Общим у разнообразных нелинейных явлений (к которым относится и нелинейная динамика альфа-ритма, обнаруженного при помощи электроэнцефалограмм) является применимость сравнительно простых математических моделей для их интерпретации. В одних случаях они позволяют достаточно полно описать динамику системы, как бывает в задачах о нелинейных коллективных возбуждениях в твердом теле. В других случаях достигается качественное понимание природы наблюдаемого явления или проверка различных гипотез. Только на это пока и можно рассчитывать при попытке применить ту или иную простую нелинейную динамическую модель для анализа такого сложного объекта как электромагнитная активность головного мозга.

В настоящей публикации начнем с описания явления двойного нелинейного резонанса в колебательной системе с амплитудно-модулированной периодической внешней силой (разд. 2). Ввиду очевидной общности выбранной модели это явление может проявиться в колебательных и волновых процессах разнообразной природы. В качестве примера ограничимся описанием

двойного нелинейного резонанса в ферромагнетике (разд. 3) и кратко обсудим возможность его проявления в электромагнитных колебаниях мозга (разд. 4), отмечая важность этой проблемы и отдавая дань признания пионерским работам Винера в ее изучении.

2. Явление двойного нелинейного резонанса

Рассмотрим движение нелинейного осциллятора под действием внешней силы $F(t)$ вблизи состояния покоя ($u = 0$). Гамильтониан удобно представить в следующем виде:

$$\tilde{H}_1 = \frac{1}{2} \omega u^* u + \frac{1}{8} V_4 (u + u^*)^4 + F(t) u^* + \text{к. с.} \quad (1)$$

Здесь ω, V — коэффициенты разложения потенциальной энергии по степеням u, u^* . Кубические ангармонизмы не включены в (1), поскольку они не дают вклада в динамику в низшем приближении асимптотических разложений, используемом ниже. Обозначение гамильтониана субиндексом «1» введено, чтобы отличать его от гамильтониана для медленных переменных (a^2, ϑ), который будет получен ниже в результате усреднения.

В пренебрежении слагаемыми четвертого порядка по u в \tilde{H}_1 осциллятор совершает свободные гармонические колебания $u \approx a \exp(-i\omega t + i\vartheta_0)$ с амплитудой a и начальной фазой ϑ_0 . Под действием резонансной периодической силы $F(t) = f_0 e^{-i\nu t}$, $|\omega - \nu| \ll \omega$, в линейном приближении появляется решение, описывающее вынужденные колебания, $u = |a| \exp(-i\nu t + i\vartheta)$, с амплитудой $|a|$ и фазой ϑ , зависящими от f_0 .

Для учета диссипации введем диссипативную функцию

$$D = \gamma u u^* \quad (2)$$

с коэффициентом γ , который считается малым, $\gamma \ll \omega$. В противном случае диссипация становится доминирующей и интересующие нас нелинейные эффекты подавляются.

Нелинейный резонанс вида систем (1), (2) детально изучен [4–6]. Эти результаты успешно применялись для описания нелинейных резонансных явлений в разнообразных физических системах, включая динамику сплошных сред (систем с распределенными параметрами). Вследствие нелинейности отклика системы на действие внешней силы принцип суперпозиции действия отдельных составляющих внешней силы $F(t)$ не выполняется и задача (1), (2) не решается в общем виде. Поэтому каждый новый вид функции $F(t)$ может привести к качественным изменениям состояний движения.

Рассмотрим динамику под влиянием амплитудно-модулированной периодической силы

$$F(t) = (f_0 + f_1 \cos \Omega_1 t) e^{-i\nu t}, \quad (3)$$

считая частоту модуляции низкой, $\Omega_1 \ll \nu$.

Как обычно, будем искать решение уравнений движения, вытекающих из (1), (2), в виде

$$u = |a| \exp(-i\nu t + i\vartheta), \quad (4)$$

считая a и ϑ медленно меняющимися величинами, $|\dot{a}/\nu a|, |\dot{\vartheta}/\nu| \ll 1$. Подставив (4) в уравнения движения

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = i \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial u^*} + i \frac{\partial D}{\partial u^*}, \quad (5)$$

произведем их усреднение по времени на одном периоде $\left[t, t + \frac{2\pi}{\nu} \right]$.

При усреднении коэффициентов уравнения a и ϑ считаются постоянными. В результате получим уравнение известного вида

$$i \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma \right) a = V |a|^2 a + (f_0 + f_1 \cos \Omega_1 t) e^{i\Delta_0 t}, \quad (6)$$

$$\Delta_0 = \omega - \nu.$$

Ввиду медленности изменения амплитуды внешней силы она также не претерпела изменений после усреднения.

Полагая

$$a = b \exp(-i\Delta_0 t), \quad (7)$$

получаем следующее уравнение:

$$i \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma \right) b = (-\Delta_0 + V |b|^2) b + f_0 + f_1 \cos \Omega_1 t. \quad (8)$$

Переходя к вещественным переменным $A = |b|$, $\theta = \arg b \in [0, 2\pi]$, имеем

$$\dot{A} \equiv \frac{dA}{dt} = -\gamma A - (f_0 + f_1 \cos \Omega_1 t) \sin \vartheta, \quad (9)$$

$$\dot{\theta} \equiv \frac{d\theta}{dt} = \Delta_0 - V A^2 - \frac{f_0 + f_1 \cos \Omega_1 t}{A} \cos \vartheta.$$

Поскольку нас будет интересовать случай слабой диссипации и малой амплитудной модуляции, выясним особенности динамики системы (9) при $\gamma = f_1 = 0$, а затем рассмотрим ее в общем случае. Для определенности рассмотрим случай $V > 0$, что не ограничивает общности задачи.

При $f_1 = 0$ уравнения (9) не содержат зависящих явно от t коэффициентов и допускают достаточно полное качественное исследование с привлечением метода фазовой плоскости (см., например, [4,5]). Избегая ненужных повторений, приведем его наиболее важные для дальнейшего исследования результаты.

При $\gamma = 0$ система (9) является гамильтоновой с каноническими переменными (A^2, ϑ) . Гамильтониан таков:

$$\tilde{H}_2 = \left(-\Delta_0 + \frac{1}{2}VA^2 \right) A^2 + 2f_0 \cos \vartheta. \quad (10)$$

Уравнения для неподвижных особых точек ($\dot{A} = \dot{\vartheta} = 0$) определяют так называемые резонансные кривые, устанавливающие зависимость амплитуды и фазы стационарных колебаний от амплитуды и частоты вынуждающей силы

$$f_0 \sin \vartheta = 0; \quad \Delta_0 - VA^2 + \frac{f_0}{A} \cos \vartheta = 0. \quad (11)$$

Первое из этих уравнений имеет решения $\vartheta = \vartheta_+ = 0$ и $\vartheta = \vartheta_- = \pi$. Второе из уравнений (11) имеет только одно решение $A = A^p(v)$ при $\vartheta = \vartheta_-$, при всех значениях частоты v . При $\vartheta = \vartheta_+$ вещественных решений два, $A_+^p(v)$ и $A_+^s(v)$. Эти решения существуют при $v > v^2$:

$$v^* = \omega + \frac{3}{2} \left(\frac{V f_0^2}{2} \right)^{1/3}. \quad (12)$$

Уравнения для резонансных кривых удобно представить в разрешенном относительно v виде:

$$v = v_{\pm}(A) = \omega + VA^2 \pm \frac{f_0}{A}. \quad (13)$$

Вид этих кривых представлен на рис. 1. Здесь тонкой сплошной линией изображена так называемая скелетная кривая $v = \omega + VA^2$. Штриховой линией изображена ветвь кривой $v = v_-(A)$, на которой лежат значения амплитуд неустойчивых колебаний $A_p^s(v)$. Сплошными жирными линиями показаны ветви $A_+^p(v)$ и $A^p(v)$, отвечающие устойчивым колебаниям с постоянной амплитудой.

Упомянутая устойчивость неподвижной точки и динамика движения в ее малой окрестности определяются из линеаризованных в ее окрестности уравнений движения

$$\dot{\xi}_i = f_0 \eta \cos \vartheta_i, \quad \dot{\eta} = \alpha_i \xi_i, \quad (14)$$

где

$$\xi_i = A - A_i, \quad \eta = \vartheta - \vartheta_i, \quad \alpha_i = 2VA_i^2 + \frac{f_0}{A_i} \cos \vartheta_i, \quad (15)$$

индекс i нумерует особые точки.

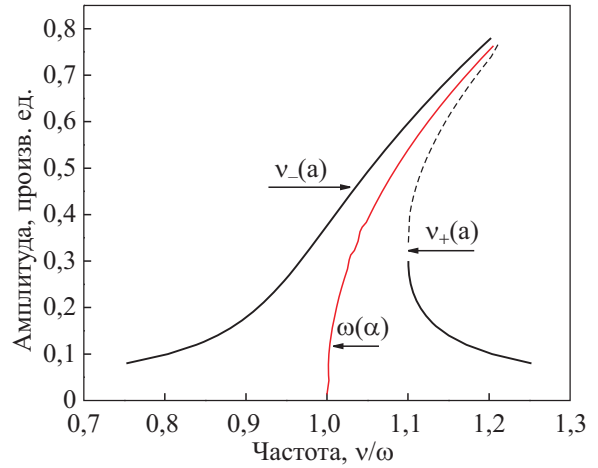


Рис. 1. Резонансные кривые $v = v_-(a)$ и $v = v_+(a)$ (жирные и штриховая линии). Тонкой линией показана скелетная кривая $v = \omega(a)$.

Квадраты собственных частот $\Omega_i^2 = -\alpha_i f_0$ положительны при $A = A_{\pm}^p(v)$. При $A = A_+^s(v)$ эта величина отрицательна. Таким образом, ветви $A_i = A_{\pm}^p(v)$, $\vartheta = \vartheta_{\pm}$ определяют положения эллиптических неподвижных точек (центров), а ветвь $A = A_+^s(v)$, $\vartheta = \vartheta_+$ определяет неустойчивые гиперболические неподвижные особые точки.

Заметив, что уравнение

$$\tilde{H}_2(A, \vartheta) = \text{const} \quad (16)$$

определяет фазовые траектории и позволяет найти решения бездиссипативной системы при $f_1 = 0$ в интегралах, приведем фазовые портреты системы в основной резонансной области при $|v - \omega| \ll \omega$, представляющей для нас главный интерес (рис. 2,а). Обратим внимание на то, что сепаратриса области осцилляции фазы вокруг центра $\vartheta = \vartheta_-$ проходит через точки $A = 0$, $\vartheta = \pi/2$, $3\pi/2$, являющиеся особыми точками второго из уравнений (9), и разделяет фазовые траектории с монотонным и осциллирующим изменением фазы ϑ . Ширина этой области по A , являющаяся одной из важных характеристик нелинейного резонанса, пропорциональна $(f_0/V)^{1/3}$.

Перейдем теперь к рассмотрению нелинейного резонанса при $\gamma, f_1 \neq 0$. Наиболее интересен для различных приложений случай слабой диссипации, когда $\gamma \ll \Omega_i$. Заметим, что это условие более сильное, чем условие проявлений обычного резонанса, $\gamma \ll \omega$, поскольку в нашем случае $\Omega \ll \omega$. При $\gamma \neq 0$ и $\gamma \ll \Omega_i$ центры становятся фокусами — асимптотически устойчивыми неподвижными точками, а седловые точки (являясь грубыми) лишь незначительно смещаются. Фазовая картина в области основного резонанса при $v < v^*$, $v > v^*$ и $f_1 = 0$ показана на рис. 2,б.

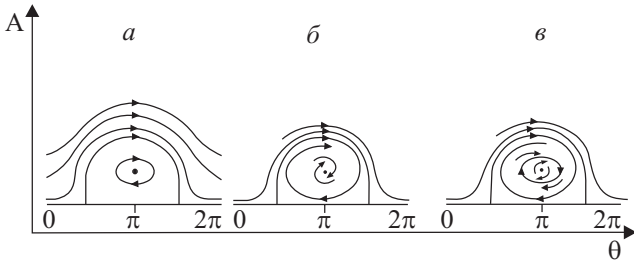


Рис. 2. Фазовые портреты в переменных амплитуда-фаза в окрестности основного резонанса: (а) — бездиссипативной системы с эллиптической неподвижной точкой (центром); (б) — та же резонансная область при наличии диссипации, центр превращается в асимптотически устойчивый фокус; (в) — та же резонансная область при наличии диссипации при выполнении условия двойного резонанса (23), фокус становится неустойчивым и фазовые траектории асимптотически стремятся к устойчивому предельному циклу, амплитуда которого определена уравнением (24).

Из уравнений (9), (14) видно, что при амплитудной модуляции внешней силы коэффициенты уравнений, описывающих движение в окрестности устойчивого фокуса, периодически меняются со временем. Это при известных условиях может привести к параметрической неустойчивости фокуса. Для выяснения этих условий рассмотрим уравнение движения в окрестности фокуса (A_-^{Φ}, ϑ_-). Рассмотрение движения в окрестности второго фокуса (когда он существует) проводится точно так же. Как и прежде, разложим уравнения в окрестности фокуса по отклонениям (ξ, η), но при этом учтем слагаемые вплоть до кубических. Это позволит найти уровень насыщения параметрической неустойчивости. В результате этой процедуры получаем:

$$\ddot{\eta}_- + \gamma \dot{\eta}_- + \Omega_-^2 (1 + \tilde{f}_- \cos \Omega_1 t) \eta_- + \frac{1}{6} \Omega_-^2 \eta_-^3 = 0, \quad (17)$$

где

$$\tilde{f}_- = \left(1 + \frac{f_0}{\alpha_- A_-^{\Phi}} \right) \frac{f_1}{f_0}. \quad (18)$$

В уравнении (17) опущены квадратичные по η_+ слагаемые, которые не дают вклада в медленное изменение амплитуды и фазы колебаний величины η .

Будем искать решение уравнения (17) в виде

$$\eta_- = \frac{1}{2} [B_- \exp(-i\Omega_1 t / 2) + B_-^* \exp(-i\Omega_1 t / 2)]. \quad (19)$$

В результате подстановки (19) в (17) и последующего усреднения на периоде $[t, t + 2\pi/\Omega_0]$ получим следующее уравнение:

$$i \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\gamma}{2} \right) B_- - \left[\Omega_- - \frac{\Omega_0}{2} - \frac{1}{8} \frac{\Omega_-^2}{\Omega_1} |B_-|^2 \right] B_- + \frac{\Omega_+^2}{\Omega_1} \tilde{f}_- B_-^* = 0. \quad (20)$$

Это уравнение имеет решение $B_- = 0$ при всех значениях параметров γ и \tilde{f}_- . Чтобы найти другие решения, обратимся к вытекающим из (20) уравнениям для стационарных амплитуды $|B_-|$ и фазы $\psi_- = \arg B_-$.

$$|B_-| (\gamma - g_- \sin 2\psi_-) = 0; \quad g_- = 2 \frac{\Omega_-^2 \tilde{f}_-}{\Omega_1}; \quad (21)$$

$$\Omega_- - \frac{1}{2} \Omega_1 - \frac{1}{8} \frac{\Omega_-^2}{\Omega_1} |B_-|^2 - g_- \cos 2\psi_- = 0.$$

Вещественные решения

$$\sin 2\psi_- = \gamma / g_-, \quad (22)$$

$$\Omega_1 = 2\Omega_- + \frac{1}{4} \frac{\Omega_-^2}{\Omega_1} |B_-|^2 \pm \sqrt{g_-^2 - \gamma^2}$$

существуют при $g_- < \gamma$. Это и есть условие наличия параметрического резонанса.

Исследуя найденные решения на устойчивость, находим, что решение $B = 0$ неустойчиво, если

$$|2\Omega_+ - \Omega_1| < \sqrt{g_-^2 - \gamma^2}. \quad (23)$$

При этом существует устойчивое решение с $|B_-| \neq 0$, определяемое уравнениями (22) со знаком «-» перед корнем во втором из них:

$$|B_-|^2 = \frac{4\Omega_1}{\Omega_-^2} \left(2\Omega_- - \Omega_1 + \sqrt{g_-^2 - \gamma^2} \right). \quad (24)$$

Это уравнение определяет амплитуду устойчивого предельного цикла в окрестности потерявшего устойчивость фокуса (A_-, ϑ_-), рис. 2, в.

Положив $2\Omega_- = \Omega_1$, получим характерную оценку величины амплитуды устойчивых колебаний:

$$|B_-| = 4(g_-^2 - \gamma^2)^{1/4}. \quad (25)$$

Комбинируя (4), (7), (14) и (19), получаем выражения, описывающие устойчивые колебания при обычном и двойном резонансе:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{u(t) + u^*(t)}{2} = [A_- + \xi(t)] \cos[\nu t + \gamma \vartheta_- + \eta(t)] = \\ &= \left[A_- - \frac{|B_-| \Omega_1 \alpha_-}{2} \sin \left(\frac{\Omega_1 t}{2} + \psi_- \right) \right] \times \\ &\times \cos \left[\nu t + \vartheta_- + |B_-| \cos \left(\frac{\Omega_1 t}{2} + \psi_- \right) \right]. \quad (26) \end{aligned}$$

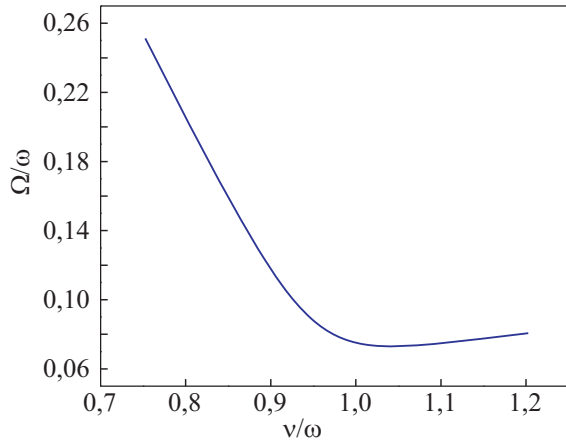


Рис. 3. Зависимость частоты колебаний амплитуды и фазы Ω_- в окрестности устойчивой неподвижной точки от основной частоты вынуждающей силы при постоянной амплитуде f .

Как видно, при двойном нелинейном резонансе имеет место амплитудная и частотная модуляции колебаний. Поскольку в интересующем нас случае $\mathfrak{A}_- \ll 1$, то с точностью до слагаемых $O(|B_-|^2)$

$$x(t) = A_- \cos \nu t - \frac{1}{2} |B_-| \left\{ \left(\frac{\Omega_1 \alpha_-}{2} + A_- \right) \sin \left[\left(\nu + \frac{\Omega_1}{2} \right) t + \psi_- \right] + \left(\frac{\Omega_1 \alpha_-}{2} - A_- \right) \sin \left[\left(\nu - \frac{\Omega_1}{2} \right) t - \psi_- \right] \right\}. \quad (27)$$

Таким образом, при двойном нелинейном резонансе в спектре вынужденных колебаний наряду с основной частотой ν появляются комбинированные гармоники $\nu \pm \Omega_0/2$ с амплитудами $\sim |B_-| \sim (g_-^2 - \gamma^2)^{1/4}$.

Полезно привести зависимость частоты Ω_- от ν в области главного резонанса (рис. 3). Как видно, Ω_- достигает минимума при $\partial \alpha'_- / \partial A_- = 0$, т.е. при

$$A_- = A_-^{(m)} = (f_0 / V_4)^{1/3}. \quad (28)$$

При этом $\nu_- < \nu^*$.

При $\Omega_1 \ll \Omega_-$ параметрический резонанс отсутствует, а амплитуда установившихся колебаний совершает медленные колебания с частотой Ω_1 :

$$A_-(t) = A_-(f_0) + \frac{\partial A_-(f_0)}{\partial f_0} f_1 \cos \Omega_1 t. \quad (29)$$

При $\Omega_1 \gg \Omega_-$ влиянием амплитудной модуляции вынуждающей силы можно пренебречь.

3. Двойной нелинейный ферромагнитный резонанс

Приведем уравнения движения магнитного момента под действием внешнего периодического магнитного поля в том виде, который использован в статье [2], но будем считать амплитуду поля периодически меняющейся с низкой частотой, как и в модели (1)–(3).

Рассмотрим одноосный ферромагнетик в однородном переменном магнитном поле

$$h_{\pm} = h_x \pm i h_y = H(+)= 2h(1 + \tilde{h} \cos \Omega_1 t) \cos \nu t. \quad (30)$$

Поле направлено перпендикулярно оси анизотропии (ось z). Его частота ν близка к резонансной частоте, а амплитуда модулирована с частотой $\Omega_1 \ll \nu$ и глубиной модуляции \tilde{h} .

Циркулярные составляющие магнитного момента $m_{\pm} = m_x \pm i m_y$ удовлетворяют уравнению движения [2]

$$m_{\pm} = \gamma m_{\pm} \mp \omega_a m_{\pm} \mp 2ig \sqrt{M_0^2 - a^2} H(+), \quad (31)$$

где

$$a^2 = m_+ m_-; \quad \omega_a = g \left[H_0 + \sqrt{M_0^2 - a^2} W'_a(a^2) \right],$$

M_0 — величина намагниченности; H_0 — внутреннее постоянное магнитное поле; $W(a^2)$ — плотность энергии анизотропии; g — гиромангнитное отношение; γ — коэффициент затухания однородной прецессии.

Если искать решение уравнения (31) в виде

$$m_+ = m_+^* = b(t) \exp(-i\nu t), \quad (32)$$

то для амплитуды $b(t)$ получаем следующее уравнение:

$$i \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma \right) b = \Delta(a^2) b + f(a^2, t), \quad (33)$$

где

$$\mathfrak{A} = \arg b; \quad b = a e^{i\mathfrak{A}}; \quad \Delta(a^2) = \nu - \omega_a; \quad (34)$$

$$f(a^2, t) = g \sqrt{M_0^2 - a^2} h(1 + \tilde{h} \cos \Omega_1 t).$$

Если в разложении величины ω_a по степеням a^2 сохранить только первые два слагаемые, а в разложении $f(a^2, t)$ оставить только нулевое по a^2 слагаемое (что оправдано ввиду предполагаемой малости величины f), то мы приходим к уравнению вида (8) и можем воспользоваться результатами исследования его решений. Несущественное отличие заключается в том, что постоянная V в случае уравнения (33) отрицательна. Это, однако, не меняет критерия существования двойного нелинейного резонанса и описания его характеристик. Что же касается обычного нелинейного ферромагнитного резонанса (при $\tilde{f} = 0$), то его детальное исследование содержится в работе [2].

4. Возможность двойного нелинейного резонанса в электромагнитных колебаниях мозга

С самого начала следует отметить, что электромагнитная активность мозга, в основе которой лежат сложные биохимические автоколебательные процессы, является составляющей физиологической активности организма. Их моделирование при помощи сравнительно простых динамических систем заведомо не может претендовать на полноту. Однако при существовании сравнительно простых стационарных колебательных режимов в отдельных участках мозга и их наблюдаемых изменений под действием контролируемых внешних (по отношению к отдельному участку) воздействий можно попытаться понять природу колебательного режима, привлекая ту или иную модель. Для определенности будем говорить об альфа-колебаниях коры головного мозга, характерные частоты которых лежат в интервале 8–13 Гц. Установлено, что альфа-колебания инициируются находящимися в теле таламуса пейсмейкерами — автоколебательными ячейками, задающими ритмы и амплитуды электромагнитных колебаний мозга [7]. Обнаружено, что спектр альфа-колебаний коры перестраивается под действием внешних периодических (электростатических, световых и др.) воздействий. При этом форма спектра сходна с представленной на рис. 4. Вокруг основного центрального пика формируются боковые максимумы, отделенные от центрального пика провалами. Подобные «мгновенные» спектры альфа-колебаний участков коры формируются и без внешних воздействий, а сами колебания при этом приобретают форму веретенообразных цугов, т.е. амплитудно-модулированных пакетов. Винер уделил много внимания объяснению природы спектров такого вида, основываясь на предположении о нелинейности альфа-колебаний (что надежно установлено), на свойствах отклика нелинейных систем на шумы и механизмах их саморегулирования [3]. При этом он высказал гипотезу о том, что альфа-ритмы выполняют сканирующую роль при поступлении в мозг сигналов

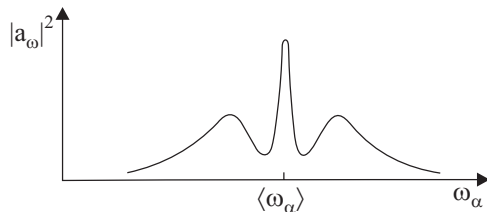


Рис. 4. Схематическое изображение «мгновенного» спектра одной из возможных реализаций альфа-колебаний — веретенообразного цуга; $\langle \omega_\alpha \rangle$ — среднее значение частоты альфа-колебаний. Боковые максимумы расположены при $\omega = \omega_\pm = \langle \omega_\alpha \rangle \pm \Omega_-$.

от органов чувств, что служит упорядочению и накоплению поступающей информации. Эта гипотеза не нашла позже должного подтверждения и была оспорена.

Как мы могли убедиться, у нелинейных осцилляторов, возбуждаемых периодической силой, возникает зависящая от амплитуды внешней силы и ангармонизма осциллятора частота колебаний амплитуды и фазы Ω вокруг равновесных значений. У системы нелинейных осцилляторов со случайно распределенными параметрами спектр частот Ω размыт вокруг их средних значений. Что касается механизма возбуждения колебаний амплитуды и фазы, то они могут порождаться как случайными, нерегулярными кооперативными сигналами (шумами), так и амплитудно-модулированными сигналами, поступающими от пейсмейкеров. В последнем случае может иметь место двойной нелинейный резонанс.

В пользу правдоподобности существования двойного нелинейного резонанса в ритмах мозга говорит тот факт, что явление параметрического возбуждения присуще коллективным колебаниям мозга. Это явление обнаружено при изучении патологических пароксизмальных ритмов, при которых колебания малой амплитуды в коре головного мозга скачком переходят в колебания большой амплитуды на половинной частоте [8,9]. Поскольку возникновение при патологиях второго (параметрического) резонанса приводит к синхронизации колебаний как на основной частоте, так и на некоторых низких частотах, то можно предположить, что излишняя синхронизация колебаний коры — нежелательное отклонением для нормального функционирования головного мозга.

Следует иметь в виду, что и нелинейный отклик участков коры, и автоколебания пейсмейкеров — составляющие сложной самоорганизованной системы, что каждая из этих подсистем является открытой, а электромагнитная активность — кооперативной. Поэтому простые модели и протекающие в них нелинейные явления (подобные двойному нелинейному резонансу) необходимы ввиду своей общности и «типичности», но не могут претендовать на какую-либо полноту моделирования или служить основой для далеко идущих выводов.

В обзоре [10] упоминаются различные типы устойчивых динамических состояний электромагнитной активности мозга: фокусы, предельные циклы, торы и стохастические аттракторы. Найденный нами аттрактор является устойчивым двумерным тором. Это, конечно, не исключает существования других устойчивых состояний при более сложных внешних силах (сигналах пейсмейкеров) и взаимодействиях соседних «осцилляторов» коры.

Заклучение

Двойной нелинейный резонанс — типичное ангармоническое явление. Оно присуще системам различной физической природы. Рассмотренные здесь ферромагнетик в однородном переменном магнитном поле и система биотоков мозга являются примерами простой (ферромагнетик) и сложной (биотоки мозга) динамической систем. То обстоятельство, что двойной нелинейный резонанс до сих пор не привлекал внимания исследователей (насколько мне известно), говорит о том, что пока не обнаружено систем и не создано устройств, в которых это явление играло бы доминирующую роль.

Следует еще раз отметить различие между «обычными» нелинейными резонансами и описанным в настоящей работе двойным резонансом. В бездиссипативной нелинейной системе, частота собственных колебаний которой зависит от амплитуды по некоторому закону $\omega(a)$, при действии условно-периодической силы с частотами $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$ имеются резонансы при всех комбинированных частотах, таких, что $K_0\omega(a) + K_1\Omega_1 + \dots + K_m\Omega_m = 0$ (K_0, \dots, K_m — целые числа). Как видно, таких резонансов и, соответственно, резонансных областей в фазовом пространстве имеется счетное множество. Важно, что в общем случае размеры резонансных областей весьма быстро уменьшаются

с ростом кратности резонанса, $K = \sum_0^m |K_i|$, так что относительная мера резонансных областей мала вместе с амплитудами внешних сил [11–13].

Затухание подавляет резонансы. В рассмотренной нами диссипативной модели (1), (2) при выбранных ограничениях на амплитуды и коэффициент затухания существует не более двух обычных резонансных областей, где $\omega(a) = \nu$.

Второй из описанных резонансов не связан с соизмеримостью собственной частоты $\omega(a)$ и частот внешней силы. Он обусловлен тем, что с устойчивым состоянием движения в резонансной области (ему соответствует центр на рис. 2,а) связана частота колебаний амплитуды и фазы $\Omega_- \sim (f\alpha)^{1/2}$. Она и порождает свое множество резонансов, один из которых описан в настоящей статье и назван двойным нелинейным.

Автор благодарен В.Г. Барьяхтару и Б.И. Иванову за полезные обсуждения.

1. А.С. Бакай, В.Г. Барьяхтар, *ЖЭТФ* **58**, 1342 (1970).
2. А.И. Ахиезер, А.С. Бакай, *УФЖ* **13**, 355 (1969).
3. Н. Винер, *Нелинейные задачи в теории случайных процессов*, Изд-во иностр. лит., Москва (1961).
4. Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Физматгиз, Москва (1958).
5. А.С. Бакай, *Дифференциальные уравнения* **2**, 479 (1966).
6. А.С. Бакай, *Дифференциальные уравнения* **2**, 1428 (1966).
7. P. Andersen and S.A. Anderson, *Physiological Basis of the Alpha-rhythm*, Appleton, N.-Y. (1968).
8. М.С. Гурфинкель, С.М. Осовец, *Биофизика* **8**, 731 (1973).
9. С.М. Осовец, Д.А. Гинзбург, В.С. Гурфинкель и др. в кн.: *Нелинейные волны, Стохастичность и турбулентность*, М.И. Рабинович (ред.), ИПФ АН СССР, Горький (1980), стр. 172.
10. С.Ј. Stam, *Clinical Neurophysiology* **116**, 2266 (2005).
11. А.Н. Колмогоров, *ДАН СССР* **98**, 527 (1954).
12. В.И. Арнольд, *УМН* **18**, 91 (1963).
13. I. Moser, *Proc. Nat. Ac. Sci. USA* **47**, 1824 (1961).

Double nonlinear resonance in ferromagnets and other dynamic systems

A.S. Bakai

The phenomenon of double nonlinear resonance in a nonlinear oscillator of a general type is described. The results are used to describe of the double nonlinear ferromagnetic resonance in a uniaxial ferromagnet. A possibility of the appearance of such a resonance in a system of brain biocurrents is considered.

PACS: **05.45.-a** Nonlinear dynamics and chaos; **87.15.A-** Theory, modeling, and computer simulation.

Keywords: nonlinear resonance, ferromagnetic resonance, brain biocurrents.