

# «Инфракрасные» особенности в полевой теории сверхтекучести и температурные поправки к скоростям первого и второго звуков в гелии II

Э.А. Пашицкий

*Институт физики, пр. Науки, 46, г. Киев, 03028, Украина*

С.И. Вильчинский, А.В. Чумаченко

*Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко,  
Физический факультет, пр. Глушкова, 2, г. Киев, 03022, Украина  
E-mail: sivil@mail.univ.kiev.ua*

Статья поступила в редакцию 6 декабря 2007 г.

На основе теории возмущений В.Н. Попова, модифицированной для сильновзаимодействующей бозе-системы и свободной от инфракрасных расходимостей, получены поправки высших порядков к собственным энергетическим частям полевой теории сверхтекучести. Показано, что расчет этих поправок сводится к решению уравнений типа кинетических. На основе решений этих уравнений получены температурные поправки к скоростям первого и второго звуков в сверхтекучей бозе-жидкости  $^4\text{He}$ . Проведен расчет температурной зависимости плотности сверхтекучей компоненты бозе-жидкости  $^4\text{He}$  на основе модели сверхтекучей компоненты как суперпозиции «подавленного» за счет взаимодействия одночастичного и интенсивного парного конденсатов.

На основі теорії збурень В.М. Попова, модифікованої на випадок сильної взаємодії між бозонами та вільної від інфрачервоних розбіжностей, отримано поправки вищих порядків до власне енергетичних частин польової теорії надплинності. Показано, що розрахунок цих поправок зводиться до розв'язку рівнянь типу кінетичних. На основі розв'язків цих рівнянь отримано температурні поправки до швидкостей першого та другого звуків в надплинній бозе-рідині  $^4\text{He}$ . Проведено розрахунок температурної залежності густини надплинної компоненти бозе-рідини  $^4\text{He}$  на основі моделі надплинної компоненти як суперпозиції «подавленого» за рахунок взаємодії одночастинкового та інтенсивного парного конденсатів.

PACS: 67.25.D– Сверхтекучая фаза  $^4\text{He}$ ;  
67.25.dk Вихри и турбулентность.

Ключевые слова: инфракрасные расходимости, температурные поправки к скоростям звука, температурная зависимость плотности сверхтекучей компоненты.

## 1. Введение

Построение строгой микроскопической теории сверхтекучести квантовых бозе-жидкостей и, в частности, сверхтекучего (СТ) гелия ( $\text{He II}$ ) с помощью методов квантовой теории поля встречается с целым рядом принципиальных трудностей, таких, например, как «инфракрасная аномалия ангармонизма» [1], которая приводит к неаналитичности собственных энергий  $\Sigma_{ik}(p)$  при  $p \rightarrow 0$  и обращению в нуль аномальной собственной энергии:  $\Sigma_{12}(0) = 0$ .

Эффективный метод преодоления проблемы инфракрасных особенностей диаграмм теории возмущений в рамках микроскопической теории сверхтекучести бозе-жидкости  $^4\text{He}$  был предложен Поповым [2]. С помощью разделения фурье-компонент полевых переменных  $\psi$  на медленные  $\psi_s$  и быстрые  $\psi_f$  относительно некоторого импульса  $q_0$  с последующим континуальным интегрированием по быстрым переменным, в работе [2] был получен эффективный перенормированный функционал квантовомеханического действия  $S_{\text{eff}}$ . Теория возмуще-

ний с использованием такого функционала, записанного в переменных фазы  $\varphi(q)$  и амплитуды  $\pi(q)$  гидродинамических полевых функций, не содержит инфракрасных расходимостей и поэтому является эффективной при расчете низкоэнергетических свойств исследуемой системы. В приближении слабонеидеального бозе-газа в [2] получено выражение для затухания спектра элементарных возбуждений и показано, что процедуру нахождения суммы последовательности главных диаграмм, получаемых в рамках перенормированной теории возмущений, можно свести к решению системы уравнений типа кинетических. Поповым [2] с помощью метода Чепмена–Энскога–Гильберта [3] были найдены решения этих уравнений и показано, что в акустическом приближении эти решения совпадают с выражениями для функций Грина, полюса которых совпадают соответственно со скоростями первого и второго звуков в гелии II при конечных температурах  $T \neq 0$ . При  $T = 0$  эти результаты сводятся к известным результатам Беляева [4].

Следует отметить, что использованная в [2] модель слабонеидеального бозе-газа не совсем адекватна такой сильно-взаимодействующей бозе-системе, как сверхтекучий  $^4\text{He}$ . Поэтому все расчеты, проведенные на основании разработанного в [2] метода нуждаются в уточнении при применении к описанию свойств He II.

В работах [5,6] на основании предложенного в [2] метода эффективного потенциала удалось найти новые гидродинамические функции Грина для бозе-системы с сильным взаимодействием и на основании этих функций Грина во втором порядке теории возмущений рассчитать мнимую часть спектра элементарных возбуждений сверхтекучего  $^4\text{He}$ , определяющую их затухание. При этом термодинамические коэффициенты квадратичной формы  $S_{\text{eff}}$  выражаются через измеряемые физические характеристики системы, такие как скорости первого и второго звуков, плотность системы  $\rho_0$  и сжимаемость конденсата  $d\rho_0/d\mu$  (где  $\mu$  — химический потенциал системы).

В данной работе, которая является продолжением и развитием работ [5–10], изложены основные идеи метода интегрирования по быстрым переменным и приведены результаты расчетов поправок к собственным энергиям и функциям Грина в гидродинамическом приближении, полученных путем суммирования лестничных диаграмм высших порядков перенормированной теории возмущений. Проведенные расчеты при конечных температурах позволили вычислить температурные поправки к скоростям первого и второго звуков, а также температурную зависимость сверхтекучей компоненты на основании модели [8].

## 2. Перенормированная теория возмущений для сильно-взаимодействующей бозе-системы

Как было показано в работе [11], систему сильно-взаимодействующих нейтральных бозонов в объеме

$V = L^3$  с периодическими граничными условиями при температуре  $T$  можно описать с помощью следующего калибровочно-инвариантного квантовомеханического действия:

$$S[\psi^*, \psi, A, J^*, J] = \int_0^\beta d\tau \int d^3x \psi^*(\tau, x) \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - \mu(\tau, x) \right) \psi(\tau, x) + \psi^*(\tau, x) \frac{1}{2m} (\nabla - i\mathbf{A}(\tau, x))^2 \psi(\tau, x) + \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int d^3x \int d^3y U(x-y) |\psi(\tau, x)|^2 |\psi(\tau, y)|^2 + \int_0^\beta d\tau \int d^3x \{ \psi^*(\tau, x) J(\tau, x) + \psi(\tau, x) J^*(\tau, x) \}, \quad (1)$$

где  $\tau$  — мнимое время, изменяющееся в пределах от 0 до обратной температуры  $\beta = 1/k_B T$ . Далее ограничимся рассмотрением только низкотемпературного предела  $\beta \rightarrow \infty$  и будем полагать, что константа Планка  $\hbar = 1$  и константа Больцмана  $k_B = 1$ . Бозонное поле  $\psi(\tau, x)$  является периодическим во времени, а взаимодействие между частицами описывается короткодействующим двухчастичным потенциалом взаимодействия  $U(x-y)$ . Внешние источники  $J(\tau, x)$ ,  $\mu(x)$  и  $\mathbf{A}(\tau, x)$  необходимы для построения различных связанных корреляционных функций путем функционального дифференцирования термодинамического функционала свободной энергии

$$W[\mu, \mathbf{A}, J^*, J] = \ln \int \mathcal{D}\psi^* \mathcal{D}\psi \exp(-S[\psi^*, \psi, \mathbf{A}, J^*, J]). \quad (2)$$

Дифференцируя  $W$  по внешним источникам  $J(\tau, x)$  и  $J^*(\tau, x)$ , можно получить нормальные и аномальные одночастичные и двухчастичные функции Грина. После окончания расчетов источники  $J(\tau, x)$ ,  $J^*(\tau, x)$  и  $\mathbf{A}(\tau, x)$  полагаются равными нулю, а функция  $\mu(\tau, x)$  приравнивается химическому потенциалу системы  $\mu$ . Одночастичные нормальную и аномальную функции Грина получаем следующим образом:

$$G_{11}(x_1, x_2) \equiv -\langle \psi(x_1) \psi^*(x_2) \rangle_c = -\frac{\delta F}{\delta J^*(x_1) \delta J(x_2)}, \quad (3)$$

$$G_{12}(x_1, x_2) \equiv -\langle \psi(x_1) \psi(x_2) \rangle_c = -\frac{\delta F}{\delta J^*(x_1) \delta J^*(x_2)},$$

где  $x_i \equiv \tau, x_i$ ,  $\langle \psi^* \psi \rangle_c = \langle \psi^* \psi \rangle - \langle \psi^* \rangle \langle \psi \rangle$ .

Явление бозе-конденсации удобно описывать с помощью фурье-преобразований полевых переменных

$$\begin{aligned} \psi(\tau, x) &= (\beta\Omega)^{-1/2} \sum_{\omega_s, \mathbf{q}} e^{i(\omega_s \tau + \mathbf{q}x)} \psi(\omega_s, \mathbf{q}), \\ \psi^*(\tau, x) &= (\beta\Omega)^{-1/2} \sum_{\omega_s, \mathbf{q}} e^{-i(\omega_s \tau + \mathbf{q}x)} \psi^*(\omega_s, \mathbf{q}), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\mathbf{q}$  — волновой вектор,  $\omega_s = 2\pi s\beta^{-1}$  — мацубаровская дискретная мнимая частота,  $s$  — целое положительное число,  $\Omega$  — занимаемый системой объем.

Полевые переменные для бозе-системы с конденсатом вводятся с помощью следующего соотношения [11]:

$$\begin{aligned} \psi(q) &= \tilde{\psi}(q) + (\beta\Omega)^{1/2} \delta_{q,0} \alpha, \\ \psi^*(q) &= \tilde{\psi}^*(q) + (\beta\Omega)^{1/2} \delta_{q,0} \alpha^*, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $q = (\omega_s, \mathbf{q})$  — четырехмерный вектор энергии и импульса,  $\alpha$  — произвольная величина. После подстановки (5) в (1) действие может быть разделено на квадратичную по  $\tilde{\psi}$  часть и возмущение, биквадратное по  $\tilde{\psi}$ . Квадратичная часть квантовомеханического действия связана с невозмущенными функциями Грина

$$S_Q = \sum_q \tilde{\psi}^*(q) \tilde{\psi}(q) G_0^{-1}(q), \quad G_0^{-1}(q) = i\omega_s - \mathbf{q}^2 + \mu. \quad (6)$$

Параметр  $\alpha$  получаем из условия  $\langle \tilde{\psi}(q=0) \rangle = 0$ , которое обеспечивает отсутствие элементарных диаграмм только с одной входящей (выходящей) линией. Таким образом, величина  $\alpha$  становится функцией неоднородного внешнего источника  $J(J^*)$  и совпадает с квадратным корнем из плотности конденсата  $\sqrt{n_0}$  в пределе  $J \rightarrow 0$  [11].

Стандартная теория возмущений, построенная на основании действия (1), содержит диаграммы, расходящиеся при интегрировании по области малых значений энергий и импульсов квазичастиц. Как уже отмечалось, метод перенормировки теории возмущений, предложенный Поповым, основан на разделении фурье-образа полевых переменных  $\psi$  на «медленные»  $\psi_s$  и «быстрые»  $\psi_f$ . Фурье-преобразование полевых переменных определяется соотношением (4). Основная идея метода состоит в последовательном интегрировании сначала по «быстрым», а потом по «медленным» полевым переменным с использованием различных схем построения теории возмущений на каждом из этапов. Континуальный интеграл по «быстрым» полевым переменным  $\int \exp\{S\} d\psi_f^* d\psi_f$  может быть представлен как статистическая сумма системы «быстрых» частиц, описываемых полевыми переменными  $\psi_f$  в медленно осциллирующем поле  $\psi_s$ . На втором этапе интегралы (суммы) по импульсам оказываются обрезанными на нижнем пределе, который определяется характерным для каждой системы параметром  $q_0$ . Таким образом решается проблема инфракрасных расходимостей. В дальнейшем оказывается удобным введение новых переменных

— плотности  $n(x, \tau)$  и фазы  $\varphi(x, \tau)$  «медленных» гидродинамических полевых переменных:

$$\begin{aligned} \psi_s(x, \tau) &= \sqrt{n(x, \tau)} \exp[i\varphi(x, \tau)]; \\ \psi_s^*(x, \tau) &= \sqrt{n(x, \tau)} \exp[-i\varphi(x, \tau)]. \end{aligned} \quad (7)$$

После интегрирования по «быстрым» переменным получаем эффективное «гидродинамическое» действие  $S_h[\psi_s^*, \psi_s]$ , зависящее только от медленных переменных [2]. В терминах переменных  $n(q)$  и  $\varphi(q)$  это действие имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} S_h[\pi, \varphi] &= \frac{1}{2\beta\Omega} \sum_q \int \frac{d^d q}{(2\pi)^3} \left\{ - \left( \frac{P_\mu}{m} \mathbf{q}^2 + P_{\mu\mu} \omega_s^2 \right) \varphi(q) \varphi(-q) - \right. \\ &- 2P_{\mu n_0} \omega_s \varphi(q) \pi(-q) + \left. \left( P_{n_0 n_0} - \frac{\mathbf{q}^2}{4mn_0} \right) \pi(q) \pi(-q) \right\} + \\ &+ \frac{1}{(\beta\Omega)^{3/2}} \sum_{q_1 + q_2 + q_3 = 0} \frac{\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2}{2m} \varphi(q_1) \varphi(q_2) \pi(q_3), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\pi(x) = n(x) - n_0(q_0)$ ,  $n_0(q_0) \equiv n_0$  — плотность конденсата, определяемая из условия  $p_{n_0} = 0$ , а коэффициенты  $P_\mu$ ,  $P_{\mu\mu}$ ,  $P_{\mu n_0}$  и  $P_{n_0 n_0}$  определяются термодинамическими первыми и вторыми производными от давления  $p(\mu, n_0) = S_h(\mu, n_0)/\beta\Omega$  по химическому потенциалу  $\mu$  и плотности конденсата  $n_0$ . Квадратичная часть действия определяет невозмущенные функции Грина  $G_0$ , а член третьего порядка по полевым переменным рассматривается как возмущение.

На основании выражения для квантовомеханического действия (8), используя метод функционального интегрирования, в пределе  $T \rightarrow 0$  и  $\beta \rightarrow 0$  можно получить выражения для свободных «гидродинамических» функций Грина в длинноволновой области в пределе слабонеидеального бозе-газа [2]:

$$\begin{aligned} G_0(q) &= \begin{pmatrix} g_{\pi\pi}(q) & g_{\pi\varphi}(q) \\ g_{\varphi\pi}(q) & g_{\varphi\varphi}(q) \end{pmatrix} = \\ &= - \begin{pmatrix} \frac{P_\mu}{m} \mathbf{q}^2 + P_{\mu\mu} \omega_s^2 & P_{\mu n_0} \omega_s \\ -P_{\mu n_0} \omega_s & -P_{n_0 n_0} + \frac{\mathbf{q}^2}{4mn_0} \end{pmatrix} \frac{1}{D(q)}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} D(q) &= \left( \frac{\mathbf{q}^2}{2m} \right)^2 \frac{P_\mu}{n_0} + \frac{P_{\mu\mu}}{4mn_0} \mathbf{q}^2 \omega_s^2 - \\ &- (P_{n_0 n_0} P_{\mu\mu} - P_{n_0 \mu}^2) \left( \omega_s^2 + \frac{1}{m} \frac{P_{n_0 n_0} P_\mu}{P_{n_0 n_0} P_{\mu\mu} - P_{n_0 \mu}^2} \mathbf{q}^2 \right), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{1}{m} \frac{p_{n_0 n_0} p_\mu}{p_{n_0 n_0} p_{\mu\mu} - p_{\mu n_0}^2} = \frac{n}{m} \frac{dn}{d\mu} = \frac{dp}{d\mu} = c^2, \quad p_\mu = n \quad (11)$$

(здесь  $c^2$  — квадрат скорости первого звука,  $n$  — плотность системы).

На основании выражений (9), (10), а также соотношения, которое связывает между собой термодинамические производные и определяет сжимаемость конденсата,

$$\frac{p_{\mu n_0}}{p_{n_0 n_0}} = - \frac{dn_0}{d\mu}, \quad (12)$$

в работе [5] с использованием инвариантности соотношений относительно процедуры перенормировки (см. работу [11]) были рассчитаны «гидродинамические» функции Грина для сильновзаимодействующей бозе-системы:

$$G_0(q) = - \begin{pmatrix} - \left( \frac{dn_0}{d\mu} \right)^2 \omega_s^2 & \frac{dn_0}{d\mu} \omega_s \\ - \frac{dn_0}{d\mu} \omega_s & 1 \end{pmatrix} \frac{m}{n} \frac{c^2}{\omega_s^2 + c^2 \mathbf{q}^2} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_{n_0 n_0} & \frac{1}{4nn_0} \frac{1}{p_{n_0 n_0}} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

В дальнейшем эти функции будут использованы при расчетах вкладов высших порядков перенормированной теории возмущений в собственно энергетические части.

### 3. Решение кинетических уравнений в акустическом приближении

Для микроскопического описания сильновзаимодействующей бозе-системы будем использовать схему теории возмущений [2], позволяющую вычислить функции Грина  $G$  слабонеидеального бозе-газа ниже точки бозе-конденсации в гидродинамической области (при малых энергиях и импульсах). Используя метод континуального интегрирования, выделим последовательность диаграмм теории возмущений, которые дают основной вклад в гидродинамическую асимптотику функций Грина. Искомые поправки от высших порядков теории возмущений к собственно энергетическим частям  $\Sigma_{\phi\pi}(q)$ ,  $\Sigma_{\phi\phi}(q)$  и  $\Sigma_{\pi\pi}(q)$  можно получить, проводя суммирование диаграмм, изображенных на рис. 1.

Первое диаграммное равенство выражает собственно энергетическую часть  $\Sigma$  через вклады диаграмм, у которых нельзя отделить вход и выход путем разрыва двух внутренних линий диаграммы (этот

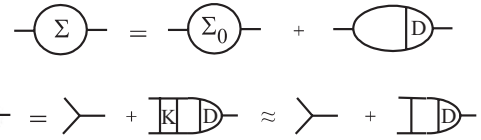


Рис. 1. Диаграммные равенства для собственно энергетической части и вершинной функции, которые в лестничном приближении сводятся к уравнениям типа кинетических.

вклад обозначен через  $\Sigma_0$ ) и полную вершинную часть  $D$ . Второе равенство на рис. 1 представляет собой уравнение для вершинной части и определяет «лестничное» приближение для неприводимого четырехполюсника  $K$ . Внутренним линиям диаграмм на рис. 1 соответствуют полные функции Грина  $\langle g_{\phi\phi} \rangle$ ,  $\langle g_{\pi\pi} \rangle$  и  $\langle g_{\phi\pi} \rangle$ , определяемые соотношением (13). Для конкретизации схем, изображенных на рис. 1, необходимо произвести суммирование по всевозможным внутренним линиям диаграмм. Вершинные части отличаются по типам линий, которые присоединены к их входу и выходу. Всего имеется шесть различных вершинных частей:  $D_{\phi\phi,\phi}$ ;  $D_{\phi\pi,\phi}$ ;  $D_{\pi\pi,\phi}$ ;  $D_{\phi\pi,\pi}$ ;  $D_{\pi\pi,\pi}$ ;  $D_{\phi\phi,\pi}$  (здесь первые два индекса у  $D$  указывают на то, какие линии присоединены к внутреннему входу диаграмм  $D$ , а последний — тип линии, присоединенной к внешнему выходу).

Данные диаграммные равенства представляют собой главную последовательность диаграмм, нахождение суммы которых, как было показано в работе [2], сводится к решению уравнений типа кинетических. Необходимо отметить, что такой метод работает и в том случае, когда энергетический спектр существенно зависит от температуры и нельзя произвести разделение гамильтониана системы на основную часть и возмущение.

Используя выражение для мнимой части спектра  $\Delta(\mathbf{q})$  [6]

$$\Delta(\mathbf{q}_1) = \frac{9mc^2(1-e^{-\beta\epsilon_1})}{128\pi^2 n^3} \left( \frac{dn_0}{d\mu} \right)^2 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3 \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \times \\ \times n_2 n_3 [2\delta(1+2-3)e^{\beta\epsilon_3} + \delta(1+2-3)e^{\beta\epsilon_1}], \quad (14)$$

после интегрирования по внутренним импульсам и суммирования по внутренним частотам, можно получить выражения для элементов собственно энергетической матрицы (см. Приложение).

Переходя в уравнениях от суммирования к интегрированию по частотам, с помощью аналитического продолжения в комплексную плоскость с соответствующей заменой переменных в уравнениях (П.7) можно показать, что в эти уравнения входит определенная одинаковая комбинация вершинных функций, которая содержит произведение полюсов только двух функ-

ций Грина и вычисляется следующим образом при малых передаваемых импульсах  $\mathbf{q}$ :

$$\int [x - \varepsilon(\mathbf{q}_1) + i\Delta(\mathbf{q}_1)]^{-1} [x + E - \varepsilon(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}) - i\Delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q})]^{-1} dx \approx \frac{2\pi i}{Z}, \quad (15)$$

где

$$Z = E - 2(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q})\varepsilon'_1 + 2i\Delta(\mathbf{q}_1), \quad \varepsilon'_1 = \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{q}_1)}{\partial \mathbf{q}_1^2}. \quad (16)$$

После интегрирования по энергетической переменной получаем следующие выражения для комбинаций вершинных функций, которые встречаются во всех уравнениях:

$$h(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}, E) \equiv \frac{1}{2Z} \frac{mc^2}{n} \left\{ \frac{dn_0}{d\mu} (D_{\phi\pi, \phi}^i - D_{\pi\phi, \phi}^i) + i\varepsilon_1^{-1} D_{\phi\phi, \phi}^i + ic^2 \left( \frac{dn_0}{d\mu} \right)^2 \mathbf{q}_1^2 \varepsilon_1^{-1} D_{\pi\pi, \phi}^i \right\}, \quad (17)$$

$$g(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}, E) \equiv -\frac{1}{2Z} \frac{mc^2}{n} \left\{ i \frac{dn_0}{d\mu} (D_{\phi\pi, \pi}^1 - D_{\pi\phi, \pi}^1) + \varepsilon_1^{-1} D_{\phi\phi, \pi}^1 + c^2 \left( \frac{dn_0}{d\mu} \right)^2 \mathbf{q}_1^2 \varepsilon_1^{-1} D_{\pi\pi, \pi}^1 \right\}. \quad (18)$$

Выделенные комбинации  $h(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}, E)$  и  $g(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}, E)$  удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} [E - 2\varepsilon'_1(\mathbf{q}\mathbf{q}_1)] \frac{n}{mc^2} \left( \frac{dn_0}{d\mu} \right)^{-1} h + iI(h) &= \frac{1}{m}(\mathbf{q}\mathbf{q}_1), \\ [E - 2\varepsilon'_1(\mathbf{q}\mathbf{q}_1)] \frac{n}{mc^2} \left( \frac{dn_0}{d\mu} \right)^{-1} g + iI(g) &= \varepsilon(\mathbf{q}_1). \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь

$$\begin{aligned} I(h) &= -\frac{9(1 - e^{-\beta\varepsilon_1})}{64m\pi^2 n^2} \left( \frac{dn_0}{d\mu} \right)^2 \int d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 n_2 n_3 \times \\ &\times [2\delta(1 + 2 - 3)e^{\beta\varepsilon_1} (h_1 + h_2 - h_3) + \\ &+ \delta(1 + 2 - 3)e^{\beta\varepsilon_1} (h_1 - h_2 - h_3)], \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} I(g) &= -\frac{9(1 - e^{-\beta\varepsilon_1})}{64m\pi^2 n^2} \left( \frac{dn_0}{d\mu} \right)^2 \int d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 n_2 n_3 \times \\ &\times [2\delta(1 + 2 - 3)e^{\beta\varepsilon_1} (g_1 + g_2 - g_3) + \\ &+ \delta(1 - 2 - 3)e^{\beta\varepsilon_1} (g_1 - g_2 - g_3)], \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$h_i \equiv h(\mathbf{q}, \mathbf{q}_i, E), \quad g_i \equiv g(\mathbf{q}, \mathbf{q}_i, E), \quad n_i = (e^{\beta\varepsilon_i} - 1)^{-1},$$

$$\delta(1 \pm 2 - 3) = \delta(\mathbf{q}_1 \pm \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3) \delta(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 - \varepsilon_3).$$

Полученные уравнения (19) по своей сути эквивалентны линеаризированным кинетическим уравнениям, в которых выражения  $I(h)$  и  $I(g)$  играют роль интегралов столкновений, а неоднородные члены  $(\mathbf{q}\mathbf{q}_1)/m$  и  $\varepsilon(\mathbf{q}_1)$  являются интегралами движения, обрабатываемыми в нуль интегралы столкновений. Заметим, что система (19) аналогична системе уравнений, полученных в работе [2] в приближении слабонеидеального бозе-газа, но это сходство носит формальный характер, так как структуры вершинных функций, а также функции  $Z$ , которые входят в определение функций  $h$  и  $g$ , существенно отличны в случае слабонеидеального бозе-газа и в рассматриваемом здесь случае сильно взаимодействующей бозе-системы.

Уравнения (19) можно решить, используя метод Чепмена-Энскога-Гильберта [3], согласно которому решение уравнений (19) ищется в виде суммы линейных комбинаций интегралов движения  $(\mathbf{q}\mathbf{q}_1)/m$  и  $\varepsilon(\mathbf{q}_1)$  и малых по сравнению с ними добавок  $\delta h$  и  $\delta g$ :

$$h = a\varepsilon(\mathbf{q}) + b(\mathbf{q}\mathbf{q}_1) + \delta h, \quad g = a_1\varepsilon(\mathbf{q}_1) + b_1(\mathbf{q}\mathbf{q}_1) + \delta g. \quad (22)$$

Пренебрегая малыми поправками  $\delta h$  и  $\delta g$  в случае, когда они не входят в интегральные члены, и используя условие ортогональности интегралов столкновений и интегралов движения с весом

$$\frac{\exp[\beta\varepsilon(\mathbf{q}_1)]}{[\exp[\beta\varepsilon(\mathbf{q}_1)] - 1]^2}, \quad (23)$$

получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов в  $a$ ,  $a_1$ ,  $b$ ,  $b_1$ . В результате получаем решение системы уравнений (19) в первом (акустическом) приближении:

$$h = \frac{\frac{2}{3} \frac{\langle\langle \varepsilon \varepsilon_1 \mathbf{q}^2 \rangle\rangle}{\langle\langle \varepsilon^2 \rangle\rangle} (\mathbf{q})^2 \varepsilon(\mathbf{q}) + E(\mathbf{q}\mathbf{q}_1)}{m(E^2 - u^2 \mathbf{q}^2)},$$

$$g = \frac{E\varepsilon(\mathbf{q}) - 2 \frac{\langle\langle \varepsilon \varepsilon_1 \mathbf{q}^2 \rangle\rangle}{\langle\langle \mathbf{q}^2 \rangle\rangle} (\mathbf{q}\mathbf{q}_1)}{E^2 - u^2 \mathbf{q}^2}, \quad (24)$$

где

$$u^2 \equiv \frac{4}{3} \frac{\langle\langle \varepsilon \varepsilon_1 \mathbf{q}^2 \rangle\rangle}{\langle\langle \mathbf{q}^2 \rangle\rangle \langle\langle \varepsilon^2 \rangle\rangle}, \quad (25)$$



а двойные угловые скобки  $\langle\langle \dots \rangle\rangle$  означают интегрирование с весом (23):

$$\langle\langle A \rangle\rangle \equiv \frac{\int A(\mathbf{q}_1) \exp[\beta \varepsilon(\mathbf{q}_1)] (\exp[\beta \varepsilon(\mathbf{q}_1)] - 1)^{-2} d\mathbf{q}_1}{\int \exp[\beta \varepsilon(\mathbf{q}_1)] (\exp[\beta \varepsilon(\mathbf{q}_1)] - 1)^{-2} d\mathbf{q}_1}. \quad (26)$$

#### 4. Расчет поправок к собственным энергетическим частям и скоростям звуков

Выражения для собственных энергетических частей  $\Sigma_{\text{ф}\phi}$ ,  $\Sigma_{\text{ф}\pi}$ ,  $\Sigma_{\text{п}\phi}$  и  $\Sigma_{\text{п}\pi}$  в терминах функций  $h$  и  $g$  получаются непосредственно из выражений (П.1) и (П.6) (см. Приложение). Например, для  $\Sigma_{\text{ф}\phi}$  после подстановки всех функций Грина получается следующее равенство:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{ф}\phi} = & \frac{T^2}{(2\pi)^6} \left( \frac{dn_0}{d\mu} \right) \frac{c^4}{n^2} \int d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3 (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}_2) \eta(\mathbf{q}) P(q) \times \\ & \times \sum_{\omega_2, \omega_3} \left\{ \left( \frac{dn_0}{d\mu} \right) [D_{\text{ф}\pi, \phi}(i\omega_2)^2 + D_{\text{п}\phi, \phi} i\omega_2 i\omega_3] + \right. \\ & \left. + iD_{\text{п}\pi, \phi} \left( \frac{dn_0}{d\mu} \right)^2 i\omega_2 (i\omega_3)^2 - iD_{\text{ф}\phi, \phi} i\omega_3 \right\}. \quad (27) \end{aligned}$$

Здесь необходимо помнить, что вершинные функции  $D_{\text{ф}\pi, \phi}$  и  $D_{\text{п}\phi, \phi}$  содержат элементарные невозмущенные части, которые также дают вклад в собственные энергетические части. После учета законов сохранения частот и аналитического продолжения внутренней частоты в область действительных значений, вершинные функции  $D$  опять распадаются на  $D^i$  и  $D^e$  на берегах разрезов, после интегрирования которых получаем

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{ф}\phi} = & \beta \left\langle \left\langle \frac{(\mathbf{q}\mathbf{q}_1)}{m} \left( \frac{(\mathbf{q}\mathbf{q}_1)}{m} - Eh \right) \right\rangle \right\rangle + \\ & + \frac{\mathbf{q}^2}{2(2\pi)^3 m^2 c^2} \int n_1 \varepsilon_1 d\mathbf{q}_1 \approx \frac{\beta \langle\langle \mathbf{q}^2 \rangle\rangle}{4m^2} \mathbf{q}^2 - \beta E \left\langle \left\langle \frac{(\mathbf{q}\mathbf{q}_1)}{m} h \right\rangle \right\rangle. \quad (28) \end{aligned}$$

Аналогично можно получить выражения для других собственных энергетических частей:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{ф}\phi} &= \frac{\beta \langle\langle \mathbf{q}^2 \rangle\rangle}{4m^2} \mathbf{q}^2 - \beta E \left\langle \left\langle \frac{\mathbf{q}\mathbf{q}_1}{m} h \right\rangle \right\rangle, \\ \Sigma_{\text{ф}\pi} &= -\Sigma_{\text{п}\phi} = \frac{\beta E}{2n_0} \left\langle \left\langle \frac{\mathbf{q}\mathbf{q}_1}{m} g \right\rangle \right\rangle, \\ \Sigma_{\text{п}\pi} &= \frac{1}{4n_0^2} \left( \frac{5}{4} \beta \langle\langle \varepsilon^2 \rangle\rangle - \beta E \langle\langle \varepsilon_1 g \rangle\rangle \right). \quad (29) \end{aligned}$$

Используя найденную в первом (акустическом) приближении собственно энергетическую матрицу  $\Sigma(q)$  и известное соотношение

$$\det [G_0^{-1}(\mathbf{q}, \omega) - \Sigma(\mathbf{q}, \omega)] = 0,$$

получаем в явном виде уравнение для определения спектра:

$$\left[ E^2 - c_1^2 \mathbf{q}^2 \left( 1 + \frac{37}{16} \frac{\rho_n}{\rho} \right) \right] (E^2 - c_2^2 \mathbf{q}^2) - \left( \frac{11}{4} \frac{\rho_n}{\rho} \right) E^2 c_0^2 \mathbf{q}^2 = 0, \quad (30)$$

где  $c_1^2 = \frac{1}{m} \frac{\partial p}{\partial \rho}$ ,  $\rho_n = \frac{\beta \langle\langle \mathbf{q}^2 \rangle\rangle}{3m}$ ,  $c_2^2 = u^2 = \frac{4}{3} \frac{\langle\langle \varepsilon \varepsilon_1 \mathbf{q}^2 \rangle\rangle}{\langle\langle \mathbf{q}^2 \rangle\rangle \langle\langle \varepsilon^2 \rangle\rangle}$ .

Решение этого уравнения находим, используя экспериментально установленное при  $T=0$  соотношение между скоростями первого и второго звуков  $c_2 = c_1 / \sqrt{3}$ , которые распространяются в сверхтекучем гелии:

$$\begin{aligned} E_1^2(\mathbf{q}) &= c_1^2 \left( 1 + \frac{29}{16} \frac{\rho_n}{\rho} \right) \mathbf{q}^2, \\ E_2^2(\mathbf{q}) &= \frac{c_1^2}{3} \left( 1 - \frac{33}{8} \frac{\rho_n}{\rho} \right) \mathbf{q}^2. \quad (31) \end{aligned}$$

Второе из этих решений совпадает с выражением, полученным в [1]. Это выражение качественно правильно описывает температурную зависимость скорости второго звука в интервале температур от 0 до 1 К, в котором, как известно [12], экспериментально найденная скорость второго звука  $c_2$  имеет минимум.

Полученный результат свидетельствует о том, что разработанный здесь подход можно использовать для описания поведения бозе-жидкости только в области температур  $T < 1$  К, учитывая при этом вклад только одного типа коллективных возбуждений — фононов. Для корректного описания поведения исследуемой системы при температурах  $T > 1$  К и определения более точно температурной зависимости скорости второго звука необходима модификация перенормированной теории возмущений с учетом вкладов других типов возбуждений (в частности, ротонов).

#### 5. Расчет температурной зависимости плотности сверхтекучей компоненты бозе-жидкости $^4\text{He}$

На основании полученных в предыдущих разделах результатов можно произвести расчет температурной зависимости плотности сверхтекучей компоненты бозе-жидкости  $^4\text{He}$ . Расчет проведем на основании предложенной в [8–10] самосогласованной микроскопической модели сверхтекучей нерелятивистской бозе-жидкости  $^4\text{He}$  с подавленным за счет взаимодействия одночастичным бозе-эйнштейновским конден-

сатом и с интенсивным парным когерентным конденсатом, когерентная суперпозиция которых составляет микрооснову сверхтекучей плотности. Для этого представим выражения для модифицированных функций Грина (13), и выражения для скоростей первого и второго звуков (31) в соответствующие соотношения, полученные в [8–10], и воспользуемся предложенной в

тех же работах итерационной схемой расчета. При этом парное взаимодействие между бозонами выбираем в виде регуляризованного потенциала Азиза [13], который наиболее точно описывает взаимодействие между атомами  $^4\text{He}$ :

$$U_A(r) = \begin{cases} A \exp(-\alpha r - \beta r^2) - \exp[-(r_0/r - 1)^2] \sum_{k=0}^2 c_{2k+6} r^{-2k-6}, & r < r_0, \\ A \exp(-\alpha r - \beta r^2) - \sum_{k=0}^2 c_{2k+6} r^{-2k-6}, & r \geq r_0, \end{cases} \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} A &= 1,8443101 \cdot 10^5 \text{ К}, \quad \alpha = 10,43329537 \text{ \AA}^{-1}, \\ \beta &= 2,27965105 \text{ \AA}^{-2}, \quad c_6 = 1,36745214 \text{ К} \cdot \text{\AA}^6, \\ c_8 &= 0,42123807 \text{ К} \cdot \text{\AA}^8, \quad c_{10} = 0,17473318 \text{ К} \cdot \text{\AA}^{10}. \end{aligned}$$

Результаты численных расчетов температурной зависимости плотности сверхтекучей компоненты бозе-жидкости  $^4\text{He}$  в области температур от нуля до точки  $\lambda$ -перехода изображены на рис. 2.

В модели [8] сверхтекучий параметр порядка для  $T \neq 0$  определен следующим образом:

$$\tilde{\Sigma}_{12}(0, T) = \Psi_0(T) + \Psi_s(T) \frac{\rho_s(T)}{\rho}, \quad (33)$$

где

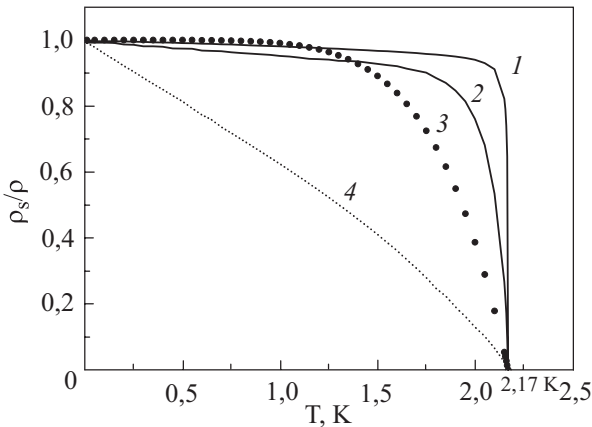


Рис. 2. Температурные зависимости плотности сверхтекучей компоненты бозе-жидкости  $^4\text{He}$ , полученные Пашицким и Вильчинским [8,9] на основании модельных потенциалов взаимодействия и эмпирических данных о скорости второго звука (кривая 1); в данной работе (2); экспериментальная зависимость, полученная Андроникашвили [14] (3); результат, полученный Гинзбургом и Собяниным [15] (4).

$$\Psi_0(T) = -\frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \tilde{V}(\mathbf{p}) \left[ \frac{A_{12} - D_{12}}{c_1 \mathbf{p}} \text{cth} \left( \frac{c_1 \mathbf{p}}{2T} \right) + \frac{B_{12}}{c_2 \mathbf{p}} \text{cth} \left( \frac{c_2 \mathbf{p}}{2T} \right) \right], \quad (34)$$

$$\Psi_s(T) = -\frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \tilde{V}(\mathbf{p}) \left[ \frac{D_{12}}{c_1 \mathbf{p}} \text{cth} \left( \frac{c_1 \mathbf{p}}{2T} \right) - \frac{B_{12}}{c_2 \mathbf{p}} \text{cth} \left( \frac{c_2 \mathbf{p}}{2T} \right) \right], \quad (35)$$

а температурная зависимость плотности сверхтекучей компоненты определяется как

$$\frac{\rho_s(T)}{\rho} = \frac{\Psi_0(T)}{\tilde{V}(0)n} \left[ 1 - \frac{\Psi_s(T)}{\tilde{V}(0)n} \right]^{-1}, \quad (36)$$

где  $\tilde{V}(\mathbf{q})$  — фурье-образ перенормированного («экранированного») потенциала взаимодействия.

Рассчитанная в работе температурная зависимость сверхтекучей компоненты в интервале температур  $T < 1,25 \text{ К}$  качественно согласуется с экспериментально полученной зависимостью [14]. Различие между полученной и экспериментальной кривыми в интервале  $T > 1,25 \text{ К}$  обусловлено тем, что использованные при расчетах выражения для модифицированных функций Грина (13) и скоростей звуков (31) получены в пределе  $T \rightarrow 0$  и фактически учитывают вклад только фононной части спектра элементарных возбуждений.

## 6. Заключение

Метод расчета суммы диаграмм типа лестничных, полученных в высших порядках перенормированной «гидродинамической» теории возмущений, был предложен Поповым [2]. В данной работе на основе этого метода была рассчитана сумма диаграмм такого типа для модифицированной квантово-полевой теории возмущений, построенной для сильновзаимодействующей бозе-системы. Для этого были выведены уравнения типа кинетических и получены их решения. На

основе этих решений проведены расчеты температурных поправок к скоростям первого и второго звуков. Полученные выражения для скоростей звуков совпадают с полученными в [2] (выражение для скорости первого звука) и в [1] (выражение для скорости второго звука).

Используя эти результаты, в данной работе на основе модели Пашицкого–Вильчинского [8] проведен численный расчет температурной зависимости плотности сверхтекучей компоненты с использованием потенциала Азиза, который отвечает реальному взаимодействию между атомами  $^4\text{He}$ . Для расчета температурных зависимостей также были использованы полученные в предыдущей работе [5] выражения для модифицированных функций Грина. Полученная температурная зависимость сравнивается с результатами [8] с использованием модельных потенциалов взаимодействия. Полученные результаты также сравниваются с экспериментальными данными, полученными Андроникашвили [14] и в рамках теории Гинзбурга [15].

Один из авторов (Э.А.П.) выражает благодарность программе УНТЦ за частичное финансирование данной работы (проект № 3718, 2007-9).

## 7. Приложение

Выражения для собственно энергетических частей и вершинных функций в переменных плотности и фазы могут быть получены на основе модифицированной теории возмущений [5]. В частности, выражения для разных собственно энергетических частей имеют вид

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{ф}\phi}(q_1) &= \frac{T^2}{(2\pi)^6 m^2} \int d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3 (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}_1) \sum_{\omega_2, \omega_3} \eta(q_1, q_2, q_3) \times \\ &\times [D_{\text{ф}\pi, \phi}(q_1, q_2, q_3) g_{\pi\pi}(\mathbf{q}_2, i\omega_2) g_{\phi\phi}(\mathbf{q}_3, i\omega_3) + \\ &+ D_{\text{п}\phi, \phi}(q_1, q_2, q_3) g_{\pi\phi}(\mathbf{q}_2, i\omega_2) g_{\phi\pi}(\mathbf{q}_3, i\omega_3) + \\ &+ D_{\text{л}\pi, \phi}(q_1, q_2, q_3) g_{\phi\pi}(\mathbf{q}_2, i\omega_2) g_{\pi\pi}(\mathbf{q}_3, i\omega_3) + \\ &+ D_{\text{ф}\phi, \phi}(q_1, q_2, q_3) g_{\phi\phi}(\mathbf{q}_2, i\omega_2) g_{\pi\phi}(\mathbf{q}_3, i\omega_3)], \\ \Sigma_{\text{п}\phi}(q_1) &= \frac{T^2}{(2\pi)^6 m^2} \int d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3 (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2) \sum_{\omega_2, \omega_3} \eta(q_1, q_2, q_3) \times \\ &\times [D_{\text{ф}\pi, \pi}(q_1, q_2, q_3) g_{\pi\pi}(\mathbf{q}_2, i\omega_2) g_{\phi\phi}(\mathbf{q}_3, i\omega_3) + \\ &+ D_{\text{п}\phi, \pi}(q_1, q_2, q_3) g_{\pi\phi}(\mathbf{q}_2, i\omega_2) g_{\phi\pi}(\mathbf{q}_3, i\omega_3) + \\ &+ D_{\text{л}\pi, \pi}(q_1, q_2, q_3) g_{\phi\pi}(\mathbf{q}_2, i\omega_2) g_{\pi\pi}(\mathbf{q}_3, i\omega_3) + \\ &+ D_{\text{ф}\phi, \pi}(q_1, q_2, q_3) g_{\phi\phi}(\mathbf{q}_2, i\omega_2) g_{\pi\phi}(\mathbf{q}_3, i\omega_3)], \\ \Sigma_{\text{л}\pi}(q_1) &= \frac{T^2}{(2\pi)^6 m^2} \int d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3 (\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_3) \sum_{\omega_2, \omega_3} \eta(q_1, q_2, q_3) \times \\ &\times [D_{\text{ф}\pi, \phi}(q_1, q_2, q_3) g_{\pi\pi}(\mathbf{q}_2, i\omega_2) g_{\phi\phi}(\mathbf{q}_3, i\omega_3) + \\ &+ D_{\text{п}\phi, \phi}(q_1, q_2, q_3) g_{\pi\phi}(\mathbf{q}_2, i\omega_2) g_{\phi\pi}(\mathbf{q}_3, i\omega_3) + \\ &+ D_{\text{л}\pi, \pi}(q_1, q_2, q_3) g_{\phi\pi}(\mathbf{q}_2, i\omega_2) g_{\pi\pi}(\mathbf{q}_3, i\omega_3) + \\ &+ D_{\text{ф}\phi, \pi}(q_1, q_2, q_3) g_{\phi\phi}(\mathbf{q}_2, i\omega_2) g_{\pi\phi}(\mathbf{q}_3, i\omega_3)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ D_{\text{л}\pi, \phi}(q_1, q_2, q_3) g_{\phi\pi}(\mathbf{q}_2, i\omega_2) g_{\pi\pi}(\mathbf{q}_3, i\omega_3) + \\ &+ D_{\text{ф}\phi, \phi}(q_1, q_2, q_3) g_{\phi\phi}(\mathbf{q}_2, i\omega_2) g_{\pi\phi}(\mathbf{q}_3, i\omega_3)], \\ \Sigma_{\text{л}\pi}(q_1) &= \frac{T^2}{(2\pi)^6 m^2} \int d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3 (\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_3) \sum_{\omega_2, \omega_3} \eta(q_1, q_2, q_3) \times \\ &\times [D_{\text{ф}\pi, \pi}(q_1, q_2, q_3) g_{\pi\pi}(\mathbf{q}_2, i\omega_2) g_{\phi\phi}(\mathbf{q}_3, i\omega_3) + \\ &+ D_{\text{п}\phi, \pi}(q_1, q_2, q_3) g_{\pi\phi}(\mathbf{q}_2, i\omega_2) g_{\phi\pi}(\mathbf{q}_3, i\omega_3) + \\ &+ D_{\text{л}\pi, \pi}(q_1, q_2, q_3) g_{\phi\pi}(\mathbf{q}_2, i\omega_2) g_{\pi\pi}(\mathbf{q}_3, i\omega_3) + \\ &+ D_{\text{ф}\phi, \pi}(q_1, q_2, q_3) g_{\phi\phi}(\mathbf{q}_2, i\omega_2) g_{\pi\phi}(\mathbf{q}_3, i\omega_3)], \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

где параметр

$$\begin{aligned} \eta(q_1, q_2, q_3) &\equiv \frac{1}{2} [\delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3) \delta_{\omega_1 + \omega_2, +\omega_3} + \\ &+ \delta(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3) \delta_{\omega_1 - \omega_2, -\omega_3} + \delta(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3) \delta_{\omega_1 - \omega_2, \omega_3}] \end{aligned}$$

фиксирует существование только восьми элементарных вершинных частей, которые отличаются лишь направлением входящих и выходящих линий, присоединенных к вершине. Необходимо отметить, что среди них существует всего четыре топологически различных вершинных функции, которые отличаются друг от друга изменением направления разных линий, присоединенных к диаграмме.

Выражения (П.1) содержат восемь разных вершинных функций:  $D_{\text{ф}\pi, \phi}$ ,  $D_{\text{п}\phi, \phi}$ ,  $D_{\text{л}\pi, \phi}$ ,  $D_{\text{ф}\phi, \phi}$ ,  $D_{\text{ф}\pi, \pi}$ ,  $D_{\text{п}\phi, \pi}$ ,  $D_{\text{л}\pi, \pi}$  и  $D_{\text{ф}\phi, \pi}$ . В качестве примера приведем уравнения для вершинных функций с присоединенной внешней  $\phi$ -линией:

$$\begin{aligned} D_{\text{ф}\pi, \phi} &= d + \frac{T^3}{(2\pi)^9} \int d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3 d^2 \sum_{\omega_1, \omega_2, \omega_3} \{g_{\pi\phi}(q_1) \times \\ &\times [(g_{\phi\phi}(q_2) g_{\phi\pi}(q_3) D_{\text{ф}\pi, \phi} + g_{\phi\pi}(q_2) g_{\phi\phi}(q_3) D_{\text{п}\phi, \phi} + \\ &+ g_{\phi\pi}(q_2) g_{\phi\pi}(q_3) D_{\text{л}\pi, \phi} + g_{\phi\phi}(q_2) g_{\phi\phi}(q_3) D_{\text{ф}\phi, \phi}] + \\ &+ d^2 g_{\phi\phi}(q_1) [g_{\pi\phi}(q_2) g_{\phi\pi}(q_3) D_{\text{ф}\pi, \phi} + \\ &+ g_{\pi\pi}(q_2) g_{\phi\phi}(q_3) D_{\text{п}\phi, \phi} + g_{\pi\pi}(q_2) g_{\phi\pi}(q_3) D_{\text{л}\pi, \phi} + \\ &+ g_{\pi\phi}(q_2) g_{\phi\phi}(q_3) D_{\text{ф}\phi, \phi}]\}, \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

$$\begin{aligned} D_{\text{п}\phi, \phi} &= d + \frac{T^3}{(2\pi)^9} \int d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3 d^2 \sum_{\omega_1, \omega_2, \omega_3} \{g_{\phi\pi}(q_1) \times \\ &\times [g_{\phi\phi}(q_2) g_{\phi\pi}(q_3) D_{\text{ф}\pi, \phi} + g_{\phi\pi}(q_2) g_{\phi\phi}(q_3) D_{\text{п}\phi, \phi} + \\ &+ g_{\phi\pi}(q_2) g_{\phi\pi}(q_3) D_{\text{л}\pi, \phi} + g_{\phi\phi}(q_2) g_{\phi\phi}(q_3) D_{\text{ф}\phi, \phi}] + \\ &+ d^2 g_{\phi\phi}(q_1) [g_{\phi\phi}(q_2) g_{\pi\pi}(q_3) D_{\text{ф}\pi, \phi} + \\ &+ g_{\phi\pi}(q_2) g_{\pi\phi}(q_3) D_{\text{п}\phi, \phi} + g_{\phi\pi}(q_2) g_{\pi\pi}(q_3) D_{\text{л}\pi, \phi} + \\ &+ g_{\phi\phi}(q_2) g_{\pi\phi}(q_3) D_{\text{ф}\phi, \phi}]\}, \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$



$$D_{\pi\pi,\varphi} = \frac{T^3}{(2\pi)^9} \int d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3 d^2 \sum_{\omega_1, \omega_2, \omega_3} \left\{ g_{\varphi\varphi}(q_1) \times \right. \\ \left. + i \left( \frac{dn_0}{d\mu} \right)^2 i\omega_2 i\omega_3 D_{\pi\pi,\varphi} + D_{\varphi\varphi,\varphi} \right\}, \quad (\text{П.6})$$

$$\times [g_{\varphi\varphi}(q_2)g_{\varphi\pi}(q_3)D_{\varphi\pi,\varphi} + g_{\varphi\pi}(q_2)g_{\varphi\varphi}(q_3)D_{\pi\varphi,\varphi} + \\ + g_{\varphi\pi}(q_2)g_{\varphi\pi}(q_3)D_{\pi\pi,\varphi} + g_{\varphi\varphi}(q_2)g_{\varphi\varphi}(q_3)D_{\varphi\varphi,\varphi}],$$

$$D_{\varphi\varphi,\varphi} = \frac{T^3}{(2\pi)^9} \int d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3 d^2 \sum_{\omega_1, \omega_2, \omega_3} \left\{ g_{\pi\pi}(q_1) \times \right. \\ \times [g_{\varphi\varphi}(q_2)g_{\varphi\pi}(q_3)D_{\varphi\pi,\varphi} + g_{\varphi\pi}(q_2)g_{\varphi\varphi}(q_3)D_{\pi\varphi,\varphi} + \\ + g_{\varphi\pi}(q_2)g_{\varphi\pi}(q_3)D_{\pi\pi,\varphi} + g_{\varphi\varphi}(q_2)g_{\varphi\varphi}(q_3)D_{\varphi\varphi,\varphi}] + \\ + g_{\varphi\varphi}(q_1)[g_{\varphi\varphi}(q_2)g_{\pi\pi}(q_3)D_{\varphi\pi,\varphi} + g_{\varphi\pi}(q_2)g_{\varphi\varphi}(q_3)D_{\pi\varphi,\varphi} + \\ + g_{\varphi\pi}(q_2)g_{\pi\pi}(q_3)D_{\pi\pi,\varphi} + g_{\varphi\varphi}(q_2)g_{\varphi\varphi}(q_3)D_{\varphi\varphi,\varphi}] + \\ + g_{\varphi\varphi}(q_1)[g_{\pi\varphi}(q_2)g_{\pi\pi}(q_3)D_{\varphi\pi,\varphi} + g_{\pi\pi}(q_2)g_{\varphi\varphi}(q_3)D_{\pi\varphi,\varphi} + \\ + g_{\pi\pi}(q_2)g_{\pi\pi}(q_3)D_{\pi\pi,\varphi} + g_{\pi\varphi}(q_2)g_{\varphi\varphi}(q_3)D_{\varphi\varphi,\varphi}] + \\ \left. + g_{\varphi\varphi}(q_1)[g_{\pi\varphi}(q_2)g_{\varphi\pi}(q_3)D_{\varphi\pi,\varphi} + g_{\pi\pi}(q_2)g_{\varphi\varphi}(q_3)D_{\pi\varphi,\varphi} + \right. \\ \left. + g_{\pi\pi}(q_2)g_{\varphi\pi}(q_3)D_{\pi\pi,\varphi} + g_{\pi\varphi}(q_2)g_{\varphi\varphi}(q_3)D_{\varphi\varphi,\varphi} \right\}. \quad (\text{П.4})$$

где  $d$  — невозмущенная вершинная часть, а  $g_{ij}$  — «полные» функции Грина [5]:

$$g_{\varphi\varphi}(\mathbf{q}) = \frac{mc^2}{n} \frac{1}{(i\omega)^2 - c^2\mathbf{q}^2 - i\Delta(\mathbf{q})}, \\ g_{\varphi\pi}(\mathbf{q}) = i \left( \frac{dn_0}{d\mu} \right) \frac{m}{n} \frac{i\omega c^2}{(i\omega)^2 - c^2\mathbf{q}^2 - i\Delta(\mathbf{q})} = -g_{\pi\varphi}, \\ g_{\pi\pi}(\mathbf{q}) = \left( \frac{dn_0}{d\mu} \right)^2 \frac{m}{n} \frac{(i\omega)^2 c^2}{(i\omega)^2 - c^2\mathbf{q}^2 - i\Delta(\mathbf{q})}. \quad (\text{П.5})$$

Выражения для остальных вершинных функций могут быть получены из (П.1)–(П.4) путем замены у всех вершинных функций внешней выходящей линии на  $\pi$ -линию. Следует заметить, что только вершинные функции, которые имеют две присоединенные  $\varphi$ -линии и одну  $\pi$ -линию, имеют элементарную вершинную часть (см. выражение (8) для «гидродинамического» действия).

После подстановки выражений (П.5) в уравнения (П.2)–(П.4) получаем в явном виде выражения для вершинных частей. Для примера приведем выражение для вершинной функции  $D_{\pi\pi,\varphi}$ :

$$D_{\pi\pi,\varphi} = i \frac{T^3 mc^6}{(2\pi)^9 n^3} \int d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3 (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)^2 \times \\ \times \sum_{\omega_1, \omega_2, \omega_3} \eta(q) P(q) \left[ \left( \frac{dn_0}{d\mu} \right) (i\omega_3 D_{\varphi\pi,\varphi} + i\omega_2 D_{\pi\varphi,\varphi}) + \right.$$

где  $P(q)$  — произведение полюсных частей функций Грина (П.5).

Вершинные части, зависящие от двух частот —  $\omega$  и  $\omega_1$ , после аналитического продолжения  $i\omega_1 \rightarrow z$  будут определены на комплексной плоскости с двумя разрезами  $\text{Im } z = 0$  и  $\text{Im } z = \omega$ . Тогда уравнения для вершинных функций (П.6) могут быть трансформированы в уравнения для граничных значений аналитических функций вдоль разрезов функций  $D(\omega, z)$ . Обозначая через  $D^e$  граничные значения  $D$  на внешних берегах разреза  $\text{Im } z = -0$ ,  $\omega + 0$ , а через  $D^i$  — граничные значения на внутренних берегах  $\text{Im } z = +0$ ,  $\omega - 0$ , запишем получаемую из уравнения (П.6) после его аналитического продолжения вдоль разрезов систему из четырех уравнений относительно граничных значений  $D(\omega, z)$ :

$$\uparrow D_{\pi\pi,\varphi}^e(x - i\delta, -x + E + i\delta) = \frac{T}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\pi i} \int d\mathbf{q}_2 d^2 \int dy \times \\ \times [g_{\varphi\varphi}^A(x - y)g_{\varphi\pi}^R(y)g_{\varphi\pi}^R(y - E)n_B(y - E)D_{\pi\pi,\varphi}^e - \\ - g_{\varphi\varphi}^A(x - y)g_{\varphi\pi}^A(y)g_{\varphi\pi}^A(y - E)n_B(y)D_{\pi\pi,\varphi}^e - \\ - g_{\varphi\varphi}^A(x - y)g_{\varphi\pi}^R(y)g_{\varphi\pi}^A(y - E)n_B(y - E)D_{\pi\pi,\varphi}^i + \\ + g_{\varphi\varphi}^A(x - y)g_{\varphi\pi}^R(y)g_{\varphi\pi}^A(y - E)n_B(y)D_{\pi\pi,\varphi}^i], \quad (\text{П.7})$$

$$\downarrow D_{\pi\pi,\varphi}^e(x + i\delta, -x - i\delta) = \frac{T}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\pi i} \int d\mathbf{q}_2 d^2 \int dy \times \\ \times [g_{\varphi\varphi}^A(x - y)g_{\varphi\pi}^R(y + E)g_{\varphi\pi}^R(y)n_B(y)D_{\pi\pi,\varphi}^e - \\ - g_{\varphi\varphi}^R(x - y)g_{\varphi\pi}^A(y + E)g_{\varphi\pi}^A(y)n_B(y + E)D_{\pi\pi,\varphi}^e - \\ - g_{\varphi\varphi}^R(x - y)g_{\varphi\pi}^A(y + E)g_{\varphi\pi}^R(y)n_B(y)D_{\pi\pi,\varphi}^i + \\ + g_{\varphi\varphi}^R(x - y)g_{\varphi\pi}^A(y + E)g_{\varphi\pi}^A(y)n_B(y + E)D_{\pi\pi,\varphi}^i], \quad (\text{П.8})$$

$$\downarrow D_{\pi\pi,\varphi}^i(x + i\delta, -x + E) = \frac{T}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\pi i} \int d\mathbf{q}_2 d^2 \int dy \times \\ \times [g_{\varphi\varphi}^A(x - y)g_{\varphi\pi}^R(y)g_{\varphi\pi}^R(y - E)n_B(y - E)D_{\pi\pi,\varphi}^e - \\ - g_{\varphi\varphi}^R(x - y)g_{\varphi\pi}^A(y)g_{\varphi\pi}^A(y - E)n_B(y)D_{\pi\pi,\varphi}^e - \\ - g_{\varphi\varphi}^A(x - y)g_{\varphi\pi}^R(y)g_{\varphi\pi}^A(y - E)n_B(y - E)D_{\pi\pi,\varphi}^i + \\ + g_{\varphi\varphi}^R(x - y)g_{\varphi\pi}^R(y)g_{\varphi\pi}^A(y - E)n_B(y)D_{\pi\pi,\varphi}^i]. \quad (\text{П.9})$$

$$\begin{aligned} \uparrow D_{\pi\lambda,\varphi}^i(x+E, -x+i\delta) = & \frac{T}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\pi i} \int d\mathbf{q}_2 d^2 \int dy \times \\ & \times [g_{\varphi\varphi}^A(x-y)g_{\varphi\pi}^R(y+E)g_{\varphi\pi}^R(y)n_B(y)D_{\pi\lambda,\varphi}^e - \\ & - g_{\varphi\varphi}^R(x-y)g_{\varphi\pi}^A(y+E)g_{\varphi\pi}^A(y)n_B(y+E)D_{\pi\lambda,\varphi}^e - \\ & - g_{\varphi\varphi}^A(x-y)g_{\varphi\pi}^R(y+E)g_{\varphi\pi}^A(y)n_B(y)D_{\pi\lambda,\varphi}^i + \\ & + g_{\varphi\varphi}^R(x-y)g_{\varphi\pi}^R(y+E)g_{\varphi\pi}^A(y)n_B(y+E)D_{\pi\lambda,\varphi}^i] \end{aligned} \quad (\text{П.10})$$

(здесь использованы обозначения  $\uparrow D^{e,i}$  и  $\downarrow D^{e,i}$ , которые указывают, относительно какого из берегов разреза записано уравнение для функций  $D^e$  и  $D^i$ , а  $g^R$  и  $g^A$  — запаздывающие и опережающие функции Грина,  $n_B = (\exp \beta\varepsilon - 1)^{-1}$  — функция бозе-распределения).

Как было показано в [2], в первом приближении в уравнениях для функций  $D$  на внешних берегах разрезов значения  $D^e$  можно положить равными соответствующим неприводимым вершинным частям —  $D^e = d$  и только уравнения для  $D^i$  — внутренних значений функций  $D$ , будут нетривиальными. В рассматриваемом случае имеем  $D_{\pi\lambda,\varphi}^e = d_{\pi\lambda,\varphi} = 0$ , поэтому нетривиальными остаются только уравнения (П.9) и (П.10), которые после аналитического продолжения и соответствующей замены переменных  $y = y' + E$  оказываются идентичными:

$$\begin{aligned} D_{\pi\lambda,\varphi}^i(x, E) = & \frac{1}{2\pi i} \int d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3 d^2 \delta(\mathbf{q}) \times \\ & \times \int dy [n_B(y+E) - n_B(y)] \times \\ & \times g_{\varphi\varphi}^R(x-y)g_{\varphi\pi}^R(y+E)g_{\varphi\pi}^A(y)D_{\pi\lambda,\varphi}^i(y, E). \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

Основной вклад в действующие на функции  $D^i$  интегральные операторы определяется окрестностями близкорасположенных сингулярностей, имеющих характер полюсов функций Грина. Это дает возможность с хорошей точностью ограничиться только интегрированием по сингулярностям, вынося несингулярные функции за знак интеграла.

1. Ю.А. Непомнящий, *ЖЭТФ* **85**, 1244 (1983); *там же* **89**, 511 (1985).
2. В.Н. Попов, *Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике*, Атомиздат, Москва (1976).
3. S. Chapman and, T.G. Cowling, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, Cambridge University Press (1952).

4. С.Т. Беляев, *ЖЭТФ* **34**, 417 (1958); *там же* **34**, 433 (1958).
5. A. Chumachenko, S. Vilchynskyy, and M. Weyrauch, *J. Phys. Stat.* **11**, 200 (2007).
6. А. Чумаченко, *УФЖ* **52**, 709 (2007).
7. Ю.А. Непомнящий, Э.А. Пашицкий, *ЖЭТФ* **98**, 178 (1990).
8. Ю.А. Непомнящий, С.И. Вильчинский, *ФНТ* **27**, 253 (2001).
9. E.A. Pashitskij, S.V. Mashkevich, and S.I. Vilchynskyy, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 075301 (2002).
10. E.A. Pashitskij, S.V. Mashkevich, and S.I. Vilchynskyy, *J. Low Temp. Phys.* **134**, 851 (2004).
11. F. Pistolesi, C. Castellani, C. Di Castro, and G.C. Strinati, *Phys. Rev.* **B69**, 024513 (2004).
12. В.П. Пешков, *ЖЭТФ* **18**, 951 (1948).
13. A.R. Janzen and R.A. Aziz, *J. Chem. Phys.* **103**, 9626 (1995).
14. Э.Л. Андроникашвили, *ЖЭТФ* **16**, 780 (1946).
15. В.Л. Гинзбург, А.А. Собянин, *УФН* **120**, 153 (1976).

### Infrared peculiarities in the field theory of superfluidity and temperature corrections to the first and second sounds velocities in helium II

E.A. Pashitskij, S.I. Vilchinskyy,  
and A.V. Chumachenko

Using the modified Popov perturbation theory for strongly correlated Bose systems, which is free from infrared divergencies, high-order perturbative corrections to the self-energy parts of the theory of superfluidity are obtained. The calculation of these high-order corrections reduces to the solution of the kinetic equations from whence the temperature corrections to the velocities of the first and second sounds in the superfluid Bose liquid  $^4\text{He}$  are calculated. The temperature dependence of the superfluid component density is found using the theoretical model of superfluidity in which the superfluid component is considered as a mixture of the interaction depleted-single-particle and intensive pair condensates.

PACS: 67.25.D– Superfluid phase  $^4\text{He}$ ;  
67.25.dk Vortices and turbulence.

Keywords: infrared divergencies, temperature corrections to sound velocities, temperature dependence of superfluid component density.