

# Магнитоплазменные волны на поверхности полупроводниковой нанотрубки со сверхрешеткой

А.М. Ермолаев, Г.И. Рашба, М.А. Соляник

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина*

E-mail: alexander.m.ermolaev@univer.kharkov.ua

georgiy.i.rashba@univer.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 22 декабря 2011 г.

В приближении случайных фаз рассматриваются спектры плазменных волн в электронном газе на поверхности полупроводниковой нанотрубки со сверхрешеткой в магнитном поле, параллельном оси трубки и сверхрешетки. В квантовом и квазиклассическом случаях рассчитаны частоты длинноволновых внутризонных и межзонных магнитоплазмонов в вырожденном электронном газе. При большом числе заполненных уровней кругового движения электронов частоты волн испытывают осцилляции, похожие на осцилляции де Гааза–ван Альфена, с изменением параметров нанотрубки и осцилляции Ааронова–Бома с изменением магнитного потока через сечение трубки. Характер осцилляций определяется отношением энергии Ферми к ширине минизоны. При большом значении этого отношения на графике зависимости частоты волны от параметров трубки существуют биения. Если этот параметр мал, биения отсутствуют.

У наближенні випадкових фаз розглядаються спектри плазмових хвиль в електронному газі на поверхні напівпровідникової нанотрубки з надграткою у магнітному полі, паралельному осі трубки і надгратки. У квантовому і квазікласичному випадках розраховано частоти довгохвильових внутризонних та міжзонних магнітоплазмонів у виродженому електронному газі. При великому числі заповнених рівнів колового руху електронів частоти хвиль випробовують осциляції, схожі з осциляціями де Гааза–ван Альфена, зі зміною параметрів нанотрубки і осциляції Ааронова–Бома зі зміною магнітного потоку через переріз трубки. Характер осциляцій визначається відношенням енергії Фермі до ширини мінізони. При великому значенні цього відношення на графіку залежності частоти хвилі від параметрів трубки існують биття. Якщо цей параметр малий, биття відсутні.

PACS: 73.63.Fg Нанотрубки;

73.21.Cd Сверхрешетки;

**71.45.–d** Коллективные эффекты;

73.20.Mf Коллективные возбуждения (включая плазмоны и другие возбуждения зарядовой плотности).

Ключевые слова: нанотрубка, сверхрешетка, магнитоплазмоны, спектр, биения.

## 1. Введение

Идея Келдыша [1] о возможности управлять зонным спектром проводников путем создания в кристалле дополнительной периодичности интенсивно развивается благодаря совершенствованию технологических методов изготовления таких систем, названных сверхрешетками [2,3]. В одномерной сверхрешетке потенциальная энергия электрона вдоль ее оси представляет собой систему чередующихся барьеров и ям с периодом, превышающим постоянную решетки. В результате в энергетическом спектре электронов, движущихся

вдоль оси сверхрешетки, существует система минизон, разделенных энергетическими щелями. Такая структура спектра проявляется во многих явлениях.

Физические свойства сверхрешеток рассмотрены во многих статьях, обзорах, монографиях. В статьях [4] рассмотрен эффект де Гааза–ван Альфена в сверхрешетках и слоистых системах. Обзор [5] охватывает широкий круг вопросов физики сверхрешеток, содержит анализ работ по плазменным колебаниям в сверхрешетках в отсутствие магнитного поля. В работе [6] изучены переходы металл–диэлектрик в сверхрешетках в магнитном поле, вычислена фотопроводимость.

Обзор [7] и монография [8] содержат подробное описание высокочастотных свойств полупроводниковых сверхрешеток. В монографии [9] приведена классификация сверхрешеток, описаны методы их изготовления и многочисленные применения. В статье [10] рассмотрены свойства двумерного электронного газа с квадратной сверхрешеткой.

Магнитоплазменные волны в полупроводниковых сверхрешетках в приближении случайных фаз рассматривались в работах [11–13]. В этих работах предполагалось, что вектор напряженности магнитного поля параллелен оси одномерной сверхрешетки, а барьеры, чередующиеся с квантовыми ямами, широкие и высокие. В этом случае электроны локализованы в ямах, туннелирование электронов между ямами отсутствует, система аппроксимируется набором независимых параллельных плоскостей с двумерным электронным газом. Эффекты запаздывания при распространении волн в такой структуре не учитывались. Эти эффекты учтены в статьях [14]. Туннелирование электронов между ямами учтено в работе [15], в которой рассмотрен полупроводник с одномерной сверхрешеткой в магнитном поле, параллельном ее оси. Расчет спектра магнитоплазмонов выполнен методом самосогласованного поля [16] с использованием модели эффективной массы электрона и сильной связи электронов в ямах. Туннелирование электронов предполагается слабым. Авторы работы [15] рассмотрели не только длинноволновый предел, когда волновое число магнитоплазмона мало по сравнению с шириной зоны Бриллюэна вдоль оси сверхрешетки, но и учли процессы переброса. В этой работе показано, что дрейф электронов вдоль оси сверхрешетки способствует появлению новых ветвей в спектре волн. Соответствующие сверхрешетки и магнитоплазмоны в статье [15] названы туннельными. В работе [17] рассмотрены локальные плазменные моды в сверхрешетках с дефектным слоем. Электромагнитные и магнитопримесные волны в сверхрешетках и слоистых проводниках в условиях квантового эффекта Холла изучались в статьях [18,19]. Работы [20,21] посвящены плазменным волнам в двумерном электронном газе с одномерной сверхрешеткой в магнитном поле, перпендикулярном плоскости, занятой электронами. В статье [20] учтен параболический потенциал конфайнмента, а в [21] рассмотрена не только электрическая, но и магнитная модуляция спектра электронов.

В цитированных выше работах рассматривались сверхрешетки с плоской геометрией. Между тем современные технологические методы позволяют создавать не только планарные, но и цилиндрические сверхрешетки — радиальные и продольные [22,23]. Радиальная цилиндрическая сверхрешетка представляет собой совокупность коаксиальных цилиндров, свойства которых чередуются, а продольная сверхрешетка может быть моделирована набором соосных колец (рис. 1).

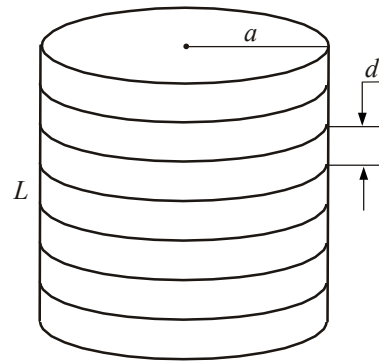


Рис. 1. Нанотрубка со сверхрешеткой.

Диамагнетизм вырожденного электронного газа на поверхности цилиндрической нанотрубки с продольной сверхрешеткой рассмотрен в работе [24]. В этой работе магнитное поле предполагается параллельным оси цилиндра и сверхрешетки. Используется модель эффективной массы электрона и модель сильной связи.

В настоящей статье на основе модели эффективной массы и сильной связи электронов в приближении случайных фаз вычислен спектр магнитоплазменных волн в электронном газе на поверхности полупроводниковой нанотрубки с продольной сверхрешеткой. Магнитное поле предполагается параллельным оси трубки. Во втором разделе обсуждается спектр энергии электронов на трубке со сверхрешеткой, а в третьем вычисляется поляризационный оператор вырожденного электронного газа. В четвертом и пятом разделах приведены результаты расчета спектра внутризонных и межзонных магнитоплазмонов. В заключении резюмированы результаты работы.

## 2. Энергетический спектр электронов на трубке со сверхрешеткой

Энергия электрона на поверхности полупроводниковой цилиндрической нанотрубки с продольной сверхрешеткой в магнитном поле, параллельном ее оси, равна:

$$\varepsilon_{lk} = \varepsilon_0(l + \eta)^2 + \Delta(1 - \cos kd). \quad (1)$$

Здесь  $\varepsilon_l = \varepsilon_0(l + \eta)^2$  — энергия кругового движения электрона,  $l = 0, \pm 1, \dots$  — азимутальное квантовое число,  $\varepsilon_0 = 1/2 m_* a^2$  — вращательный квант,  $m_*$  — эффективная масса электрона,  $a$  — радиус трубки,  $\eta = \varphi/\varphi_0$  — отношение потока  $\varphi = \pi a^2 B$  магнитной индукции  $B$  через поперечное сечение трубки к кванту потока  $\varphi_0 = 2\pi c/e$  [25,26],

$$\varepsilon_k = \Delta(1 - \cos kd) \quad (2)$$

— энергия продольного движения электрона с квази-волновым числом  $k$ ,  $\Delta$  и  $d$  — амплитуда и период модулирующего потенциала сверхрешетки. Выраже-

ние (2) получено в приближении сильной связи [27]. Оно часто используется при изучении свойств металлов с открытыми поверхностями Ферми [27,28], слоистых систем [29], полупроводниковых сверхрешеток [6–8]. Спиновое расщепление уровней в формуле (1) не учитывается. Квантовая постоянная принята равной единице. Если  $kd \ll 1$ , выражение (2) принимает вид  $\epsilon_k = k^2/2m^*$ , где

$$m^* = 1/\Delta d^2. \quad (3)$$

Предполагается, что поперечная и продольная эффективные массы электрона одинаковы.

Спектр (1) представляет собой набор минизон шириной  $2\Delta$  с корневыми особенностями плотности состояний на их границах  $\epsilon_l$ ,  $\epsilon_l + 2\Delta$  [30]. Если  $\eta < 1/2$ , то положения нижних границ минизон  $\epsilon_l$  удовлетворяют неравенствам  $\epsilon_0\eta^2 < \epsilon_{-1} < \epsilon_1 < \epsilon_{-2} < \dots$ . Ширина  $k$ -й щели между соседними минизонами равна

$$\begin{aligned} \delta_k &= k\epsilon_0(1-2\eta) - 2\Delta, \quad k = 1, 3, 5, \dots, \\ \delta_k &= 2k\epsilon_0\eta - 2\Delta, \quad k = 2, 4, 6, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Если же  $\eta > 1/2$ , то последовательность нижних границ минизон иная:  $\epsilon_{-1} < \epsilon_0\eta^2 < \epsilon_{-2} < \epsilon_1 < \dots$ . В этом случае

$$\begin{aligned} \delta_k &= k\epsilon_0(2\eta-1) - 2\Delta, \quad k = 1, 3, 5, \dots, \\ \delta_k &= 2k\epsilon_0(1-\eta) - 2\Delta, \quad k = 2, 4, 6, \dots \end{aligned} \quad (5)$$

При изучении плазменных волн на поверхности трубки можно ограничиться интервалом  $0 < \eta < 1$  [31,32]. Из (4) и (5) видны условия, при которых перекрытие минизон отсутствует.

Поверхностная плотность вырожденного электронного газа на трубке равна

$$n = \frac{1}{\pi^2 a} \sum_l k_l,$$

где

$$k_l = \frac{1}{d} \arccos \left( 1 - \frac{\mu_0 - \epsilon_l}{\Delta} \right) \quad (6)$$

— максимальное волновое число электрона в  $l$ -й мини-зоне,  $\mu_0$  — энергия Ферми. Если  $n = 1/\pi a d$ , то нижняя минизона заполнена полностью. В этом случае  $k = \pi/d$ ,  $\mu_0 = \epsilon_0\eta^2 + 2\Delta$ .

### 3. Поляризационный оператор электронного газа на трубке со сверхрешеткой

В теории линейной реакции [33] электронного газа на внешнее поле  $\exp[i(m\varphi + qz - \omega t)]$  дисперсионное уравнение для магнитоплазменных волн, распространяющихся вдоль трубки, в приближении случайных фаз имеет вид [31,32,34]

$$1 - u_m(q) P_m(q, \omega) = 0, \quad (7)$$

где

$$u_m(q) = 4\pi e^2 a I_m(qa) K_m(qa)$$

— цилиндрические гармоники кулоновского потенциала электронов на трубке,  $I_m$  и  $K_m$  — модифицированные функции Бесселя,  $P_m$  — поляризационный оператор электронного газа. Он равен

$$P_m(q, \omega) = \frac{1}{\pi a L} \sum_{lk} \frac{f(\epsilon_{(l+m)(k+q)}) - f(\epsilon_{lk})}{\epsilon_{(l+m)(k+q)} - \epsilon_{lk} - \omega - i0}. \quad (8)$$

Здесь  $f$  — функция Ферми,  $L$  — длина трубки. В знаменателе формулы (8) содержатся частоты вертикальных переходов электронов между уровнями  $\epsilon_l$ :

$$\Omega_{\pm}(l, m) = \begin{pmatrix} \epsilon_{l+m} - \epsilon_l \\ \epsilon_l - \epsilon_{l-m} \end{pmatrix} = \epsilon_0 \left[ 2m(l+\eta) \pm m^2 \right]. \quad (9)$$

С каждым значением целого числа  $m$  связана ветвь спектра плазменных волн. При  $m = 0$  решения уравнения (7) представляют собой спектр внутризонных плазмонов. Значениям  $m \neq 0$  соответствуют межзонные плазмоны.

При нулевой температуре вещественная часть поляризационного оператора (8) в области частот, где затухание Ландау отсутствует, равна

$$\text{Re } P_m(q, \omega) = -\frac{1}{2\pi^2 a d \Delta \sin \frac{qd}{2}} \sum_l \left\{ \frac{1}{\sqrt{b_+^2 - 1}} \left[ \text{arctg} \frac{b_+ \text{tg} \left( k_l + \frac{q}{2} \right) \frac{d}{2} + 1}{\sqrt{b_+^2 - 1}} + \text{arctg} \frac{b_+ \text{tg} \left( k_l - \frac{q}{2} \right) \frac{d}{2} - 1}{\sqrt{b_+^2 - 1}} \right] - (+ \rightarrow -) \right\}, \quad (10)$$

где  $b_{\pm}^2 > 1$ ,  $b_{\pm} = \frac{\Omega_{\pm} - \omega}{2\Delta \sin(qd/2)}$ .

Слагаемые  $(+ \rightarrow -)$  в фигурных скобках получаются из предыдущих заменой  $b_+$  на  $b_-$  и изменением знака  $q$  в аргументе тангенса.

Если в формуле (10) положить  $m = 0$ ,  $\omega = 0$ , а затем  $q = 0$ , то она примет вид

$$\text{Re } P_0(0, 0) = -\frac{\partial n}{\partial \mu_0} = -2\nu,$$

где  $\nu$  — плотность состояний фермиевских электронов на трубке со сверхрешеткой [30]. При  $q = 0$  из (10) получаем

$$\text{Re } P_m(0, \omega) = \frac{1}{\pi^2 a} \sum_l k_l \left( \frac{1}{\Omega_- - \omega} - \frac{1}{\Omega_+ - \omega} \right). \quad (11)$$

Мнимая часть поляризационного оператора вырожденного электронного газа при  $m = 0$  может быть представлена в виде

$$\text{Im } P_0(q, \omega) = \frac{1}{4\pi a d \Delta \left| \sin \frac{qd}{2} \right|} \cdot \begin{bmatrix} \int_{(-k_0 + \frac{q}{2})d}^{(k_0 + \frac{q}{2})d} dx - \int_{(k_0 - \frac{q}{2})d}^{(-k_0 - \frac{q}{2})d} dx \\ \int_{(-k_0 - \frac{q}{2})d}^{(k_0 - \frac{q}{2})d} dx \end{bmatrix} \delta \left( \sin x - \frac{\hbar \omega}{2\Delta \sin \frac{qd}{2}} \right). \quad (12)$$

Из этой формулы видно, что внутризонные плазмоны в вырожденном электронном газе не затухают, если точка  $(q, \omega)$  на плоскости волновое число–частота лежит выше синусоиды

$$\omega = 2\Delta \left| \sin \frac{qd}{2} \right|$$

в первой зоне Бриллюэна  $(-\pi/d) \leq q \leq (\pi/d)$ .

#### 4. Спектр внутризонных плазмонов

В длинноволновом пределе, когда

$$2\Delta \sin \frac{qd}{2} \ll \omega, \quad (13)$$

из формулы (10) получим

$$\text{Re } P_0(q, \omega) = \frac{4\Delta \sin^2 \frac{qd}{2}}{\pi^2 a d \omega^2} \sum_l \sin k_l d, \quad (14)$$

где

$$\sin k_l d = \frac{1}{\Delta} [(\mu_0 - \varepsilon_l)(\varepsilon_l + 2\Delta - \mu_0)]^{1/2}.$$

Если в формуле (14) учесть  $qd \ll 1$ ,  $d \rightarrow 0$ ,  $\Delta \rightarrow \infty$  так, чтобы выполнялось условие (3), она переходит в известное выражение

$$\text{Re } P = \frac{nq^2}{m_* \omega^2}$$

для длинноволновых плазмонов на трубке без сверхрешетки [31,32,34]. В этом пределе щели между мини-зонами исчезают, спектр энергии электронов становится сплошным.

Из уравнения (7) с учетом (14) получаем спектр аксиально-симметричных внутризонных плазмонов:

$$\omega_0^2(q) = \frac{4u_0(q)}{\pi^2 a d} \sin^2 \frac{qd}{2} \sum_l [(\mu_0 - \varepsilon_l)(\varepsilon_l + 2\Delta - \mu_0)]^{1/2}. \quad (15)$$

В актуальном для трубок малого радиуса квантовом пределе, когда  $\eta < 1/2$ , а энергия Ферми находится в нижней мини-зоне  $[\varepsilon_0 \eta^2, \varepsilon_0 \eta^2 + 2\Delta]$ , в сумме по  $l$ , входящей в (15), можно ограничиться слагаемым с  $l = 0$ . Для этого необходимо, чтобы плотность электронов не

превышала  $1/\pi a d$ . Тогда при  $qa \ll 1$  и  $qd \ll 1$  из (15) получаем

$$\omega_0^2(q) = \frac{4e^2 d q^2}{\pi} \ln \frac{2}{q a e^\gamma} \left[ (\mu_0 - \varepsilon_0 \eta^2)(\varepsilon_0 \eta^2 + 2\Delta - \mu_0) \right]^{1/2}, \quad (16)$$

где  $\gamma = 0,577\dots$  — число Эйлера. Из формул (15) и (16) следует, что полностью заполненные мини-зоны не участвуют в колебаниях плотности электронов.

Если  $d \rightarrow 0$ ,  $\Delta \rightarrow \infty$  и выполняется условие (3), формула (16) принимает известный вид для спектра плазмонов на трубке без сверхрешетки в квантовом пределе [31,32,34,35]:

$$\omega_0^2(q) = \frac{4e^2 k_0 q^2}{\pi m_*} \ln \frac{2}{q a e^\gamma}.$$

Здесь

$$k_0 = \left[ 2m_* (\mu_0 - \varepsilon_0 \eta^2) \right]^{1/2}.$$

По-прежнему считаем условие (13) выполненным, однако предположим, что ниже уровня Ферми расположено много уровней  $\varepsilon_l$ , т.е.  $\mu_0 \gg \varepsilon_0$ . Тогда входящая в (15) сумма по  $l$  может быть вычислена при помощи формулы Пуассона. В результате спектр плазмонов содержит монотонные и осциллирующие с изменением параметров трубки и магнитного потока  $\phi$  слагаемые. Они зависят от параметра  $\mu_0/2\Delta$ .

Если  $\mu_0 < 2\Delta$ , из формулы (15) получаем точное выражение для монотонной части спектра плазмонов:

$$\omega_{\text{mon}}^2(q) = u_0(q) \frac{8\sqrt{m_*} \Delta^{3/2}}{\pi^2 d} \sin^2 \frac{qd}{2} \times \left[ \frac{2\Delta - \mu_0}{\Delta} K \left( \sqrt{\frac{\mu_0}{2\Delta}} \right) - 2 \frac{\Delta - \mu_0}{\Delta} E \left( \sqrt{\frac{\mu_0}{2\Delta}} \right) \right], \quad (17)$$

где  $K$  и  $E$  — эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода соответственно [36]. В рассматриваемом случае  $a \rightarrow \infty$ , функция  $u_0(q)$  равна  $2\pi e^2/q$ , выражение (17) не зависит от радиуса трубки. Оно относится к двумерному электронному газу в отсутствие магнитного поля.

Он получается разрезанием трубки по образующей и разворачиванием ее на плоскость. Если  $\mu_0 \ll 2\Delta$ ,  $qd \ll 1$ ,  $d \rightarrow 0$ ,  $\Delta \rightarrow \infty$ , то из формулы (17) получаем спектр плазмонов в двумерном электронном газе в отсутствие сверхрешетки и магнитного поля [37]:

$$\omega(q) = (2e^2\mu_0q)^{1/2}.$$

Осциллирующая часть спектра плазмонов в случае  $\mu_0 < 2\Delta$  равна

$$\omega_{\text{osc}}^2(q) = u_0(q) \frac{4\sqrt{2\Delta}(\mu_0\epsilon_0)^{1/4}}{\pi^2 ad} \sin^2 \frac{qd}{2} \times \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^{3/2}} \cos 2\pi r \eta \sin \left( 2\pi r \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} - \frac{\pi}{4} \right). \quad (18)$$

Это выражение описывает осцилляции, похожие на осцилляции де Гааза–ван Альфена [27], и осцилляции Ааронова–Бома [25,26,38]. Осцилляции типа де Гааза–ван Альфена сохраняются и в отсутствие магнитного поля. В случае  $\mu_0 < 2\Delta$  причиной этих осцилляций является прохождение корневых особенностей плотности состояний в точках  $\epsilon_l$  через уровень Ферми с изменением параметров нанотрубки: ее радиуса или плотности электронов. Частота этих осцилляций может быть получена из условия  $\mu_0 = \epsilon_0 l^2$ . С изменением радиуса трубки она равна фермиевскому волновому числу  $k_F$ . Если рассматривать зависимость (18) от корня из плотности электронов, эта частота равна  $\sqrt{2\pi a}$ .

При  $\mu_0 \gg \epsilon_0$ ,  $\mu_0 - 2\Delta \gg \epsilon_0$ ,  $\mu_0 > 2\Delta$  монотонная и осциллирующая части спектра магнитоплазмонов равны

$$\omega_{\text{mon}}^2(q) = u_0(q) \frac{8\sqrt{2m_*\mu_0\Delta}}{\pi^2 d} \times \sin^2 \frac{qd}{2} \left[ \frac{\mu_0 - \Delta}{\Delta} E \left( \sqrt{\frac{2\Delta}{\mu_0}} \right) - \frac{\mu_0 - 2\Delta}{\Delta} K \left( \sqrt{\frac{2\Delta}{\mu_0}} \right) \right], \quad (19)$$

$$\omega_{\text{osc}}^2(q) = u_0(q) \frac{4\sqrt{2\Delta}(\mu_0\epsilon_0)^{1/4}}{\pi^2 ad} \sin^2 \frac{qd}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^{3/2}} \cos 2\pi r \eta \times \left[ \sin \left( 2\pi r \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} - \frac{\pi}{4} \right) - \left( 1 - \frac{2\Delta}{\mu_0} \right)^{1/4} \sin \left( 2\pi r \sqrt{\frac{\mu_0 - 2\Delta}{\epsilon_0}} + \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (20)$$

При вычислении (18) и (20) использованы асимптотики интегралов Фурье в том случае, когда подынтегральная функция имеет особенности на нижнем пределе (в случае (18)) или на верхнем и нижнем (в случае (20)) [39]. Второй период осцилляций типа де Гааза–ван Альфена в (20) присутствует потому, что при  $\mu_0 > 2\Delta$  с изменением параметров трубки уровень Ферми пересекает не только нижние границы минизон, но и верхние  $\epsilon_l + 2\Delta$ . Ситуация аналогична существованию

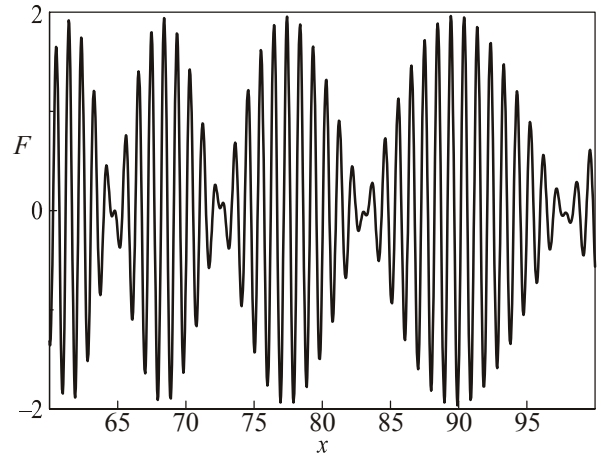


Рис. 2. Зависимость основной гармоники осциллирующей части спектра плазмонов (20) от  $x = (2\pi n)^{1/2}a$  при  $\eta = 0$  и  $2\Delta/\epsilon_0 = 10^3$ .

минимального и максимального сечений поверхности Ферми типа гофрированный цилиндр в эффекте де Гааза–ван Альфена [27]. Вторая частота осцилляций в (20) может быть найдена из условия  $\epsilon_l + 2\Delta = \mu_0$ . Существование двух близких частот осцилляций при  $\mu_0 \gg 2\Delta$  означает, что на графике зависимости (20) от параметров трубки должны наблюдаться биения. Если считать (20) функцией радиуса трубки, то на частоту осцилляций  $k_F$  накладывается частота биений  $k_F\Delta/\mu_0$ . Относительное различие амплитуд двух слагаемых в (20) равно  $\Delta/2\mu_0$ . С ростом этого параметра биения сменяются слабыми модуляциями. При  $\mu_0 < 2\Delta$  биения спектра магнитоплазмонов отсутствуют. На рис. 2 показана зависимость основной гармоники осциллирующей части спектра плазмонов (20)

$$F = \omega_{\text{osc}}^2(q) \pi^2 ad \left[ 4\sqrt{2\Delta}(\mu_0\epsilon_0)^{1/4} \sin^2 \frac{qd}{2} u_0(q) \right]^{-1}$$

от  $x = (2\pi n)^{1/2}a$  при  $2\Delta/\epsilon_0 = 10^3$  в отсутствие магнитного поля.

## 5. Спектр межзонных плазмонов

При  $m \neq 0$  вместо условия (13), позволяющего ограничиться длинноволновым пределом, имеем условие

$$2\Delta \sin \frac{qd}{2} \ll |\omega - \Omega_{\pm}|. \quad (21)$$

В этом случае основной вклад в вещественную часть поляризационного оператора равен (11). Следовательно, в квантовом пределе уравнение (7) имеет два корня. Один из них расположен ниже  $\Omega_-$ , а другой — выше  $\Omega_+$ . В частности, в случае  $\eta < 1/2$ ,  $l = 0$  из (9) получаем  $\Omega_- < 0$ ,  $\Omega_+ > 0$ . Спектр межзонных длинноволновых плазмонов вблизи частоты  $\Omega_+$  имеет вид

$$\omega_m(q) = 2m\varepsilon_0\eta + \left[ \left( \varepsilon_0 m^2 + \frac{u_m(q)k_0}{\pi^2 a} \right)^2 - \left( \frac{u_m(q)k_0}{\pi^2 a} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (22)$$

Предельные частоты волн со спектром (22) равны

$$\omega_m(0) = 2m\varepsilon_0\eta + \left( \varepsilon_0^2 m^4 + \frac{4e^2\varepsilon_0 k_0 |m|}{\pi} \right)^{1/2}. \quad (23)$$

В формулах (22) и (23) параметры сверхрешетки  $d$  и  $\Delta$  содержатся только в  $k_0$  (6).

Добавляя к неравенству (21) условие  $qa \ll 1$ , из (22) получаем

$$\omega_{\pm 1}(q) = \omega_{\pm}(0) + \frac{e^2\varepsilon_0 k_0}{\pi} (qa)^2 \ln \frac{qa}{2} \left( \varepsilon_0^2 + \frac{4e^2\varepsilon_0 k_0}{\pi} \right)^{-1/2}, \quad (24)$$

$$\omega_m(q) = \omega_m(0) - \frac{e^2 k_0 (qa)^2}{2\pi |m| (|m|-1)} \left( 1 + \frac{4e^2 k_0}{\pi \varepsilon_0 |m|^3} \right)^{-1/2}, \quad (25)$$

$$m = \pm 2, \pm 3, \dots$$

Дисперсия волн со спектром (24), (25) аномальная.

В случае слабого кулоновского взаимодействия электронов, когда  $e^2 k_0 / \varepsilon_0 \ll 1$ , формулы (22)–(25) упрощаются:

$$\omega_{\pm 1}(q) = \varepsilon_0 (1 \pm 2\eta) + \frac{2e^2 k_0}{\pi} + \frac{e^2 k_0}{\pi} (qa)^2 \ln \frac{qa}{2}, \quad (26)$$

$$\omega_m(q) = 2m\varepsilon_0\eta + \varepsilon_0 m^2 + \frac{2e^2 k_0}{\pi |m|} - \frac{e^2 k_0 (qa)^2}{2\pi (m^2 - |m|)},$$

$$m = \pm 2, \pm 3, \dots$$

Из этих формул следует, что предельные частоты магнитоплазменных волн отличаются от резонансных частот (9) сдвигом

$$\delta\omega_m = \frac{2e^2 k_0}{\pi |m|}.$$

Измеряя  $\delta\omega_m$  в оптических экспериментах, можно получить максимальный импульс электронов  $k_0$  в нижней минизоне.

## 6. Заключение

Наряду с плоскими сверхрешетками все чаще используются полупроводниковые сверхрешетки с цилиндрической симметрией. Они могут быть радиальными и продольными. В таких системах с искусственной периодичностью вдоль оси цилиндра создается возможность управлять энергетическим спектром электронов проводимости. Радиальные сверхрешетки создаются на основе гетеропереходов  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}/\text{GaAs}$ ,  $\text{InAs}/\text{GaAs}$ ,  $\text{InGaAs}/\text{GaAs}$ ,  $\text{GeSi}/\text{Si}$

и др. [2,23,40]. Современная техника физического эксперимента позволяет в качестве барьеров или ям создавать на поверхности нанотрубки соосные кольца из другого материала [22,23].

В настоящей статье приведены результаты вычислений спектра магнитоплазменных волн в вырожденном электронном газе на поверхности полупроводниковой нанотрубки с продольной сверхрешеткой в продольном магнитном поле. Рассмотрены внутризонные и межзонные плазмоны в квантовом и квазиклассическом случаях. Показано, что с изменением параметров нанотрубки и магнитного потока через ее сечение частоты волн испытывают осцилляции, похожие на осцилляции де Гааза–ван Альфена, и осцилляции Ааронова–Бома. Характер осцилляций типа де Гааза–ван Альфена определяется отношением энергии Ферми к ширине минизоны. При большом значении этого отношения на графике зависимости частоты плазмонов от радиуса трубки или плотности электронов существуют биения. При малом значении этого отношения биения отсутствуют. Эти особенности спектра плазмонов могут быть обнаружены в опытах с рассеянием света или электронов нанотрубками со сверхрешеткой в магнитном поле.

Авторы выражают благодарность И.В. Криве за полезные замечания.

1. Л.В. Келдыш, *ФТТ* **4**, 2265 (1962).
2. L. Esaki and R. Tsu, *IBM J. Develop.* **14**, 61 (1970).
3. *Молекулярно-лучевая эпитаксия и гетероструктуры* (сб. статей), перевод с англ., Мир, Москва (1989).
4. В.М. Гвоздилов, *ФТТ* **26**, 2574 (1984); *ФТТ* **28**, 320 (1986).
5. А.П. Силин, *УФН* **147**, 485 (1985).
6. В.Н. Луцкий, М.И. Каганов, А.Я. Шик, *ЖЭТФ* **92**, 721 (1987).
7. F.G. Bass and A.P. Tetervov, *Phys. Rep.* **140**, 237 (1985).
8. Ф.Г. Басс, А.А. Булгаков, А.П. Тетервов, *Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешетками*, Наука, Москва (1989).
9. М. Херман, *Полупроводниковые сверхрешетки*, Мир, Москва (1989).
10. V.M. Gvozdkov and M. Taut, *New J. Phys.* **11**, 063005 (2009).
11. M. Apostol, *Z. Phys.* **B22**, 13 (1975).
12. Das Sarma and J.J. Quinn, *Phys. Rev.* **B25**, 7603 (1982).
13. W.L. Bloss, *Solid State Commun.* **44**, 366 (1982).
14. A.C. Tselis and J.J. Quinn, *Phys. Rev.* **B29**, 2021 (1984); *Phys. Rev.* **B29**, 3318 (1984).
15. Wei-ming Que and G. Kirczenow, *Phys. Rev.* **B36**, 6596 (1987).
16. H. Ehrenreich and M.H. Cohen, *Phys. Rev.* **115**, 786 (1959).
17. В.М. Гвоздилов, *ФНТ* **16**, 1156 (1990) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **16**, 668 (1990)].

18. V.M. Gvozdkov, A.M. Ermolaev, and R. Vega-Monroy, *Fiz. Nizk. Temp.* **25**, 718 (1999) [*Low Temp. Phys.* **25**, 535 (1999)].
19. V.M. Gvozdkov, A.M. Ermolaev, I.D. Vagner, and R. Vega-Monroy, *Physica* **B284–288**, 1734 (2000).
20. K. Sabeeh and M. Tahir, *Phys. Rev.* **B71**, 035325 (2005).
21. M. Tahir, K. Sabeeh, and A. Mac Kinnon, *arXiv: 0808.0394V3*.
22. V.Ya. Prinz, V.A. Seleznev, V.A. Samoylov, and A.K. Gutakovsky, *Microelectr. Eng.* **30**, 439 (1996).
23. В.П. Драгунов, И.Г. Неизвестный, В.А. Гридчин, *Основы нанозлектроники*, Логос, Москва (2006).
24. О.П. Волосникова, Д.В. Завьялов, С.В. Крючков, *Труды XVII международного совещания «Радиационная физика твердого тела»*, Севастополь (2007), с. 645.
25. И.О. Кулик, *Письма в ЖЭТФ* **11**, 407 (1970).
26. I.O. Kulik, *Fiz. Nizk. Temp.* **36**, 1057 (2010) [*Low Temp. Phys.* **36**, 841 (2010)].
27. И.М. Лифшиц, М.Я. Азбель, М.И. Каганов, *Электронная теория металлов*, Наука, Москва (1971).
28. И.М. Лифшиц, В.Г. Песчанский, *ЖЭТФ* **35**, 1251 (1958); *ЖЭТФ* **38**, 188 (1960).
29. О. Галбова, О.В. Кириченко, В.Г. Песчанский, *ФНТ* **35**, 1034 (2009) [*Low Temp. Phys.* **35**, 810 (2009)].
30. А.М. Ермолаев, Г.И. Рашба, М.А. Соляник, *ФНТ* **37**, 1033 (2011) [*Low Temp. Phys.* **37**, 824 (2011)].
31. А.И. Ведерников, А.О. Говоров, А.В. Чаплик, *ЖЭТФ* **120**, 979 (2001).
32. Р.З. Витлина, Л.И. Магарилл, А.В. Чаплик, *ЖЭТФ* **133**, 906 (2008).
33. A.L. Fetter, J.D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, Mac Graw-Hill, New York (1971).
34. А.М. Ермолаев, Г.И. Рашба, М.А. Соляник, *Вісник ХНУ*, №865, сер. «Фізика», вип. 12, 21 (2009); А.М. Ермолаев, Г.И. Рашба, М.А. Соляник, *ФНТ* **37**, 1156 (2011) [*Low Temp. Phys.* **37**, 919 (2011)].
35. O. Sato, Y. Tanaka, M. Kobayashi, and A. Hasegawa, *Phys. Rev.* **B48**, 1947 (1993).
36. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, Москва (1971).
37. Т. Андо, А. Фаулер, Ф. Стерн, *Электронные свойства двумерных систем*, Мир, Москва (1985).
38. А.А. Звягин, И.В. Криве, *ФНТ* **21**, 687 (1995) [*Low Temp. Phys.* **21**, 533 (1995)].
39. А. Эрдейи, *Асимптотические разложения*, ГИФМЛ, Москва (1962).
40. Ж.И. Алферов, Ю.В. Жиляев, Ю.В. Шмарцев, *ФТП* **5**, 196 (1971).

Magnetoplasma waves on the surface of semiconducting nanotube with a superlattice

A.M. Ermolaev, G.I. Rashba, and M.A. Solyanik

The spectra of plasma waves in the electron gas on the surface of semiconducting nanotube with a superlattice are considered. The external magnetic field is directed along the axis of the nanotube and the superlattice. The analysis of the intraband and interband magnetoplasma waves in the degenerate electron gas is presented in quantum and quasiclassical limits. If a number of angular motion levels are filled up then the magnetoplasmon frequencies oscillate with variation of nanotube parameters similarly to the de Haas–van Alphen oscillations. The frequencies demonstrate also the Aharonov–Bohm oscillations on magnetic flux through the nanotube cross-section. The oscillation pattern is determined by the ratio of the Fermi energy to minizone width. If this ratio is sufficiently large the beats appear in the plot of magnetoplasmon frequency as a function of tube parameters.

PACS: 73.63.Fg Nanotubes;  
73.21.Cd Superlattices;  
**71.45.–d** Collective effects;  
73.20.Mf Collective excitations (including plasmons and other charge-density excitations).

Keywords: nanotube, superlattice, magnetoplasmons, spectrum, beats.