Физика низких температур, 2009, т. 35, № 6, с. 555–559

О возможности энтропийного ветра в сверхтекучем гелии

Н.И. Пушкина

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Научно- исследовательский вычислительный центр Воробьевы Горы, г. Москва, 119992, Россия
E-mail: N.Pushkina@mererand.com

Статья поступила в редакцию 16 января 2009 г., после переработки 4 февраля 2009 г.

Рассмотрена возможность появления квазистационарного течения нормальной компоненты сверхтекучего гелия при распространении в нем достаточно интенсивных волн первого и второго звуков. Получены уравнения, описывающие течения, проанализирован вклад в возникновение течений от диссипации энергии на фронте ударной волны и от вязкости среды для случая волн второго звука. Оценена возможность экспериментального наблюдения явления.

Розглянуто можливість появи квазістаціонарної течії нормальної компоненти надплинного гелію при розповсюдженні в ньому досить інтенсивних хвиль першого й другого звуків. Отримано рівняння, що описують течії, проаналізовано внесок у виникнення течій від диссипації енергії на фронті ударної хвилі й від в’язкості середовища для випадку хвиль другого звуку. Оцінено можливість експериментального спостереження явища.

PACS: **47.37.+q** Гидродинамические аспекты сверхтекучести, квантовые жидкости.

Ключевые слова: сверхтекучий гелий, гидродинамика, первый, второй звуки, ударные волны, энтропийный ветер.

Введение

Исследование динамики жидкостей и газов показывает, что при распространении в этих средах достаточно интенсивных звуковых волн возможно возникновение квазистационарных движений, называемых в нелинейной акустике акустическими течениями или звуковым ветром. В классической гидродинамике исследовались различные типы таких течений (см., например, [1,2]). Распространяющаяся звуковая волна может создать поле сил, вызывающих акустическое течение. При этом существенную роль в возникновении стационарных движений играют нелинейность среды, а также поглощение акустической волны, за счет которого энергия волны передается течению.

В квантовых жидкостях рассматривался целый ряд нелинейных волновых явлений, свойственных также и нелинейной акустике классических сред (см. обзор Немировского [3]). Однако стационарные течения, обусловленные распространением интенсивных звуковых волн, в сверхтекучем гелии до настоящего времени не исследовались. Принципиальное отличие от классической нелинейной акустики здесь состоит уже в том, что возникающими течениями увлекается не вся жидкость, а только нормальная компонента сверхтекучего гелия. В этом смысле можно говорить о возможности появления «энтропийного ветра». Кроме того, нужно учесть, что поглощение первого и второго звуков в гелии достаточно мало, что делает возможным образование крутого ударного фронта. В этом случае существенную роль в появлении течения будет играть не столько вязкость среды, сколько особый характер диссипации энергии на разрыве. В данной работе рассматривается возможность появления «энтропийного ветра» в сверхтекучем ^{4}He, т.е. квазистационарного течения нормальной компоненты при распространении в гелии интенсивных волн первого и второго звуков.

Теория процесса

Для изучения квазистационарных течений в поле сил распространяющейся волны естественно усреднить полное движение по промежутку времени, большему периода волны, но меньшему характерных временных масштабов течения. Таким образом можно выявить движения, относящиеся к течению, и найти те силы, которые вызывают это течение. Для описания медленных (по сравнению со скоростью звука) течений применимо приближение несжимаемой жидкости ($\rho_0 = \mathrm{const}$) (здесь и ниже индексом «0» обозначим величины, относящиеся к течению), причем не только по отношению к жидкости в целом, но и отдельно по отношению к нормальной ($\rho_{n0} = \mathrm{const}$) и сверхтекучей ($\rho_{s0} = \mathrm{const}$) компонентам; учитывая, далее, порядок малости диссипативных членов в уравнении для энтропии, можно также считать $\sigma_0 = \mathrm{const}$ [4] (σ — энтропия единицы массы жидкости). Поскольку $\rho_0, \rho_{n_0}, \rho_{s_0}, \sigma_0$ — константы, то из уравнений двухскоростной гидродинамики имеем $\operatorname{div} \mathbf{U}_n = \operatorname{div} \mathbf{U}_\mathbf{s} = 0$, где $\mathbf{U}_n$, $\mathbf{U}_\mathbf{s}$ — скорости нормальной и сверхтекучей компонент в стационарном течении.

Для нахождения силы, вызывающей течение при распространении волн первого и второго звуков в сверхтекучем ^{4}He, исходим из уравнения для импульса жидкости $\mathbf{j}$ с учетом диссипативных слагаемых:

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial r_k} = \frac{\partial}{\partial r_k}\left\{\eta\left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial r_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial r_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_{nl}}{\partial r_l}\right) + \right.$$
$$\left. + \delta_{ik}\xi_1 \operatorname{div}(\mathbf{j} - \rho\mathbf{v}_n) + \delta_{ik}\xi_2 \operatorname{div}\mathbf{v}_n\right\}, \tag{1}$$

где Π_{ik} — тензор плотности потока импульса, η — коэффициент первой вязкости, ξ_1, ξ_2 — коэффициенты второй вязкости.

В это уравнение подставим плотности, давление и скорости в виде:

$$\rho = \rho_0 + \rho_a,\ \rho_n = \rho_{n0} + \rho_{na},\ \rho_s = \rho_{s0} + \rho_{sa},\ p = p_0 + p_a,$$
$$\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_{n0} + \mathbf{v}_{na},\ \mathbf{v}_s = \mathbf{v}_{s0} + \mathbf{v}_{sa}, \tag{2}$$

где значения величин с индексом «a», усредненные по времени, большему периода первого звука или температурной волны, равны нулю и относятся к волнам, а величины с индексом «0», как отмечалось выше, характеризуют течение. Если подставить выражения (2) в уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0 \tag{3}$$

и произвести усреднение по времени с учетом нелинейных слагаемых, то получим следующее:

$$\rho_{n0}\operatorname{div}\left(\mathbf{v}_{n0} + \frac{\overline{\rho_{na}\mathbf{v}_{na}}}{\rho_{n0}}\right) + \rho_{s0}\operatorname{div}\left(\mathbf{v}_{s0} + \frac{\overline{\rho_{sa}\mathbf{v}_{sa}}}{\rho_{s0}}\right) = 0\,. \tag{4}$$

Отсюда можно сделать вывод, что скорости течения $\mathbf{U}_n$ и $\mathbf{U}_s$ вследствие учета нелинейности на самом деле равны не $\mathbf{v}_{n0}$ и $\mathbf{v}_{s0}$, а выражениям

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{v}_{n0} + \frac{\overline{\rho_{na}\mathbf{v}_{na}}}{\rho_{n0}}, \quad \mathbf{U}_s = \mathbf{v}_{s0} + \frac{\overline{\rho_{sa}\mathbf{v}_{sa}}}{\rho_{s0}}. \tag{5}$$

С учетом соотношений (2), (5) уравнение (1) после усреднения по времени принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}_n}{\partial t} + (\mathbf{U}_n\nabla)\mathbf{U}_n - \frac{\eta}{\rho_{n0}}\Delta\mathbf{U}_n +$$
$$+ \frac{1}{\rho_{n0}}\nabla\left(\rho_{s0}\frac{U_s^2}{2} + \rho_{s0}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + p_{s0}\right) = -\frac{1}{\rho_{n0}}\nabla p_{n0} + \mathbf{F}_{1,2}\,, \tag{6}$$

где $\mathbf{F}_{1,2}$ относятся соответственно к случаям первого и второго звуков:

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{\rho_0}{\rho_{n0}}\left[\overline{(\mathbf{v}_{na}\nabla)\mathbf{v}_{na}} + \overline{\mathbf{v}_{na}\operatorname{div}\mathbf{v}_{na}}\right] - \frac{\eta}{\rho_{n0}^2}\Delta\left(\overline{\rho_{na}\mathbf{v}_{na}}\right) -$$
$$- \frac{1}{\rho_{n0}^2}\left(\frac{\eta}{3} + \xi_2 - \rho_0\xi_1\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\overline{\rho_{na}\mathbf{v}_{na}}\right) -$$
$$- \frac{1}{\rho_{n0}}\xi_1 \operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\overline{\rho_a\mathbf{v}_{na}}\right); \tag{7}$$

$$\mathbf{F}_2 = -\frac{\rho_0}{\rho_{s0}}\left[\overline{(\mathbf{v}_{na}\nabla)\mathbf{v}_{na}} + \overline{\mathbf{v}_{na}\operatorname{div}\mathbf{v}_{na}}\right] - \frac{\eta}{\rho_{n0}^2}\Delta\left(\overline{\rho_{na}\mathbf{v}_{na}}\right) -$$
$$- \frac{1}{\rho_{n0}^2}\left(\frac{\eta}{3} + \xi_2 - \rho_0\xi_1\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\overline{\rho_{na}\mathbf{v}_{na}}\right). \tag{8}$$

Соотношения (6)–(8) выведены в нулевом приближении по коэффициенту теплового расширения, который аномально мал в сверхтекучем гелии [4,5]. В этом случае первый звук есть колебания только давления (плотности), а второй — только температуры (энтропии).

В уравнении (6) введены две вспомогательные величины: так сказать, давления нормальной и сверхтекучей компонент p_{n0} и p_{s0} (см. [4]) в соответствии с равенством $p_0 = p_\infty + p_{n0} + p_{s0}$, где p_∞ — давление на бесконечности, а p_{s0} определяется формулой, справедливой для идеальной несжимаемой жидкости:

$$p_{s0} = -\rho_s\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\rho_s U_s^2}{2}, \tag{9}$$

где φ — потенциал сверхтекучего движения $\mathbf{U}_\mathbf{s} = \nabla\varphi$.

Равенство (9) приводит к тому, что скорость $\mathbf{U}_s$ течения сверхтекучей компоненты выпадает из уравнений (6), которые в результате приобретают более простой вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}_n}{\partial t} + (\mathbf{U}_n\nabla)\mathbf{U}_n - \frac{\eta}{\rho_{n0}}\Delta\mathbf{U}_n = -\frac{1}{\rho_{n0}}\nabla p_{n0} + \mathbf{F}_{1,2}. \tag{10}$$

В дальнейшем индекс «0» будем опускать. Выражения $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ можно интерпретировать как нелинейные силы, действующие на единицу массы нормальной компоненты гелия и вызывающие квазистационарное течение. Эти силы создаются распространяющимися затухающими волнами первого и второго звуков. Затухание волн обусловлено, в принципе, либо вязкостью среды, либо, если вязкость мала, также диссипацией энергии на разрыве ударной волны.

Рассмотрим для простоты случай, когда течение вызвано плоскими волнами, распространяющимися вдоль оси x. При этом силы F_1 и F_2, записанные в терминах нормальной скорости v_{na} (x-компонента скорости в волне), приобретают вид:

$$F_1 = -\frac{\rho}{\rho_n}\frac{\partial \overline{v_{na}^2}}{\partial x} - \frac{\rho}{\rho_n} c_1 \times \left[\frac{1}{\rho_n}\frac{\partial\rho_n}{\partial p}\left(\frac{4}{3}\eta+\xi_2\right) - \left(\frac{\rho}{\rho_n}\frac{\partial\rho_n}{\partial p}+\frac{1}{c_1^2}\right)\xi_1\right]\frac{\overline{\partial^2 v_{na}^2}}{\partial x^2}; \tag{11}$$

$$F_2 = -\frac{\rho}{\rho_s}\frac{\overline{\partial v_{na}^2}}{\partial x} - \frac{c_2}{\sigma\rho_s}\frac{1}{\rho_n}\frac{\partial\rho_n}{\partial T}\left(\frac{4}{3}\eta+\xi_2-\rho\xi_1\right)\frac{\overline{\partial^2 v_{na}^2}}{\partial x^2}. \tag{12}$$

В этих соотношениях c_1 и c_2 — скорости соответственно первого и второго звуков. Сила F_1 несколько отличается от случая классической среды, в частности, наличием еще одного коэффициента второй вязкости, который в гелии принято обозначать ξ_1.

Рассмотрим более подробно случай второго звука, т.е. возникновение стационарного течения нормальной компоненты под влиянием распространяющейся температурной волны.

При наличии диссипации и нелинейности вòлны второго звука в гелии описываются уравнением Бюргерса, имеющим в данном случае вид [3]:

$$\frac{\partial v_{na}}{\partial t} + (c_2 + \alpha_2(T) v_{na})\frac{\partial v_{na}}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 v_{na}}{\partial x^2}, \tag{13}$$

где $\alpha_2(T) = \frac{\sigma T}{c}\frac{\partial}{\partial T}\ln\left(c_2^3\frac{\partial\sigma}{\partial T}\right)$, c — теплоемкость единицы массы, $\mu = \frac{\rho_s}{2\rho\rho_n}\left(\frac{4}{3}\eta+\xi_2-2\rho\xi_1+\rho^2\xi_3+\frac{\rho_n}{\rho_s}\frac{\kappa}{c}\right)$, κ — коэффициент теплопроводности.

В уравнении (13) удобно перейти к сопровождающей системе координат $\tau = t - x / c_2, x = x$. Тогда уравнение (13) приобретает вид

$$\frac{\partial v_{na}}{\partial x} - \frac{\alpha_2(T)}{c_2^2} v_{na}\frac{\partial v_{na}}{\partial \tau} = \frac{\mu}{c_2^2}\frac{\partial^2 v_{na}}{\partial \tau^2}. \tag{14}$$

Решая уравнение (14), можно найти явный вид силы F_2.

Относительную роль нелинейности и диссипации в искажении волны, описываемом уравнением Бюргерса, можно охарактеризовать величиной, аналогичной числу Рейнольдса в гидродинамике. В теории нелинейных волн классических сред это число имеет вид [2] $\mathrm{Re} = V\lambda\rho / 2\pi b$, где V — амплитуда скорости смещения, λ — длина волны, а величина b определяется коэффициентами вязкости и теплопроводности: $b = (4/3)\eta + \xi + \kappa(c_v^{-1} + c_p^{-1})$, $c_{v,p}$ — теплоемкости. Выражение для подобного числа Re для сверхтекучего гелия получим из следующих соображений. Если сравнить вид уравнения Бюргерса для классических сред с аналогичным уравнением в сверхтекучем гелии, то можно видеть, что в нашем случае величина b/ρ классических сред переходит по порядку величины в выражение $2\mu\rho_n/\rho_s$. Таким образом, можно определить величину Re как

$$\mathrm{Re} \approx \frac{V_n\lambda\rho_s}{2\pi 2\mu\rho_n}. \tag{15}$$

Здесь V_n — амплитуда нормальной скорости в температурной волне, μ характеризует диссипацию, а величина амплитуды V_n — нелинейность.

Оценим для некоторых параметров величину Re, так как от нее зависит вид решения уравнения (14). Пусть $T \approx 1{,}5$ К, $\omega \approx 2\pi\cdot 10^5$ с$^{-1}$, $V_n \approx 10$ см/с (что соответствует интенсивности второго звука порядка 10^{-4} Вт/см^2); величину μ оценим по значению амплитудного коэффициента поглощения $\alpha \approx 10^{-1}$см$^{-1}$ [6]: учитывая, что скорость второго звука $c_2 \approx 2\cdot 10^3$ см/с, при приведенных выше значениях частоты и коэффициента поглощения α для величины μ получаем значение порядка $2\cdot 10^{-3}$ см^2/с. В результате имеем $\mathrm{Re} \approx 10^2$. Анализ уравнения Бюргерса показывает [2], что при Re >> 1 ударный фронт формируется на расстоянии

$$x \ge \frac{\pi}{2}\frac{c_2^2}{\alpha_2\omega V_n}. \tag{16}$$

На меньших расстояниях квадрат скорости v_{na}^2, усредненный по времени, не зависит от координаты и, следовательно, сила $F_2 = 0$.

Решение уравнения (14) для гармонического сигнала для расстояний, где уже образуется крутой ударный фронт, имеет вид (см. [2]):

$$v_{na} = \frac{V_n}{1+\varepsilon}\left[-\omega\tau + \pi\,\mathrm{th}\left(\frac{\omega\tau}{\delta}\right)\right], \quad -\pi \le \omega\tau \le \pi, \tag{17}$$

Здесь

$$\varepsilon = \frac{\alpha_2}{c_2^2}\omega V_n x, \quad \delta = \frac{1+\varepsilon}{\pi\alpha_2 \mathrm{Re}}. \tag{18}$$

Величина δ по порядку величины есть ширина фронта ударной волны, отнесенная к длине волны. Оценим численно эту величину. Выше было отмечено, что решение справедливо для x, удовлетворяющего соотношению (16), т.е. для $\varepsilon \geq \pi/2$. Для $\varepsilon \approx \pi/2$ и приведенных выше параметров (при $T \approx 1{,}5$ К величина $\alpha_2 \approx 1$) значение $\delta \approx 10^{-2} << 1$. При бо́льших значениях δ ударная волна имеет более сглаженный фронт. Вычислим усредненное по времени значение $\overline{v_{na}^2}$ (см. (17)), производные по координате от которого дают силу F_2, для значений δ в диапазоне от $\delta << 1$ до $\delta \sim 1$.

$$\overline{v_{na}^2} = \frac{V_n^2}{(1+\varepsilon)^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [-\omega\tau + \pi\ \mathrm{th}\,(\omega\tau/\delta)]^2 d(\omega\tau)\,. \quad (19)$$

Для значений $\delta << 1$ в интеграле (19) можно ограничиться первым членом, содержащим δ в нулевой степени (см. также [2]):

$$\overline{v_{na}^2} = \frac{V_n^2}{(1+\varepsilon)^2} \frac{\pi^2}{3}\,. \quad (20)$$

Для бо́льших значений δ вычислим интеграл (19) с точностью до членов, содержащих более высокие степени δ. Вычисления дают следующий суммарный результат:

$$\overline{v_{na}^2} = \frac{V_n^2}{(1+\varepsilon)^2} \left[\frac{\pi^2}{3} - \delta\pi + \frac{\delta^2\pi^2}{24} - \delta^2 e^{-2\pi/\delta} + O(e^{-4\pi/\delta}) \right]. \quad (21)$$

Из выражения (21) видно, что при усреднении по времени квадрата скорости можно с очень хорошей точностью ограничиться членами порядка δ^2, т.е. первыми тремя членами. Но если учесть, что сила F_2 есть производная от $\overline{v_{na}^2}$ по координате, то легко видеть, что останутся только первые два слагаемых, поскольку величина $(1+\varepsilon)^2$, содержащая координату и входящая в выражение для δ^2 (см. (18)), сокращается с этой же величиной из коэффициента перед квадратной скобкой. Численные оценки показывают, что вклад второго слагаемого в силу F_2 (8), содержащего вязкости, существенно меньше вклада от первого слагаемого, и, следовательно, эта сила обусловлена, главным образом, диссипативными процессами на фронте ударной волны. В результате получаем, что сила F_2, вызывающая квазистационарное течение нормальной компоненты сверхтекучего гелия при распространении в нем интенсивной температурной волны, с большой точностью определяется простым выражением:

$$F_2 \approx \frac{\rho_s}{\rho} \frac{\omega V_n^3}{c_2^2(1+\varepsilon)^2} \left(\frac{2}{3} \frac{\pi^2\alpha_2}{1+\varepsilon} - \frac{1}{\mathrm{Re}} \right). \quad (22)$$

Это есть сила, действующая на единицу массы нормальной компоненты. Оценим возможность экспериментального наблюдения рассмотренного процесса. Пусть, как и выше, интенсивность второго звука порядка 10^{-4} Вт/см^2(амплитуда $V_n \approx 10$ см/с), $\omega \approx 2\pi \cdot 10^5$ с$^{-1}$, $T \approx 1{,}5$ К (при этой температуре $\alpha_2 \approx 1$, $\rho_s \approx \rho$), длина взаимодействия $x \approx 1$ см ($\varepsilon \approx \pi/2$). При этих параметрах сила $F_2 \approx 50$ дн/г. Оценим численно, какая скорость течения нормальной компоненты могла бы развиться под действием такой силы. Вернемся к уравнению (10). Для оценки по порядку величины можно считать, что $\partial U_n/\partial t \approx F_2$. Отсюда получим, что скорость течения возрастет от нуля до значения $U_n \approx F_2 \Delta t$, где Δt — длительность импульса температурной волны. При Δt, например, порядка 10^{-2}с скорость U_n может быть порядка $5 \cdot 10^{-1}$ см/с. Таким образом, численные оценки дают разумную величину с точки зрения возможности экспериментального наблюдения явления.

Заключение

Показано, что в сверхтекучем гелии могут возникать стационарные движения нормальной компоненты жидкости, которые можно было бы назвать энтропийным ветром, под действием нелинейных сил, создаваемых достаточно интенсивными волнами первого и второго звуков. С большой точностью в разложении по параметру, характеризующему сглаженность фронта ударной волны второго звука, получено простое выражение для силы, вызывающей такие течения при распространении второго звука. Численные оценки показывают, что рассмотренный процесс может быть предметом экспериментального исследования.

1. Л.К. Зарембо, В.А. Красильников, *Введение в нелинейную акустику,* Наука, Москва (1966).
2. О.В. Руденко, С.И. Солуян, *Теоретические основы нелинейной акустики,* Наука, Москва (1975).
3. С.К. Немировский, *УФН* **160,** 51 (1990).
4. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Гидродинамика,* Физматлит, Москва (2003).
5. И.М. Халатников, *Теория сверхтекучести,* Наука, Москва (1971).
6. J. Wilks, *The Properties of Liquid and Solid Helium*, Clarendon Press, Oxford (1967).

On the possibility of entropy wind in superfluid helium

N.I. Pushkina

The possibility of initiation of a quasistationary flow of the superfluid helium normal component in the presence of intense first- and second-sound waves is studied. Relevant equations are obtained. The contribution to the process from energy dissipation at the shock front and from fluid viscosity is analyzed in detail for the case of second-sound wave. The possibility of experimental observation of the process is estimated.

PACS: **47.37.+q** Superfluidity hydrodynamic aspects.

Keywords: superfluid helium, hydrodynamics, the first- and second-sound waves, shock waves, entropy wind.