

Энергетический спектр поля скорости, индуцируемого фрактальной вихревой нитью в сверхтекучем гелии

С.К. Немировский, В.А. Андрющенко

*Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе, СО РАН
пр. Академика Лаврентьева, 1, г. Новосибирск, 630090, Россия
Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, г. Новосибирск, 630090, Россия
E-mail: nemir@itp.nsc.ru*

Статья поступила в редакцию 29 ноября 2007 г.

Используя гауссову модель вихревого клубка, вычислен энергетический спектр $E(k)$ трехмерного случайного поля скорости, индуцируемого хаотическими вихревыми нитями. Сделано предположение, что нити имеют структуру случайного блуждания (броуновские линии) с различной размерностью Хаусдорфа H_D . Показано, что для фрактальной вихревой линии, характеризующейся H_D , энергетический спектр для больших k имеет вид $E(k) \sim k^{H_D-2}$, в то время как для малых k носит универсальный характер $E(k) \sim k^2$. На малых расстояниях от вихревой нити характеристики аналогичны гладкой нити.

З використанням гауссової моделі вихревого клубка обчислено енергетичний спектр $E(k)$ тривимірного випадкового поля швидкості, що індуковано хаотичними вихровими нитками. Зроблено припущення, що нитки мають структуру випадкового блукання (броунівські лінії) з різною розмірністю Хаусдорфа H_D . Показано, що для фрактальної вихрової лінії, що характеризується H_D , енергетичний спектр для великих k має вигляд $E(k) \sim k^{H_D-2}$, у той час як для малих k носить універсальний характер $E(k) \sim k^2$. На малих відстанях від вихрової нитки характеристики є аналогічними гладкої нитки.

PACS: 67.25.dk Вихри и турбулентность;
98.80.Cq Модели происхождения Вселенной, основанные на теории частиц и теории поля.

Ключевые слова: модель вихревого клубка, фрактальная вихревая нить, сверхтекучий гелий.

1. Введение

Идея о том, что свойства классической гидродинамической турбулентности могут быть описаны в терминах хаотических вихревых линий трубок, возникла некоторое время назад (для обсуждения и ссылок см. книги [1,2]). Например, при прямом численном моделировании течения жидкостей с числом Рейнольдса порядка 100 было показано, что поле завихренности состоит из хаотического множества тонких вихревых трубок. Эта картина очень близка к ситуации, появляющейся в численном моделировании хаотической динамики квантованных вихревых нитей в He II [3–6]. Конечно, визуальное подобие нельзя рассматривать как подтверждение эквивалентности обеих картин, поэтому требуется теоретический анализ поведения трехмерного поля скорости, индуцируемого хаотическими вихревыми нитями. С другой стороны, в пос-

леднее время появился ряд численных и экспериментальных исследований, показывающих, что хаотические вихри в сверхтекучем гелии могут индуцировать движение жидкости, обладающее свойствами классической турбулентности (см. [7–9]). В частности, распад поля завихренности происходит по степенному закону и имеет универсальный для турбулентности вид $\sim t^{3/2}$ [10]. Численное моделирование квантованных вихревых нитей в He II показало, что индуцируемое вихрями течение имеет колмогоровский спектр [11,12]. Этот факт также наблюдали в экспериментальной работе [13]. Вопрос о том, каким образом хаотические вихревые нити могут моделировать классическую турбулентность, является очень интригующим. Одним из важнейших первых шагов является определение спектра энергии трехмерного течения жидкости, индуцируемого хаотическими вихревыми

петлями. В настоящей работе вычислена спектральная плотность $E(k)$ трехмерного течения, возникающего от фрактальных вихревых нитей с различной размерностью Хаусдорфа H_D . При этом использована гауссова модель вихревого клубка [14].

Структура статьи следующая. Во втором разделе, разбитом на три подраздела, изложен материал, относящийся к математической постановке задачи. Так, в первом подразделе выведена формула для энергии потока, индуцируемого хаотической вихревой нитью. Во втором — кратко обсуждена гауссова модель и ее использование для вычисления энергии, в третьем — обсуждены различные варианты фрактальных вихревых линий. В третьем разделе работы найдены спектры энергии для различных вихревых петель. В заключении проанализированы результаты работы и обсуждены возможные продолжения.

2. Математическая модель

2.1. Энергия вихревой системы

Средняя кинетическая энергия потока, индуцируемого вихревой нитью, может быть записана как

$$E = \left\langle \frac{\rho_s}{2} \int \mathbf{v}^2 d^3 \mathbf{r} \right\rangle. \quad (1)$$

Здесь ρ_s — плотность сверхтекучей компоненты, \mathbf{v} — скорость жидкости, $\langle \rangle$ — усреднение проводится по всем возможным конфигурациям вихревой системы. Перейдем от скорости \mathbf{v} к завихренности $\boldsymbol{\omega}$, для этого вводим векторный потенциал поля скорости

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\rho})}{|\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}|} d^3 \boldsymbol{\rho}.$$

Тогда энергия принимает вид

$$E = \left\langle \frac{\rho_s}{2} \int \mathbf{v} [\nabla \times \mathbf{A}] d^3 \mathbf{r} \right\rangle = \left\langle \frac{\rho_s}{2} \int \nabla [\mathbf{A} \times \mathbf{v}] d^3 \mathbf{r} + \frac{\rho_s}{2} \int \mathbf{A} [\nabla \times \mathbf{v}] d^3 \mathbf{r} \right\rangle. \quad (2)$$

Интегрирование дивергенции вектора в бесконечных пределах дает нуль, поэтому первый член в правой части уравнения равен нулю и

$$E = \left\langle \frac{\rho_s}{2} \frac{1}{4\pi} \iint \frac{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})}{|\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}|} d^3 \boldsymbol{\rho} d^3 \mathbf{r} \right\rangle. \quad (3)$$

Для нахождения энергии в \mathbf{k} -пространстве используем соотношение

$$\frac{1}{|\mathbf{r}|} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\pi d^3 \mathbf{k}}{\mathbf{k}^2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}.$$

Применив преобразование Фурье, запишем энергию как

$$E = \left\langle \frac{\rho_s}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 \mathbf{k}}{\mathbf{k}^2} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}) \boldsymbol{\omega}(-\mathbf{k}) \right\rangle. \quad (4)$$

Поле завихренности в He II имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) = \tilde{\kappa} \int_0^L \mathbf{s}'(\xi) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{s}(\xi)] d\xi. \quad (5)$$

Здесь и далее $\mathbf{s}(\xi)$ обозначает радиус-вектор, направленный к некоторой точке вихря. Параметр ξ , длина дуги, пробегает значения от 0 до L (полной длины вихревой нити), \mathbf{s}' — производная радиус-вектора вдоль кривой, другими словами, касательный вектор. Величиной $\tilde{\kappa}$ обозначен квант циркуляции для поля скорости, равный h/m_4 , где h — постоянная Планка, m_4 — масса атома гелия. Применим преобразование Фурье к $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$, тогда

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}) &= \tilde{\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \int_0^L \mathbf{s}'(\xi) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{s}(\xi)] d\xi = \\ &= \tilde{\kappa} \int_0^L \mathbf{s}'(\xi) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{s}(\xi)} d\xi, \end{aligned} \quad (6)$$

далее подставим (6) в (4) и получим выражение для энергии в удобном для дальнейшего анализа виде:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \mathbf{k} \times \left\langle \frac{1}{\mathbf{k}^2} \frac{\rho_s \tilde{\kappa}^2}{2} \int_0^L \int_0^L \mathbf{s}'(\xi_1) \mathbf{s}'(\xi_2) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{s}(\xi_1) - \mathbf{s}(\xi_2))} d\xi_1 d\xi_2 \right\rangle. \quad (7)$$

Таким образом, мы выразили энергию потока в терминах конфигурации вихревых петель. Очевидно, что выражение в угловых скобках является спектром энергии потока — важнейшей характеристикой турбулентных течений.

2.2. Гауссова модель

Для усреднения (7) по всем возможным состояниям поля завихренности используем гауссову модель вихревого клубка [14]. Суть гауссовой модели — построение пробной функции распределения вероятности $\mathcal{P}(\mathbf{s})$ реализации конфигурации вихревых линий в пространстве петель на основании известных экспериментальных фактов. Эта функция строится таким образом, чтобы усреднение по конфигурациям вихревых линий,

сделанное с ее помощью, давало известные значения определенных величин, при этом предполагалось, что вихревые нити имеют гауссово распределение. Эти предположения приводят к обобщенному распределению Винера для функции $\mathcal{P}(\mathbf{s})$. Практически, чтобы вычислить различные средние числа, удобно работать не с распределением Винера, а с характеристическим функционалом, который определяется следующим образом:

$$W(\{\mathbf{P}(\xi)\}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\langle \exp \left(i \int_0^L \mathbf{P}(\xi) \mathbf{s}'(\xi) d\xi \right) \right\rangle. \quad (8)$$

В соотношении (8) усреднение ведется по обобщенному распределению Винера. Поскольку это распределение подобно гауссовому, то вычисление характеристического функционала легко осуществляется с помощью «процедуры полных квадратов» и дает следующий результат:

$$W(\{\mathbf{P}^\alpha(\xi'), \mathbf{P}^\beta(\xi'')\}) = \exp \left(- \int_0^L \int_0^L \mathbf{P}^\alpha(\xi') N^{\alpha\beta}(\xi' - \xi'') \mathbf{P}^\beta(\xi'') d\xi' d\xi'' \right). \quad (9)$$

Здесь $N^{\alpha\beta}(\xi' - \xi'')$ играет роль матрицы корреляций между касательными векторами $\mathbf{s}'(\xi')$ и $\mathbf{s}''(\xi'')$. С помощью операций функционального дифференцирования характеристического функционала можно легко получить различные средние для вихревой петли. Так, например, непосредственно из определения (8) следует, что корреляционная функция между различными тангенциальными векторами на вихревой нити имеет вид

$$\langle \mathbf{s}'_\alpha(\xi_1) \mathbf{s}''_\beta(\xi_2) \rangle = \frac{\delta^2 W}{i \delta \mathbf{P}^\alpha(\xi_1) i \delta \mathbf{P}^\beta(\xi_2)} \Big|_{\text{all } \mathbf{P}=0}. \quad (10)$$

В терминах характеристического функционала (9) энергия (7) может быть записана следующим образом:

$$\langle E \rangle = \frac{\rho_s \tilde{\kappa}^2}{2} \int_{\mathbf{k}} \frac{d^3 \mathbf{k}}{k^2} \int_0^L \int_0^L d\xi_1 d\xi_2 \frac{\delta^2 W}{i \delta \mathbf{P}^\alpha(\xi_1) i \delta \mathbf{P}^\beta(\xi_2)}. \quad (11)$$

В соотношении (11) характеристический функционал вычисляется для значения $\mathbf{P}^\alpha(\xi) = \mathbf{k}^\alpha \theta(\xi - \xi_1) \theta(\xi_2 - \xi)$ (θ — ступенчатая функция). Найдем выражение для энергии в терминах корреляционных функций, для этого проварьируем $W(\{\mathbf{P}^\alpha(\xi'), \mathbf{P}^\beta(\xi'')\})$ по $\mathbf{P}^\alpha(\xi')$. При этом используем следующее правило:

$$\frac{\delta \mathbf{P}^\alpha(\xi')}{\delta \mathbf{P}^\beta(\xi'')} = \delta(\xi' - \xi'') \delta_{\alpha\beta}.$$

Будем считать систему сферически симметричной в \mathbf{k} -пространстве, т.е. $(d^3 \mathbf{k} / k^2) = 4\pi dk$ и

$$N^{\alpha\beta}(\xi' - \xi'') = \delta_{\alpha\beta} N(\xi' - \xi''),$$

выполним суммирование по индексам. Кроме того, воспользовавшись вышеприведенным выражением для $\mathbf{P}^\alpha(\xi)$, получим

$$E = 4\pi \rho_s \tilde{\kappa}^2 \int_0^L \int_0^L d\xi_1 d\xi_2 \int_0^\infty dk [3N(\xi_1 - \xi_2) - 4(k \int_0^{\xi_2 - \xi_1} N(x) dx)^2] \exp \left(-3k^2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} N(\xi' - \xi'') d\xi' d\xi'' \right). \quad (12)$$

Преобразуем двойной интеграл в предэкспоненциальный множитель, повернув систему координат следующим образом: $V = \xi' + \xi''$, $U = \xi' - \xi''$. Область интегрирования преобразуется из

$$\int_0^L \int_0^L d\xi' d\xi'' \text{ в } J \left(\int_{-L}^0 dU \int_{-U}^{2L+U} dV + \int_0^L dU \int_U^{2L-U} dV \right).$$

U изменяется в пределах от 0 до L . Модуль якобиана преобразования $J = |\delta(\xi', \xi'') / \delta(U, V)| = 1/2$. Аналогичным образом преобразуется интеграл в экспоненте. После выполненных преобразований выражение для энергии в новых координатах принимает вид

$$E = 8\pi \rho_s \tilde{\kappa}^2 \int_{-\infty}^\infty dk \int_0^L dU (L - U) \left[3N(U) - 2 \left(k \int_0^U N(x) dx \right)^2 \right] \times \exp \left(-6k^2 \int_0^U (U - x) N(x) dx \right). \quad (13)$$

Соотношение (13) является ключевым для определения спектральной плотности трехмерного поля скорости. Чтобы использовать его, необходимо уточнить вид функции $N(x)$. Этому посвящен следующий подраздел.

2.3. Модели вихревых нитей

Мы исследуем несколько наиболее важных моделей вихревых нитей. Обратимся к выражению для корреляционной функции (10) в случае $\beta = \alpha$:

$$\langle \mathbf{s}'_\alpha(\xi') \mathbf{s}'_\alpha(\xi'') \rangle = \frac{\delta^2 W}{i \delta \mathbf{P}^\alpha(\xi') i \delta \mathbf{P}^\alpha(\xi'')} \Big|_{\text{all } \mathbf{P}=0} = N(\xi' - \xi''). \quad (14)$$

Проинтегрируем соотношение (14) по ξ' и ξ'' в интервале от 0 до L . После интегрирования левая часть уравнения принимает вид

$$\langle (s(L) - s(0))(s(L) - s(0)) \rangle = \langle D^2 \rangle.$$

Здесь $\langle D^2 \rangle$ — средний квадрат расстояния между точками ξ', ξ'' , в правой части (14) появится двойной интеграл от корреляционной функции, характеризующей систему. После его вычисления получим некоторую функцию от L (полной длины вихревой нити). Таким образом, мы можем вычислить зависимость между средним расстоянием между точками и линейным размером объекта. Из полученного выражения можно будет вычислить основную характеристику фрактального объекта — его размерность. Определим фрактальные размерности (размерности по Хаусдорфу) некоторых наиболее важных моделей вихревых нитей, для этого вычислим интегралы при различных корреляционных функциях $N(\xi' - \xi'')$. Итак

$$\langle D^2 \rangle = \int_0^L \int_0^L N(\xi' - \xi'') d\xi' d\xi''.$$

Пусть корреляционная функция имеет степенной вид, т.е. $N(\xi' - \xi'') = c(\xi' - \xi'')^\lambda$, где c — здесь и далее некоторая константа подходящей размерности. Результат интегрирования следующий: $\langle D^2 \rangle \sim L^{\lambda+2}$, т.е. средний линейный размер трехмерной области, занимаемой вихревой петлей, связан с ее длиной следующим образом:

$$L \sim \langle D \rangle^{H_D}. \quad (15)$$

Таким образом, вихревая нить является фрактальным объектом с размерностью Хаусдорфа $H_D = 2/(\lambda + 2)$. Для гладкой линии $\lambda = 0$ и, соответственно, $H_D = 1$. Другой важной моделью является модель нити, которая не может иметь самопересечений. В этой модели $\lambda = -4/5$, тогда мы получаем, что $H_D = 5/3$. Теперь обратимся к случаю дельта-корреляционной функции $N(\xi' - \xi'') = c\delta(\xi' - \xi'')$, что соответствует классической броуновской линии (величина c соответствует элементарному шагу). При этом взаимодействуют только бесконечно близкие точки вихревой нити, т.е. реализуется случайное блуждание. Вычисления приводят к $L \sim D^2$, соответственно, $H_D = 2$. Вихревые петли в сверхтекучем He II также обладают гауссовой статистикой, однако для них корреляционная функция не имеет степенной вид [14]. На расстояниях порядка $\xi' - \xi''$ (вдоль кривой) нить является гладкой, но на больших расстояниях нить обладает свойствами, схожими со случайным блужданием с характерным масштабом R — радиусом кривизны. Наилучшим обра-

зом такое поведение может быть аппроксимировано функцией

$$N(\xi' - \xi'') = \frac{\pi R}{1 + [(\xi' - \xi'')/R]^2}, \quad (16)$$

которая является «размазанной» (на ширину R) дельта-функцией. Рассматриваемая корреляционная функция соответствует случаю «реальной» нити или нити, гладкой на малых расстояниях $\xi' - \xi'' \ll R$ и обладающей фрактальными свойствами броуновской нити на больших расстояниях $\xi' - \xi'' \gg R$.

3. Энергетический спектр

Определим энергетический спектр для различных моделей вихревых нитей. Для решения этой задачи необходимо учесть, что вихревые петли являются замкнутыми линиями. Условие замыкания имеют следующий вид:

$$\langle D^2 \rangle = \int_0^L \int_0^L N(\xi' - \xi'') d\xi' d\xi'' = 0, \quad (17)$$

другими словами, среднеквадратичное расстояние между начальной и конечной точками вихря равно нулю. Это накладывает дополнительные условия на корреляционную функцию, а именно: зануление при интегрировании по своим аргументам по всей длине нити и симметрия относительно границ интегрирования (точек 0 и L). Например, для чисто броуновской нити условия приводят к тому, что корреляционная функция $N(x) = c\delta(x)$ должна заменяться функцией $N(x) = c[\delta(x) - 1/L]$. Аналогичная процедура применяется в других случаях. Если не выполнить эту процедуру, получается неверное решение при малых волновых числах. При этом для упрощения вычислений в экспоненте выражения (13) можно, не опасаясь противоречий, не выполнять указанную процедуру.

3.1. Броуновская линия

Рассмотрим случай чисто случайного блуждания (броуновская линия), тогда корреляционная функция имеет вид $N(x) = c\delta(x)$. Для нахождения энергетического спектра необходимо проинтегрировать по U в уравнении (13), но сначала вычислим интеграл в экспоненте этого выражения:

$$-6k^2 \int_0^U (U - x) c\delta(x) dx = -3k^2 cU.$$

При этом энергетический спектр примет вид

$$E(k) = 8\pi\rho_s\tilde{\kappa}^2 \int_0^L (L-U) \left[3c(\delta(U)-1/L) - \frac{k^2c^2}{2} \right] e^{-3k^2cU} dU. \quad (18)$$

Данный интеграл легко вычисляется в аналитических функциях, ответ имеет следующий вид:

$$E(k) = 8\pi\rho_s\tilde{\kappa}^2 \frac{6 - 2 \exp(-3ck^2L)(3 + ck^2L/2) + ck^2L(-17 + 24ck^2L)}{18ck^4L}. \quad (19)$$

Рассмотрим различные случаи больших и малых k по отношению к величине $1/\sqrt{cL}$. Величина \sqrt{cL} совпадает с линейным размером трехмерной области, где локализована вихревая петля. Из выражения (19) следует, что при $k \ll \sqrt{cL}$, $E(k)$ ведет себя примерно как $E(k) \approx 8\pi\rho_s\tilde{\kappa}^2c^2k^2L^2$, т.е. спектральная плотность возрастает пропорционально k^2 , что соответствует закону равномерного распределения и означает, что dE/dk постоянно. При $k \gg \sqrt{cL}$, $E(k)$ является постоянной величиной, примерно равной $9,33\pi\rho_s\tilde{\kappa}^2cL$. Энергетический спектр для броуновской линии представлен на рис. 1, а, нижняя кривая свидетельствует о том, что $E(k) \sim k^2$ при k , меньших $100^{-1/2}$, и не зависит от k для волновых чисел, превосходящих это значение.

3.2. Степенные корреляции

Перейдем к рассмотрению спектральной плотности для корреляционной функции степенного вида

$$E(k) = \frac{8\pi\rho_s\tilde{\kappa}^2}{\lambda+2} \int_0^{k^2L^{\lambda+2}/\gamma} \left[L - \left(\frac{\gamma t}{k^2} \right)^{\lambda+2} \right] \left[3c \left(\frac{\gamma t}{k^2} \right)^{\lambda+2} - \frac{2c^2k^2}{(\lambda+1)^2} \left(\frac{\gamma t}{k^2} \right)^{\frac{2(\lambda+1)}{\lambda+2}} \right] \left(\frac{\gamma}{k^2} \right)^{\lambda+2} t^{-(\lambda+1)/(\lambda+2)} \exp(-t) dt, \quad (21)$$

или

$$E(k) = \frac{8\pi\rho_s\tilde{\kappa}^2}{\lambda+2} \int_0^{k^2L^{\lambda+2}/\gamma} \left[L \left(\frac{\gamma}{k^2} \right)^{\lambda+2} t^{-\frac{1}{\lambda+2}} - \frac{\gamma}{k^2} \right] \left[3 - \frac{2c\gamma t}{(\lambda+1)^2} \right] \exp(-t) dt. \quad (22)$$

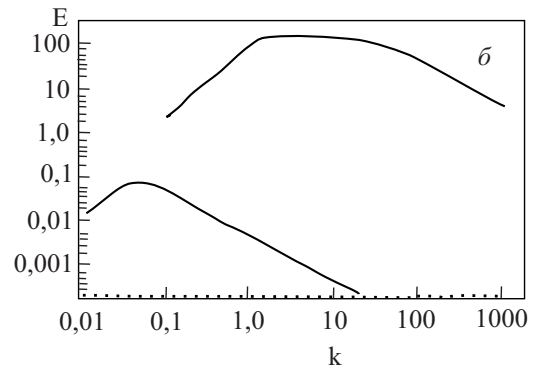
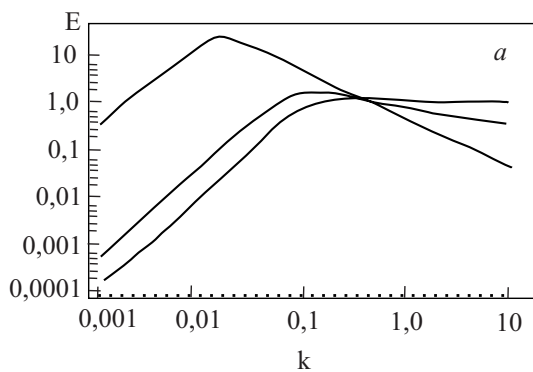


Рис. 1. Спектр энергии для фрактальных линий с различной размерностью Хаусдорфа (а) и «полуфрактальная» вихревая нить в сверхтекучем гелии (б).

3.3. «Реальная» нить

Интеграл (22) является расходящимся. В связи с невозможностью взять интеграл во всем интервале получим его оценки при больших и малых k . Отметим, что объективной физической реальности соответствуют размерности Хаусдорфа из интервала [1; 3], или λ из интервала $[-4/3; 0]$. Отсюда следует, что выражение $(\lambda + 1)/(\lambda + 2)$ всегда меньше 1, поэтому при больших k первый член из первой скобки подынтегрального выражения (22) больше второго. Итак, при $k \gg 1$, $k^2 L^{\lambda+2} / \gamma \rightarrow \infty$, и (22) дает

$$E(k) \sim \frac{8\pi\rho_s \tilde{\kappa}^2}{\lambda + 2} L \left(\frac{\gamma}{k^2} \right)^{\frac{\lambda+1}{\lambda+2}} \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{\lambda+2}} \left[3 - \frac{2c\gamma t}{(\lambda + 1)^2} \right] e^{-t} dt. \quad (23)$$

Интегрирование по t даст некоторую константу, не зависящую от k , в результате

$$E(k) \sim k^{-\frac{2\lambda+1}{\lambda+2}} = k^{H_D - 2}. \quad (24)$$

Выражение (24), полученное из совершенно других предположений, ранее обсуждалось в теории турбулентности (см. [1]). При малых волновых числах нам, как и в случае случайного блуждания, необходимо учесть условие замкнутости вихревой нити. Степенная корреляционная функция в этом случае равна $N(x) = c \{x^\lambda - (2L^\lambda) / [(\lambda + 1)(\lambda + 2)]\}$. Уравнение, определяющее вид энергетического спектра при малых k , совпадает с (13). Как и в случае случайного блуждания, условие замкнутости вихревой нити приводит к тому, что интеграл по U от первого члена во второй скобке обращается в нуль. Таким образом,

$$E(k) \sim 16\pi\rho_s \tilde{\kappa}^2 k^2 \times \int_0^L (U - L) \left[\int_0^U c \left(x^\lambda - \frac{2L^\lambda}{(\lambda + 1)(\lambda + 2)} \right) dx \right]^2 dU, \quad (25)$$

Здесь подынтегральное выражение не зависит от k , поэтому интегрирование даст некоторую величину, не зависящую от волнового числа. Итак, мы получили, что при малых k , $E(k) \sim k^2$, как и в случае случайного блуждания. На рис. 1,а представлены результаты численного интегрирования, верхняя кривая соответствует гладкой нити $\lambda = 0$, в области $k \sim 100^{-1} \text{ см}^{-1}$ происходит изменение зависимости от $E(k) \sim k^2$ при малых k до $E(k) \sim k^{-1}$ при больших k . Для линии без самопересечений наблюдается сходное поведение: $E(k) \sim k^2$ при $k \sim 100^{-3/5}$ и $E(k) \sim k^{-1/3}$ при увеличении k . Отметим, что для этой модели $H_D = 5/3$ и энергетический спектр действительно пропорционален $k^{H_D - 2}$.

«Реальная» вихревая нить является полуфрактальным объектом, т.е. гладкой нитью на масштабах $\xi' - \xi'' \ll R$, имеющей структуру случайного блуждания при увеличении $\xi' - \xi''$. Корреляционная функция для незамкнутой нити задается выражением (16). К сожалению, соответствующее выражение для спектральной плотности в этом случае слишком громоздкое, чтобы выполнить аналитический анализ. Понятно, однако, что область волновых чисел k в этом случае может быть разбита на три части. Первая — это область $k \ll 1/\sqrt{LR}$, соответственно, волновые числа меньше обратного размера области, где локализована вихревая петля. Такие волновые числа описывают дальнейшее течение, и по аналогии с предыдущими случаями здесь справедлив закон равномерного распределения энергии $E(k) \sim k^2$. Область $(1/\sqrt{LR}) \ll k \ll 1/R$ соответствует масштабам большим, чем элементарный шаг R , но меньше, чем размер системы. Понятно, что энергетический спектр не зависит от k , как это должно быть для броуновской линии. При дальнейшем увеличении k , мы приближаемся к масштабам, меньшим элементарного шага R , где фрактальность отсутствует и $E(k) \sim k^{-1}$, как и должно быть для гладкой нити. Результаты численного нахождения энергетического спектра «реальной» вихревой нити подтверждают предыдущие утверждения (см. рис. 1,б), т.е. для нити с параметрами $L = 100$ и $R = 0,01$ — верхняя кривая, и для нити с $L = 100$ и $R = 1$ — нижняя кривая. Можно видеть, как $E(k)$ изменяет свой характер в точках $k = 1/\sqrt{LR} = 1$ и $k \ll 1/R = 100$ для верхней кривой и, соответственно, в точках $k = 1/\sqrt{LR} \sim 0,03$ и $k \ll 1/R = 0,1$ для нижней.

4. Выводы

С использованием гауссовой модели вихревого клубка вычислен энергетический спектр трехмерного случайного поля скорости, индуцируемого хаотическими вихревыми нитями. Предполагается, что нити имеют структуру случайного блуждания (броуновские линии) с различной размерностью Хаусдорфа H_D . Показано, что для фрактальной вихревой линии, характеризующейся величиной H_D , для больших k энергетический спектр $E(k) \sim k^{H_D - 2}$, в то время как для малых k имеет универсальный характер $E(k) \sim k^2$. Представляется необходимым обсудить следующий вопрос: имеет ли размерность Хаусдорфа H_D физический смысл в диапазоне от 1 до 3. Это означает, что показатель степени в энергетическом спектре $E(k)$ пробегает значения от -1 до 1. Таким образом, значение $-5/3$, соответствующее колмогоровскому спектру, не достигается в представленной модели. Причина этого очевидна — в реальном турбулентном потоке вихревые структуры (петли) сильно поляризованы вследствие взаимодействия, в то время как мы вычисляли спектр для свободных петель.

Работа была поддержана грантами РФФИ № 05-08-01375 и 07-02-01124, а также грантом президента РФ NSH-6749.2006.8 поддержки научных школ.

1. U. Frisch, *Turbulence*, Cambridge University Press, Cambridge (1996).
2. A.J. Chorin, *Vorticity and Turbulence*, Springer, Berlin (1994).
3. K.W. Schwarz, *Phys. Rev.* **B38**, 2398 (1988).
4. S.K. Nemirovskii and W. Fiszdon, *Rev. Mod. Phys.* **67**, 37 (1995).
5. Makoto Tsubota, Tsunehiko Araki, and S.K. Nemirovskii, *Phys Rev.* **B62**, 11751 (2000).
6. L.P. Kondaurova, V.A. Andryusheko, and S.K. Nemirovskii, *to be published in JLTP* (2007).
7. W.F. Vinen, *Phys. Rev.* **B61**, 1410 (2000).
8. Г.Е. Воловик, *Письма в ЖЭТФ* **78**, 553 (2003).
9. L. Skrbek, *JETP Letters* **80**, 484 (2004).
10. P.M. Walmsley, A.I. Golov, H.E. Hall, A.A. Levchenko, and W.F. Vinen, *arXiv:cond-mat/0710.1033*, v. 2 (2007).
11. C. Nore, M. Abid, and M.E. Brachet, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 38966 (1997).
12. T. Araki, M. Tsubota, and S.K. Nemirovskii, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 145301 (2002).
13. J. Maurer, and P. Tabeling, *Europhysics Lett.* **43**, 29 (1998).
14. S.K. Nemirovskii, *Phys. Rev* **B57**, 5972 (1998).

Energy spectrum of the velocity field induced by a fractal vortex line in superfluid helium

S.K. Nemirovskii and V.A. Andryuschenko

The energy spectrum $E(k)$ of the three-dimensional velocity field induced by fractal vortex line in superfluid helium is calculated by the use of the Gaussian model of vortex tangle induced by chaotic vortex lines. We studied the cases of various Hausdorff dimension H_D . If the line is a purely fractal object with Hausdorff dimension H_D , the $E(k)$ is a power-like function $E(k) \sim k^{H_D-2}$ for large k , whereas for small k the spectrum has universal character $E(k) \sim k^2$. For very small distance from the vortex line the characteristics are similar to those of a smooth line.

PACS: 67.25.dk Vortices and turbulence ;
98.80.Cq Particle-theory and field-theory models of the early Universe.

Keywords: model of the vortex tangle, fractal vortex line, superfluid helium.