УДК 517.977

ГРУППОВЫЕ ИГРОВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Е.А. Любарщук

Черновицкий национальный университет им. Ю. Федьковича

Рассмотрена игровая задача сближения траектории квазилинейного конфликтно-управляемого процесса с цилиндрическим терминальным множеством при наличии переменного запаздывания, что позволяет говорить о гарантированной поимке убегающего. Для дифференциально-разностных игр сближения с запаздыванием обобщается первый прямой метод Л.С. Понтрягина. Это дает возможность сравнить время окончания игры по первому прямому методу Л.С. Понтрягина с методом разрешающих функций. Рассмотрена задача группового преследования и получены достаточные условия сближения в классе квазистратегий, гарантирующие поимку убегающего группой преследователей.

Ключевые слова: динамическая игра, конфликтно-управляемый процесс, групповое преследование, многозначное отображение, условие Понтрягина, интеграл Аумана, гарантированное время.

Розглянуто ігрову задачу зближення траєкторії квазілінійного конфліктно-керованого процесу з циліндричною термінальною множиною за наявності змінного запізнення, що гарантує піймання втікача. Для диференціально-різницевих ігор зближення з запізненням узагальнюється перший прямий метод Л.С. Понтрягіна. Це дозволяє порівняти час закінчення гри за першим прямим методом Л.С. Понтрягіна з методом розв'язуючих функцій. Розглянуто задачу групового переслідування та одержано достатні умови зближення в класі квазістратегій, які дозволяють гарантувати піймання втікача групою переслідувачів.

Ключові слова: динамічна гра, конфліктно-керований процес, групове переслідування, багатозначне відображення, умова Понтрягіна, інтеграл Аумана, гарантований час.

Введение

Многочисленные содержательные результаты в теории дифференциальных игр вызывают интерес исследователей к этой области. Первые исследования, касающиеся основного уравнения теории дифференциальных игр, принадлежат Р. Айзексу [1]. В отдельные направления исследований можно отнести попятные процедуры Понтрягина [2] и правило экстремального прицеливания Н.Н.Красовского [3, 4].

Подход, связанный с правилом экстремального прицеливания Н.Н.Красовского, был использован для решения дифференциально-разностной задачи преследования в работах Ю.С. Осипова, А.Б. Куржанского [9]. Основу решения составляет построение специальных множеств позиций, упирающихся в заданное целевое множество.

Наряду с этим правилом, более простым для решения конкретных задач является первый прямой метод Л.С. Понтрягина [2]. Данный подход был использован для решения линейных дифференциальных игр преследования с запаздыванием в работе М.С. Никольского [10].

Мощным методом при решении задач преследования, которые описываются функционально-дифференциальными уравнениями, является аппарат разрешающих функций [5–8]. Этот подход для дифференциально-разностных игр сближения с постоянным запаздыванием был использован в работе Барановской Л.В. [11].

В данной работе для дифференциальных игр сближения с переменным запаздыванием обобщен первый прямой метод Л.С. Понтрягина. Также в работе исследуется задача сближения, которая описывается системой дифференциально-разностных уравнений с переменным запаздыванием для случая одного убегающего и группы преследователей. Для решения поставленной задачи используется метод разрешающих функций.

Цель работы — построение и исследование схем метода разрешающих функций для задач сближения при выполнении условия Понтрягина и однотипной динамике, которая описывается системой дифференциально-разностных уравнений с переменным запаздыванием. Данная задача ставится для случая группы преследователей и одного убегающего, а ее решение отвечает на вопрос возможности гарантированной поимки его.

Схема метода разрешающих функций. Первый прямой метод Понтрягина

Рассмотрим задачу преследования, которая описывается системой линейных функционально-дифференциальных уравнений с переменным запаздыванием:

$$\begin{gathered}\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t - \tau(t)) + \varphi(u, v), \quad t \ge s; \\ z(\xi) = 0,\ \xi < s;\ z(s) = z_0.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $z \in R^n$, A и B — $n \times n$ постоянные матрицы, непрерывная функция $\tau(t) : [s, +\infty) \to R_+$. Блок управления задается функцией $\varphi(u, v) : U \times V \to R^n$, которая считается непрерывной по совокупности переменных на прямом произведении непустых компактов $U \in K(R^n), V \in K(R^n)$.

Цилиндрическое терминальное множество имеет вид [5]:

$$M^* = M_0 + M, \tag{2}$$

где M_0 — линейное подпространство из R^n, а M — непустой компакт из ортогонального дополнения L к M_0 в пространстве R^n.

Для задачи преследования $(1), (2)$ рассматривается локальная задача сближения с фиксированным временем.

Управления игроков $u(t) : R_+ \to U$ и $v(t) : R_+ \to V$ — измеримые функции времени. Цели игроков противоположны. Если первый игрок (u) старается вывести траекторию процесса (1) на терминальное множество за кратчайшее время, то второй игрок (v) пытается избежать встречи или максимально оттянуть момент попадания траектории на множество M^*.

Примем сторону первого игрока и сориентируемся на выбор противником измеримой функции из V в качестве управления. Считаем, что игра происходит на интервале времени $[0, T]$. Тогда управление первого игрока выбираем на основе информации о начальном положении z_0 и $v_t(\cdot)$ в виде измеримой функции:

$$u(t) = u(z_0, v_t(\cdot)),\ \ t \in [0,T], u(t) \in U, \tag{3}$$

где $v_t(\cdot) = \{v(s) : s \in [0,t]\}$ — предыстория управления второго игрока до момента t. Такое управление реализует квазистратегию.

Пусть π — ортопроектор, действующий из R^n в L. Положив $\varphi(U,v) = \{\ (u,v) : u \in U\}$, рассмотрим многозначные отображения:

$$W(t,s,v) = \pi C(t,s)\, \varphi(U,v),$$

$$W(t,s) = \bigcap_{v \in V} W(t,s,v), \quad t \geq 0,$$

определенные на множествах $\Delta \times V$ и Δ соответственно, где $\Delta = \{(t,s) : t \geq s \geq 0\}$, $C(t,s)$ — матричная функция Коши из представления решения [12].

Условие 1. *(Условие Понтрягина) Отображение* $W(t,s) \neq \varnothing$ *на множестве* Δ.

Так как матричная функция $C(t,s)$ измерима по t и суммируема по s для каждого $t \in R_+$ в силу предположений о параметрах процесса (1), то можно сделать вывод, что при любом фиксированном $t > 0$ многозначное отображение $W(t,s,v)$ является измеримым по s на интервале $[0, t]$ и замкнутым по $v, v \in V$. Тогда согласно [13] отображение $W(t,s)$ — измеримое по $s \in [0,t]$ замкнутозначное отображение.

Из условия Понтрягина и теоремы измеримого выбора [13] вытекает, что при любом $t \geq 0$ существует хотя бы один измеримый по s селектор $\gamma(t,s), \gamma(t,s) \in W(t,s), (t,s) \in \Delta$.

Обозначим через Γ совокупность таких селекторов многозначного отображения $W(t,s)$. Зафиксируем некоторый элемент $\gamma(\cdot,\cdot) \in \Gamma$ и положим:

$$\xi(t, z_0, \gamma(\cdot,\cdot)) = \pi C(t,s) z_0 + \int_0^t \gamma(t,s) ds. \tag{4}$$

Рассмотрим многозначное отображение:

$$\mathsf{A}(t,s,v) = \{\alpha \geq 0 : [W(t,s,v) - \gamma(t,s)] \cap \alpha[M - \xi(t, z_0, \gamma(\cdot,\cdot))] \neq \varnothing\} \tag{5}$$

и его разрешающую функцию

$$\alpha(t,s,v)=\sup\{\alpha:\alpha\in \mathrm{A}(t,s,v)\},\quad (t,s)\in\Delta,\quad v\in V. \tag{6}$$

Несложно показать, что т.к. $0\in W(t,s,v)-\gamma(t,s)$ для всех $v\in V, 0\le s\le t$, то при $\xi(t,z_0,\gamma(\cdot,\cdot))\in M$ функция $\alpha(t,s,v)=+\infty$ при всех $s\in[0,t], v\in V$. Если же $\xi(t,z_0,\gamma(\cdot,\cdot))\notin M$, то функция (6) принимает конечные значения.

Введем множество:

$$T(z_0,\gamma(\cdot,\cdot))=\{t\ge 0:\inf_{v\in V}\int_0^t\alpha(t,s,v(s))ds\ge 1\}. \tag{7}$$

Если $\xi(t,z_0,\gamma(\cdot,\cdot))\in M$, то $\alpha(t,s,v)=+\infty$ для $s\in[0,t], v\in V$ и в этом случае значение интеграла в соотношении (7) естественно положить равным $+\infty$, тогда соответствующее неравенство выполнено автоматически. В случае, когда неравенство в фигурных скобках в (7) не выполняется при всех $t>0$, полагаем, что $T(z_0,\gamma(\cdot,\cdot)=\varnothing$.

Теорема 1. *Пусть для конфликтно управляемого процесса* $(1),(2)$ *выполнено условие Понтрягина,* $M=coM$ *и для начального состояния* z_0 *и некоторого селектора* $\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma$, $T\in T(z_0,\gamma(\cdot,\cdot))\ne\varnothing$. *Тогда траектория процесса* (1) *может быть приведена из начального состояния* z_0 *на терминальное множество* M^* *в момент* T *с помощью управления* (3).

Схема доказательства.

Мы рассматриваем два случая: $\xi(t,z_0,\gamma(\cdot,\cdot))\notin M$ и $\xi(t,z_0(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))\in M$. Для случая $\xi(t,z_0,\gamma(\cdot,\cdot))\notin M$ разбиваем процесс преследования на два временных участка: "активный" $[0,t_*]$ и "пассивный" $[t_*,T]$, где t_* — момент переключения с одного закона выбора контруправления на другой, зависящий от предыстории управления убегающего. Для случая $\xi(T,z_0,\gamma(\cdot,\cdot))\in M$, учитывая закон управления преследователя из формулы Коши, получаем необходимые результаты.

Теорема 2. *(теорема Понтрягина) Пусть выполняется условие Понтрягина для конфликтно-управляемого процесса* $(1),(2)$ *и для некоторого начального состояния* z_0*:* $P(z_0)<+\infty$*, где*

$$P(z_0)=min\{t\ge 0:\pi z_0C(t,s)\in M-\int_0^t W(t,s)ds\}. \tag{8}$$

Тогда траектория процесса (1) *может быть приведена с начального положения* z_0 *на терминальное множество в момент* $P(z_0)$.

Доказательство.

Обозначим $P_0=P(z_0)$. Тогда:

$$\pi z_0 C(t,s) \in M - \int_0^t W(t,s)ds.$$

Это означает, что существует такая точка $m \in M$ и по определению интеграла Аумана такой измеримый селектор $\gamma(\cdot,\cdot) \in \Gamma$, что:

$$\pi z_0 C(t,s) = m - \int_0^t \gamma(t,s)ds.$$

Рассмотрим многозначное отображение:

$$U(s,v) = \{u \in U : \pi C(P_0,s)\varphi(u,v) - \gamma(P_0,s) = 0\}, s \in [0,P_0], v \in V. \quad (9)$$

Пусть $v(s), v:[0,P_0] \to V$, — произвольная измеримая функция. Тогда из соотношения (9) вытекает, что отображение $U(s) = U(s,v(s))$ — компактнозначное измеримое многозначное отображение на интервале $[0, P_0]$. Согласно теореме измеримого выбора в нем существует измеримый селектор $u(s)$, который и выберем в качестве управления первого игрока на интервале $[0, P_0]$.

Из формулы (9), с учетом (8), получим:

$$\pi z(P_0) = \pi z_0 C(P_0,s) + \int_0^{P_0} \pi C(P_0,s)\,\varphi(u(s),v(s))ds = m \in M. \quad (10)$$

Теорема доказана. Приведенную теорему и способ построения управления называют первым прямым методом Л.С. Понтрягина.

Легко показать, что для конфликтно-управляемого процесса $(1),(2)$ с начальным состоянием z_0 при выполнении условия Понтрягина существует такой селектор $\gamma(\cdot,\cdot) \in \Gamma$ для которого:

$$T(z_0, \gamma(\cdot,\cdot)) \le P(z_0).$$

Групповое преследование

Рассмотрим задачу группового преследования с k преследователями и одним убегающим. Задача описывается системой линейных функционально-дифференциальных уравнений с переменным запаздыванием:

$$\begin{gathered} \dot{z}_i(t) = A_i z_i(t) + B_i z_i(t - \tau_i(t)) + \varphi_i(u,v), \quad t \ge s; \\ z_i(\xi) = 0,\ \xi < s;\ z_i(s) = z_{0i},\ i = 1,..,k. \end{gathered} \quad (11)$$

Здесь $z_i \in R^{n_i}$, A_i и B_i — $n_i \times n_i$ постоянные матрицы, непрерывные функции $\tau_i(t):[s,+\infty) \to R_+$. Блоки управления задаются функциями $\varphi_i(u_i,v): U_i \times V \to R^{n_i}$, которые считаются непрерывными по совокупности переменных на прямом произведении непустых компактов $U_i \in K(R^n), V \in K(R^n)$.

Цилиндрические терминальные множества имеют вид [5]:

$$M_i^* = M_i^0 + M_i, \quad M_i^* \subset R^{n_i}, \quad i = 1,..,k. \tag{12}$$

где M_i^0 — линейное подпространство из R^{n_i}, а M_i — непустой компакт из ортогонального дополнения L_i к M_i^0 в пространстве R^{n_i}. В пространстве R^n выделим терминальное множество M^*, состоящее из множеств $M_i^*, \quad i = 1,..,k.$

Для задачи преследования $(11), (12)$ рассматривается локальная задача сближения с фиксированным временем.

Управления игроков $u_i(t): R_+ \to U_i,\ i = 1,..,k$ и $v(t): R_+ \to V$ — измеримые функции времени. Цели игроков противоположны. Преследователи ($u_i, i = 1,..,k$) стараются вывести траекторию процесса (11) на терминальное множество за кратчайшее время, а убегающий (v) пытается избежать встречи или максимально оттянуть момент попадания траектории на множество M^*.

Примем сторону преследователей и сориентируемся на выбор противником измеримой функции из V в качестве управления. Считаем, что игра происходит на интервале времени $[0, T]$. Тогда управление преследователей выбираем на основе информации о начальном положении z_i^0 и $v_t(\cdot)$ в виде измеримой функции:

$$u_i(t) = u(z_i^0, v_t(\cdot)),\ t \in [0, T],\ u_i(t) \in U, \tag{13}$$

где $v_t(\cdot) = \{v(s): s \in [0, t]\}$ — предыстория управления второго игрока до момента t. Такое управление реализует квазистратегию.

Пусть π_i — ортопроектор, действующий из R^{n_i} в L_i. Положив $\varphi_i(U_i, v) = \{\ (u_i, v): u_i \in U_i\}$, рассмотрим многозначные отображения:

$$W_i(t, s, v) = \pi_i C_i(t, s)\ \ \varphi_i(U_i, v),$$

$$W_i(t, s) = \bigcap_{v \in V} W_i(t, s, v), \quad t \geq 0,$$

определенные на множествах $\Delta \times V$ и Δ соответственно, где $\Delta = \{(t, s): t \geq s \geq 0\}$, $C_i(t, s)$ — матричная функция Коши из представления решения [12].

Условие 2. *(Условие Понтрягина) Отображение* $W_i(t, s) \neq \varnothing$ *на множестве* Δ *для всех* $i = 1,..,k$.

Так как матричная функция $C_i(t, s)$ измерима по t и суммируема по s

для каждого $t \in R_+$ в силу предположений о параметрах процесса (11), то можно сделать вывод, что при любом фиксированном $t > 0$ многозначное отображение $W_i(t,s,v)$ является измеримым по s на интервале $[0,t]$ и замкнутым по $v, v \in V$. Тогда согласно [13] отображение $W(t,s)$ — измеримое по $s \in [0,t]$ замкнутозначное отображение.

Из условия Понтрягина и теоремы измеримого выбора [13] вытекает, что при любом $t \geq 0$ существует хотя бы один измеримый по s селектор $\gamma_i(t,s),\ \gamma_i(t,s) \in W_i(t,s),\ (t,s) \in \Delta,\ i = 1,..,k$.

Обозначим через Γ_i совокупность таких селекторов многозначного отображения $W_i(t,s),\ i = 1,..,k$. Зафиксируем некоторый элемент $\gamma_i(\cdot,\cdot) \in \Gamma_i$ и положим:

$$\xi_i(t, z_i^0, \gamma_i(\cdot,\cdot)) = \pi_i C_i(t,s) z_i^0 + \int_0^t \gamma_i(t,s) ds. \tag{14}$$

Рассмотрим многозначные отображения:

$$\mathsf{A}_i(t,s,v) = \{\alpha \geq 0 : [W_i(t,s,v) - \gamma_i(t,s)] \cap \alpha[M_i - \xi_i(t, z_i^0, \gamma_i(\cdot,\cdot))] \neq \varnothing\},\quad i = 1,..,k. \tag{15}$$

и их разрешающие функции:

$$\alpha_i(t,s,v) = \sup\{\alpha : \alpha \in \mathsf{A}_i(t,s,v)\},\quad (t,s) \in \Delta,\quad v \in V, i = 1,..,k. \tag{16}$$

Несложно показать, что т.к. $0 \in W_i(t,s,v) - \gamma_i(t,s)$ для всех $v \in V, 0 \leq s \leq t,\ i = 1,..,k$, то при $\xi_i(t, z_i^0, \gamma_i(\cdot,\cdot)) \in M_i$ функция $\alpha_i(t,s,v) = +\infty$ при всех $s \in [0,t], v \in V,\ i = 1,..,k$. Если же $\xi_i(t, z_i^0, \gamma_i(\cdot,\cdot)) \notin M_i$, то функция (16) принимает конечные значения.

Введем множество:

$$T_k(z^0, \gamma(\cdot,\cdot)) = \{t \geq 0 : \inf_{v \in V} \max_{i=1,..,k} \int_0^t \alpha(t,s,v(s)) ds \geq 1\},\quad \gamma(\cdot,\cdot) = column(\gamma_1(\cdot,\cdot),..,\gamma_k(\cdot,\cdot)),\ \gamma_i(\cdot,\cdot) \in \Gamma_i. \tag{17}$$

Если для некоторого номера $i = 1,..,k$ $\xi_i(t, z_i^0, \gamma_i(\cdot,\cdot)) \in M_i$, то $\alpha_i(t,s,v) = +\infty$ для $s \in [0,t], v \in V$, и в этом случае значение интеграла в соотношении (17) естественно положить равным $+\infty$, тогда соответствующее неравенство выполнено автоматически. В случае, когда неравенство в фигурных скобках в (17) не выполняется при всех $t > 0$, полагаем, что $T_k(z^0, \gamma(\cdot,\cdot)) = \varnothing$.

Теорема 3. *Пусть для конфликтно управляемого процесса* $(11), (12)$ *выполнено условие Понтрягина,* $M = coM$ *и для начального состояния*

$z^0 = (z_1^0,..,z_k^0)$ *и некоторого селектора* $\gamma(\cdot,\cdot) \in \Gamma$, $T \in T_k(z^0, \gamma(\cdot,\cdot)) \neq \varnothing$. *Тогда траектория процесса* (11) *может быть приведена из начального состояния* z^0 *на соответствующее терминальное множество* M_i^* *в момент* T *с помощью управления* (13).

Доказательство. Пусть $v(s):[0,T] \to V$ — произвольная измеримая функция. Рассмотрим случай $\xi_i(t, z_i^0, \gamma_i(\cdot,\cdot)) \notin M_i$ для всех $i = 1,..,k$.

Для этого введем контрольную функцию:

$$h(t) = 1 - \max_{i=1,..,k} \int_0^t \alpha(T, s, v(s))ds, \quad t \geq 0.$$

Она непрерывна, не возрастает и $h(0) = 1$. Из определения времени T следует, что существует такой момент $t_* = t(v(\cdot))$, $0 < t_* \leq T$, что $h(t_*) = 0$.

Разобъем процесс преследования на два временных участка: "активный" $[0, t_*]$ и "пассивный" $[t_*, T]$, где t_* — момент переключения с одного закона выбора контруправления на другой, зависящий от предыстории управления убегающего. На первом из них работает собственно метод разрешающих функций. Когда в момент t_* интеграл от разрешающей функции станет равным единице, то процесс преследования переключим на первый прямой метод Л.С. Понтрягина.

Определим следующий закон выбора управления преследователя.

Введем многозначные отображения:

$$\begin{aligned} U_{1i}(s,v) = \{u_i \in U_i : \pi_i C_i(T,s)\varphi_i(u_i,v) - \gamma_i(T,s) \in \\ \alpha_i(T,s,v)[M_i - \xi_i(T, z_i^0, \gamma_i(\cdot,\cdot))]\}. \end{aligned} \tag{18}$$

В силу теоремы об обратном образе отображения $U_{1i}(s,v)$ $L \times B$-измеримы, а значит, согласно теореме измеримого выбора [13] в каждом из этих многозначных отображений существует хотя бы один $L \times B$-измеримый селектор $u_{1i}(s,v)$.

Управления преследователей на интервале $[0, t_*)$ положим равным:

$$u_{1i}(s) = u_{1i}(s, v(s)), \ i = 1,..,k.$$

На пассивном участке $[t_*, T]$ "накапливать" разрешающую функцию больше не имеет смысла, поэтому здесь разрешающая функция полагается равной нулю:

$$\alpha_i(T,s,v) = 0, \quad s \in [t_*, T], \ i = 1,..,k,$$

а управление преследователей выбираем теперь в соответствии с прямым методом Л.С. Понтрягина.

Рассмотрим отображения:

$$U_{2i}(s,v)=\{u_i\in U_i:\pi_i C_i(T,s)\varphi_i(u_i,v)-\gamma_i(T,s)=0\},$$
$$s\in[t_*,T],\, v\in V,\ i=1,..,k$$

которые являются $L\times B$ -измеримым и их селекторы $u_{2i}(s,v)$ — $L\times B$ -измеримы.

Управление преследователей на интервале $[t_*,T)$ положим равным:

$$u_{2i}(s)=u_{2i}(s,v(s)),\ i=1,..,k. \tag{19}$$

Пусть $\xi_i(T,z_i^0,\gamma_i(\cdot,\cdot))\in M_i$ для некоторого номера i. Тогда управление i -го преследователя на интервале $[0,T)$ выберем в виде (19), а управления остальных преследователей выберем произвольными.

Таким образом, определены законы управления преследователей для любых возможных ситуаций.

Покажем, что при этом хотя бы для одного $i=1,..,k$ траектория процесса (11) в момент T попадет на соответствующее множество M_i^* при любых управлениях убегающего.

Из формулы Коши [12] для системы (11) следует представление:

$$\pi_i z_i(T)=\pi_i z_i^0 C_i(T,s)+\int_0^T \pi_i C_i(T,s)\varphi_i(u_i(s),v(s))ds. \tag{20}$$

Проанализируем сначала случай $\xi_i(T,z_0,\gamma(\cdot,\cdot))\notin M_i$ для всех $i=1,..,k$. Для этого прибавим и вычтем из правой части равенства (20) вектор $\int_0^T \gamma_i(T,s)ds$. Тогда с использованием закона выбора управления преследователем (13), получим:

$$\pi_i z_i(T)=[\pi_i z_i^0 C_i(T,s)+\int_0^{t_*}\gamma_i(T,s)ds]+\int_0^{t_*}[\pi_i C_i(T,s)\varphi_i(u_i(s),v(s))-\gamma_i(T,s)]ds$$

$$\pi_i z_i(T)\in\xi_i(T,z_i^0,\gamma_i(\cdot,\cdot))(1-\int_0^{t_*}\alpha_i(T,s,v(s))ds)+\int_0^{t_*}\alpha_i(T,s,v(s))M_i ds,$$

в котором учтено равенство $\alpha_i(T,s,v(s))=0,\quad s\in[t_*,T]$. Но т.к. $M_i\in coK(R^{n_i})$ и учитывая, что $\int_0^{t_*}\alpha_i(T,s,v(s))ds=1$ для индекса i, на котором достигается максимум интеграла в определении функции $h(t_*)$, имеем $\int_0^{t_*}\alpha_i(T,s,v(s))M_i ds=M_i$. А значит $\pi_i z_i(T)\in M_i$.

Пусть для некоторого i $\xi_i(T, z_i^0, \gamma_i(\cdot,\cdot)) \in M_i$. Тогда учитывая законы управления преследователей из представления (20) следует включение $z_i(T) \in M_i^*$.

Теорема доказана.

Таким образом, для задачи группового преследования получены достаточные условия гарантированной поимки убегающего группой преследователей.

Выводы

Обобщен первый прямой метод Л.С. Понтрягина для дифференциально-разностных игр в классе квазистратегий. Конфликтно-управляемый процесс описывается системой дифференциально-разностных уравнений с переменным запаздыванием. Получены достаточные условия разрешимости задачи сближения за некоторое гарантированное время. Построена и исследована схема метода разрешающих функций для задачи группового преследования.

1. Isaacs R. Differential games: a mathematical theory with applications to warfare and pursuit, control and optimization // Wiley. — 1965. — P. 418.
2. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. В 3-х т. — М.: Наука, 1988. — 736 с.
3. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. — М.: Наука, 1970. — 420 с.
4. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 456 с.
5. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. — Киев: Наукова думка, 1992. — 384 с.
6. Чикрий А.А. Об одном аналитическом методе в динамических играх сближения // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. — 2010. — 271. — С. 76–92.
7. Пилипенко Ю.В.,Чикрий А.А. Колебательные конфликтно управляемые процессы // Прикладная математика и механика. — 1993. — Т. 57, № 3. — С. 3–14.
8. Чикрий А.А., Чикрий Г.Ц. Групповое преследование в дифференциально-разностных играх // Диф. уравнения. — 1984. — № 5. — С. 802–810.
9. Осипов Ю.С. Дифференциальные игры систем с последействием // ДАН СССР. — 1971. — Т. 196, № 4. — С. 779–782.
10. Никольский М.С. Линейные дифференциальные игры преследования при наличии запаздывания // ДАН СССР. — 1971. — Т.197, №5. — С. 1018–1021.
11. Chikrii A., Baranovskaya L. A type of controlled systems with delay // Cybernetics and Computing Technology. Complex Control Systems. — 1995. — No. 107. — P. 3-11.
12. Азбелев Н.В., Симонов П.М. Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными — Пермь: Изд-во Пермского университета, 2001. — 230 с.
13. Aubin J., Frankowska H. Set-valued Analysis // Birkhäuser. — 1990. — P. 461.

UDC 517.977

GROUP PURSUIT IN DIFFERENTIAL-DIFFERENCE GAMES WITH VARIABLE DELAY

I.A. Liubarshchuk

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

Introduction. A variety of interesting examples stimulated the development of the Mathematical Control Theory, in particular, the Dynamic Games Theory. First fundamental results in Differential Games Theory were obtained by R. Isaacs. Some others directions of research are Pontryagin's procedures and Krasovskii's extremal aiming principle. The further development of Pontryagin's ideas by his disciples and followers resulted in the Method of Resolving Functions, one of the most powerful methods of dynamic game theory.

The essence of the Method of Resolving Functions is in the construction of some numeric resolving function on the known parameters of the process. The resolving function outlines the course of the process. At the moment at which its integral turns into unit the trajectory of the process hits the terminal set.

This method was used by Baranovskaya for local convergence problems with fixed time, which are described by a system of differential-difference equations of delay-type.

The purpose of the article is to investigate group problem, which is described by a system of differential-difference equations with variable delay. The necessary and sufficient conditions for solvability of such problems are established.

Results. We considered a pursuit problem in 2-person differential game, one player is a pursuer and another one is an evader. The problem was given by the system of the differential-difference equations of delay-type and for such a conflict-controlled process we presented conditions on its parameters and initial state, which were sufficient for capturing the evader. For differential-difference games with time lag we generalized Pontryagin's First Direct Method. That gave us a possibility to compare results obtained by the Method of Resolving Functions for such conflict-controlled processes to Pontryagin's First Direct Method. The necessary and sufficient conditions for group problem solvability were established.

Conclusions. A general scheme of the Method of Resolving Functions for the local convergence problem with fixed time is presented . The conflict-controlled process is described by a system of differential-difference equations of delay-type with variable delay.

For differential-difference games with variable delay we generalized Pontryagin's First Direct Method.

We also considered the group pursuit problem in differential game. For such conflict-controlled process we obtained and investigated general scheme of the Method of Resolving Functions.

Keywords: Dynamic game, conflict-controlled process, group pursuit, set-valued map, Pontryagin's condition, Aumann's integral, guaranteed time.

1. Isaacs R. Differential games: a mathematical theory with applications to warfare and pursuit, control and optimization // Wiley. — 1965. — P. 418.
2. Pontryagin L.S. Selected Scientific Works. — Moscow: Nauka, 1988. — 736 p. (in Russian)

3. Krasovskii N.N. Game Problems on Motions Encounter. — Moscow: Nauka, 1970. — 420 p. (in Russian)
4. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Positional differential games. — Moscow: Nauka, 1974. — 456 p. (in Russian)
5. Chikrii A.A. Conflict Controlled Processes. — Kiev: Naukova dumka, 1992. — 384 p. (in Russian)
6. Chikrii A.A. On one analytic method for dynamic approach games. // Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V.A. Steklova. — 2010. — no. 271 —P. 76–92. (in Russian)
7. Pilipenko Y.V., Chikrii A.A. Oscillation conflict controlled processes // Prikladnaya matematika i mehanika. — 1993. — vol. 57. — no. 3. — P. 3–14. (in Russian)
8. Chikrii A.A., Chikrii G.C. Group pursuit in differential-difference games // Dif. uravneniya, — 1984. — no. 5. — P. 802–810. (in Russian)
9. Osipov Y.S. Differential games for systems with time lag. DAN SSSR. — 1971. — vol. 196. — no. 4. — P. 779–782. (in Russian)
10. Nikolskii M.S. Linear differential pursuit games with time lag. DAN SSSR. — 1971., — vol. 197. — no. 5. — P. 1018–1021. (in Russian)
11. Chikrii A.A., Baranovskaya L.V. A type of controlled systems with delay. // Cybernetics and Computing Technology. Complex Control Systems. — 1995. — no. 107. — P. 3–11.
12. Azbelev N.V., Simonov P.M. Stability of equations solutions with ordinary derivatives. Perm: Izd-vo Permskogo universiteta, 2001. — 230 p.
13. Aubin J., Frankowska H. Set-valued Analysis // Birkhäuser. — 1990. — P. 461.

Получено 19.05.16