Low Temperature Physics/Физика низких температур, 2012, т. 38, № 3, с. 245–252

Джозефсоновские плазменные колебания в ограниченных слоистых сверхпроводниках

С.И. Ханкина[1], В.М. Яковенко[1], В.А. Ямпольский[1,2]

[1]*Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова НАН Украины ул. Академика Проскуры, 12, г. Харьков, 61085, Украина*
E-mail: yam@ire.kharkov.ua

[2]*The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste I - 34151, Italy*

Статья поступила в редакцию 26 сентября 2011 г.

Теоретически исследованы собственные электромагнитные колебания в слоистых сверхпроводниках ограниченных размеров, заполняющих прямоугольный резонатор. Получены спектры как обыкновенных, так и необыкновенных собственных мод. Проанализирован нелинейный эффект понижения собственных частот необыкновенных мод, а также изучена генерация третьей гармоники колебаний. Нелинейность системы связана с нелинейной зависимостью джозефсоновской плотности тока поперек сверхпроводящих слоев от межслойной разности фаз параметра порядка. Исследованы джозефсоновские плазменные волны, бегущие вдоль волновода, заполненного слоистым сверхпроводнником, и нелинейные эффекты, возникающие при распространении этих волн. Кроме того, в работе предсказан эффект остановки терагерцовых волн в волноводах, связанный с совместным действием нелинейности и затухания волн.

Теоретично досліджено власні електромагнітні коливання в шаруватих надпровідниках обмежених розмірів, що заповнюють прямокутний резонатор. Отримано спектри як звичайних, так і незвичайних власних мод. Проаналізовано нелінійний ефект зниження власних частот незвичайних мод, а також вивчено генерацію третьої гармоніки коливань. Нелінійність системи пов'язана з нелінійною залежністю джозефсонівської щільності струму упоперек надпровідних шарів від міжшарової різниці фаз параметра порядку. Досліджено джозефсонівські плазмові хвилі, що біжать уздовж хвилеводу, який заповнено шаруватим надпровідником, і нелінійні ефекти, що виникають при поширенні цих хвиль. Крім того, в роботі передбачено ефект зупинки терагерцових хвиль в хвилеводах, який пов'язан із спільною дією нелінійності та загасання хвиль.

PACS: **74.72.–h** Купратные сверхпроводники;
74.50.+r Туннельные эффекты; эффекты Джозефсона;
74.78.–w Сверхпроводящие пленки и низкоразмерные структуры;
74.25.Gz Оптические свойства.

Ключевые слова: слоистые сверхпроводники, джозефсоновские плазменные волны, нелинейность и затухание волн.

1. Введение

В последнее время внимание многих исследователей обращено к электромагнитным волнам, распространяющимся в наноматериалах, к которым можно отнести и высокотемпературные сверхпроводники со слоистой структурой, например сверхпроводники $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}$. Многочисленные экспериментальные исследования [1–5] проводимости таких материалов в направлении кристаллографической оси **c** свидетельствуют о справедливости теоретической модели, в которой считается, что тонкие сверхпроводящие слои CuO_2 (толщиной s порядка 2–3 Å), разделенные значительно более толстыми слоями диэлектрика (толщиной d порядка 15 Å и с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon \sim 15$), электродинамически связаны между собой за счет *внутреннего эффекта Джозефсона*.

Слоистая структура сверхпроводников $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}$ и подобных соединений способствует распространению в них электромагнитных колебаний — так называемых *джозефсоновских плазменных волн* (ДПВ) (см., например, обзоры [6,7] и цитируемую там литературу). Практический интерес к этим волнам обусловлен тем, что они принадлежат к терагерцовому диапазону частот, очень важному с точки зрения различных возможных приложений, но все еще весьма трудно достижимому для современных электронных и оптических устройств. Научный же интерес к слоистым сверхпроводникам связан с тем, что в них, по сути, формируется специфический вид плазмы — так называемая джозефсоновская плазма. Главная особенность джозефсоновской плазмы — весьма сильная анизотропия ее токонесущей способности, причем не только по абсолютной величине (токи в **ab**-плоскости в сотни раз превышают токи вдоль оси **c**), но и по физической природе протекающих токов. Действительно, плотность тока J_{ab} вдоль **ab**-плоскости имеет ту же природу, что и токи в обычных сверхпроводниках, и она может быть описана в терминах лондоновской модели,

$$J_x = -\frac{c}{4\pi\lambda_{ab}^2} A_x, \quad J_y = -\frac{c}{4\pi\lambda_{ab}^2} A_y, \qquad (1)$$

где λ_{ab} — лондоновская глубина проникновения магнитного поля (в условиях, когда поле проникает в направлении, перпендикулярном сверхпроводящим слоям), $\mathbf{A}$ — векторный потенциал, c — скорость света. Здесь и всюду в дальнейшем мы выбираем систему координат, в которой оси x и y параллельны кристаллографической плоскости **ab**, а ось z параллельна кристаллографической оси **c**. Плотность тока вдоль оси **c** имеет другую природу, она является джозефсоновской:

$$J_z = J_c \sin\varphi, \qquad (2)$$

где J_c — максимальная плотность джозефсоновского тока, φ — межслойная калибровочно-инвариантная разность фаз параметра порядка. Здесь необходимо отметить, что всюду в настоящей работе, кроме раздела 5, мы пренебрегаем проводимостью квазичастиц и, соответственно, не принимаем во внимание затухание джозефсоновских плазменных колебаний.

В джозефсоновской плазме могут наблюдаться не только явления, характерные для других видов плазмы, но и эффекты, специфические именно для слоистых сверхпроводников. Как и в обычной плазме, в спектре джозефсоновских плазменных волн имеется щель: ДПВ могут распространяться лишь с частотами, превышающими пороговую частоту — так называемую джозефсоновскую плазменную частоту ω_J. В работах [8–12] было теоретически показано, что вдоль границы раздела слоистый сверхпроводник–вакуум, как и вдоль границы обычной плазмы, могут распространяться поверхностные колебания — джозефсоновские поверхностные плазменные волны (ДППВ). Возбуждение этих волн может приводить к ряду резонансных эффектов [12–15] типа известных вудовских аномалий в оптике. Однако, в отличие от обычной плазмы, ДППВ могут распространяться с частотами не только ниже, но и выше плазменной частоты [12]. В отличие от обычной плазмы, джозефсоновская плазма может проявлять свойства, характерные для леворуких сред — на ее границе с вакуумом может наблюдаться отрицательный коэффициент преломления терагерцовых волн [12,16]. В работе [17] показано, что в слоистых сверхпроводниках со случайно флуктуирующей величиной максимального джозефсоновского тока могут наблюдаться явления типа андерсоновской локализации и формирования частотного окна прозрачности для терагерцовых волн.

Необходимо обратить внимание на то, что соотношение (2) является нелинейным, что может послужить причиной для возникновения ряда нетривиальных нелинейных эффектов, сопровождающих распространение джозефсоновских плазменных волн. Среди таких явлений упомянем предсказанный в работе [18] эффект остановки света, эффект самофокусировки терагерцовых импульсов [18,19], возбуждение нелинейных волноводных мод [20], а также явление самоиндуцированной прозрачности пластин слоистых сверхпроводников и возникновение гистерезисной зависимости (со скачками) коэффициента прозрачности пластин от амплитуды падающей волны [21].

Следует, однако, обратить внимание на то, что в большинстве теоретических работ, посвященных изучению джозефсоновских плазменных волн, рассматривается случай бесконечного образца. В то же время реальные размеры образцов, используемых в экспериментах со слоистыми сверхпроводниками, оказываются соизмеримыми или даже меньшими длины волны терагерцового излучения. Ясно, что в таких условиях образец нельзя считать бесконечно большим, и сопоставление результатов теории с экспериментом вряд ли даст хорошее согласие. Это означает, что в теории необходимо учитывать конечные размеры образцов. Рассмотрению именно такой задачи и посвящена настоящая работа. Ниже мы теоретически исследуем линейные и нелинейные джозефсоновские плазменные колебания и волны в слоистых сверхпроводниках, которые служат заполнением для резонаторов и волноводов с конечными размерами.

2. Уравнения электродинамики слоистых сверхпроводников

Электромагнитное поле в слоистом сверхпроводнике определяется распределением межслойной калибровочно-инвариантной разности фаз $\varphi(\mathbf{r},t)$ параметра порядка. Это распределение подчиняется системе связанных синусоидальных уравнений Гордона. Насколько нам известно, Сакаи и др. [22] первыми получили связанные синусоидальные уравнения Гордона для описания электродинамики слоистых сверхпроводников. Позже многие авторы выводили их с использованием различных подходов [23,24]. Хотя эти уравнения не учитывают многие факторы (например, d-волновое спаривание), они дают не только качественно правильное описание ДПВ в слоистом сверхпроводнике, но и позволяют делать важные предсказания. Например, в работе [25] на основе связанных синусоидальных уравнений Гордона был предложен способ получения когерентного излучения терагерцовых волн, который позже был реализован в эксперименте [26].

Мы будем считать, что характерные пространственные масштабы изменения электромагнитного поля вдоль оси z велики по сравнению с расстояниями d и s, что позволяет перейти к континуальному пределу. В этом пределе связанные синусоидальные уравнения Гордона сводятся к уравнению

$$\left(1-\lambda_{ab}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{1}{\omega_J^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\sin\varphi\right)-\lambda_c^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)=0. \tag{3}$$

Здесь λ_{ab} и $\lambda_c = c/(\omega_J\varepsilon^{1/2})$ — лондоновские глубины проникновения магнитного поля поперек и вдоль слоев соответственно; $\omega_J = (8\pi edJ_c/\hbar\varepsilon)^{1/2}$ — джозефсоновская плазменная частота, определяемая максимальным джозефсоновским током J_c, диэлектрической проницаемостью ε в промежутках между сверхпроводящими слоями, а также межслойным расстоянием d; e — элементарный заряд.

Заметим, что компонента E_z электрического поля вызывает нарушение электронейтральности сверхпроводящих слоев, что приводит к возникновению дополнительной связи электромагнитных полей между соседними слоями (к так называемой емкостной связи). Однако эта связь не влияет существенно на свойства ДПВ из-за малости дебаевского радиуса R_D для зарядов в сверхпроводнике, и ею можно пренебречь, если мал параметр емкостной связи, $\beta = R_D^2\varepsilon/sd \ll 1$. Если пренебречь нарушением электронейтральности, калибровку векторного потенциала можно выбрать так, чтобы параметр порядка был вещественным и разность фаз φ была связана с z-компонентой векторного потенциала простым соотношением (см., например, [6]):

$$A_z = -\frac{\Phi_0}{2\pi d}\varphi, \tag{4}$$

где $\Phi_0 = \pi c\hbar/e$ — квант магнитного потока.

Обратим внимание на то, что уравнение (3) можно переписать для векторного потенциала **A** в форме волнового уравнения, более привычного для макроскопической электродинамики:

$$\text{grad div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} = -\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}. \tag{5}$$

Действительно, исключая из (5) A_x и A_y и используя (1), (2) и (4), мы приходим к связанному синусоидальному уравнению Гордона (3). Векторный потенциал связан с электрическим **E** и магнитным **H** полями стандартными соотношениями:

$$\mathbf{H} = \text{rot}\,\mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \tag{6}$$

скалярный потенциал предполагается равным нулю.

Соотношения (1), (2) и (4)–(6) представляют собой полную систему уравнений для нахождения электромагнитного поля в слоистом сверхпроводнике в континуальном приближении, которая и будет использоваться в настоящей работе. Мы будем рассматривать либо линейные, либо слабо нелинейные ДПВ с $|\varphi| \ll 1$, когда плотность джозефсоновского тока $J_c\sin\varphi$ можно представить в виде $J_c(\varphi-\varphi^3/6)$.

3. Джозефсоновские плазменные колебания в резонаторе, заполненном слоистым сверхпроводником

Рассмотрим собственные электромагнитные колебания в слоистом сверхпроводнике, находящемся в прямоугольном резонаторе размерами L_1, L_2, L_3 с идеально проводящими стенками. Имеется ввиду, что в некоторый момент времени ($t = 0$) внешними источниками создано электромагнитное поле, а в последующие моменты времени источники отсутствуют. Задача заключается в нахождении частот ω собственных колебаний поля в резонаторе, заполненном слоистым сверхпроводником, возникающих при $t > 0$.

Векторный потенциал электромагнитного поля представим в виде пространственных гармоник,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \sum_q \mathbf{A}_q(\mathbf{r},t). \tag{7}$$

Каждая гармоника, удовлетворяющая граничным условиям равенства нулю тангенциальных компонент электрического поля на стенках резонатора, представляется в виде

$$\begin{aligned} A_{xq}(\mathbf{r},t) &= A_{xq}(t)\cos(q_x x)\sin(q_y y)\sin(q_z z),\\ A_{yq}(\mathbf{r},t) &= A_{yq}(t)\sin(q_x x)\cos(q_y y)\sin(q_z z),\\ A_{zq}(\mathbf{r},t) &= A_{zq}(t)\sin(q_x x)\sin(q_y y)\cos(q_z z), \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$q_x = \frac{n_x\pi}{L_1}, \quad q_y = \frac{n_y\pi}{L_2}, \quad q_z = \frac{n_z\pi}{L_3},$$

n_x, n_y и n_z — неотрицательные целые числа (одно из этих чисел, например n_z, может равняться нулю; тогда в резонаторе отлична от нуля лишь одна компонента векторного потенциала — A_{zq}, однородная вдоль оси z).

Подставив разложение (7), (8) в волновое уравнение (5), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для величин $A_{xq}(t)$, $A_{yq}(t)$, $A_{zq}(t)$:

$$\frac{1}{\omega_J^2}\frac{d^2A_{xq}(t)}{dt^2}+\left(q_y^2\lambda_c^2+q_z^2\lambda_c^2+\gamma^2\right)A_{xq}(t)-$$

$$-\lambda_c^2q_x[q_yA_{yq}(t)+q_zA_{zq}(t)]=0, \qquad (9)$$

$$\frac{1}{\omega_J^2}\frac{d^2A_{yq}(t)}{dt^2}+\left(q_x^2\lambda_c^2+q_z^2\lambda_c^2+\gamma^2\right)A_{yq}(t)-$$

$$-\lambda_c^2q_y[q_xA_{xq}(t)+q_zA_{zq}(t)]=0, \qquad (10)$$

$$\sum_q\left\{\frac{1}{\omega_J^2}\frac{d^2A_{zq}(t)}{dt^2}+\left(q_x^2\lambda_c^2+q_y^2\lambda_c^2+1\right)A_{yq}(t)-\right.$$

$$\left.-\lambda_c^2q_z[q_xA_{xq}(t)+q_yA_{yq}(t)]\right\}\sin(q_xx)\sin(q_yy)\cos(q_zz)=$$

$$=\frac{16}{3}\frac{A_z^3(\mathbf{r},t)}{A_0^2},\qquad A_0^2=\frac{c}{\pi J_c\lambda_c^2}\left(\frac{\Phi_0}{\pi d}\right)^3. \qquad (11)$$

У этой системы уравнений имеется два типа решений, соответствующих так называемым обыкновенным и необыкновенным модам.

3.1. Обыкновенные джозефсоновские плазменные моды

У обыкновенных джозефсоновских плазменных колебаний векторный потенциал, а также векторы электрического поля и плотности тока лежат в **ab**-плоскости, т.е.

$$A_z=0,\quad E_z=0,\quad J_z=0. \qquad (12)$$

Для таких мод из уравнения (11) получаем связь между *x*- и *y*-компонентами векторного потенциала,

$$q_xA_{xq}(t)+q_yA_{yq}(t)=0, \qquad (13)$$

а из (9) — уравнение для нахождения A_{xq},

$$\frac{d^2A_{xq}(t)}{dt^2}+\omega_J^2(q^2\lambda_c^2+\gamma^2)A_{xq}(t)=0, \qquad (14)$$

где $q^2=q_x^2+q_y^2+q_z^2$. Видно, что частота обыкновенных колебаний подчиняется простому дисперсионному соотношению:

$$\omega^2=\omega_J^2(q^2\lambda_c^2+\gamma^2). \qquad (15)$$

Это колебания с высокой частотой $\omega/2\pi>\gamma\omega_J/2\pi\sim$ $\sim 10^{14}$ Гц. Нелинейные эффекты в обыкновенных колебаниях отсутствуют, поскольку отсутствует нелинейный джозефсоновский ток J_z.

3.2. Необыкновенные джозефсоновские плазменные моды

Для поля с поляризацией $H_z=0$ (необыкновенная мода) выполняется очевидное соотношение

$$q_xA_{yq}(t)=q_yA_{xq}(t). \qquad (16)$$

В линейном приближении из уравнений (9)–(11) и (16) получаем связанную систему уравнений для величин $A_{xq}(t)$ и $A_{zq}(t)$:

$$\frac{1}{\omega_J^2}\frac{d^2A_{xq}(t)}{dt^2}+(q_z^2\lambda_c^2+\gamma^2)A_{xq}(t)=q_xq_z\lambda_c^2A_{zq}(t), \qquad (17)$$

$$\frac{1}{\omega_J^2}\frac{d^2A_{zq}(t)}{dt^2}+(q_\perp^2\lambda_c^2+1)A_{zq}(t)=\frac{q_\perp^2q_z\lambda_c^2}{q_x}A_{xq}(t), \qquad (18)$$

где $q_\perp^2=q_x^2+q_y^2$.

Очевидно, что в терагерцовом диапазоне частот, когда $\omega\ll\gamma\omega_J$, слагаемое со второй производной по времени в уравнении (17) может быть опущено. Тогда из (17) имеем:

$$A_{xq}(t)=\frac{q_xq_z\lambda_{ab}^2}{q_z^2\lambda_{ab}^2+1}A_{zq}(t). \qquad (19)$$

Исключая с помощью соотношения (19) $A_{xq}(t)$ из уравнения (18), находим

$$\frac{d^2A_{zq}(t)}{dt^2}+\omega_J^2\left(1+\frac{q_\perp^2\lambda_c^2}{q_z^2\lambda_{ab}^2+1}\right)A_{zq}(t)=0, \qquad (20)$$

Из (21) получаем известный (см., например, обзор [6] и цитированную там литературу) закон дисперсии для линейных необыкновенных джозефсоновских плазменных колебаний:

$$\omega^2=\omega_0^2(q_x,q_y,q_z)=\omega_J^2\left(1+\frac{q_\perp^2\lambda_c^2}{q_z^2\lambda_{ab}^2+1}\right). \qquad (21)$$

В отличие от обыкновенных джозефсоновских плазменных колебаний, необыкновенные колебания подвержены влиянию нелинейных эффектов. В частности, за счет нелинейности происходит изменение частоты колебаний, т.е. амплитуда колебаний входит в дисперсионное соотношение. Кроме того, кубическая нелинейность в соотношении (2) приводит к генерации третьей и более высоких нечетных гармоник колебаний. Изучение нелинейных эффектов мы проведем методом последовательных приближений. В главном приближении мы будем считать, что электромагнитное поле в резонаторе представлено только первой гармоникой. В частности, основную гармонику *z*-компоненты векторного потенциала представим в виде

$$A_z^{(0)}(\mathbf{r},t) = a_1 \sin(q_x x)\sin(q_y y)\cos(q_z z)\cos(\omega t), \qquad (22)$$

где ω — частота, которая слегка отличается от ω_0 (21) за счет нелинейности. Подставляя (22) в качестве $A_z(\mathbf{r},t)$ в нелинейное слагаемое в уравнении (11) и выделяя в (11) основную пространственную гармонику $\sin(q_x x)\sin(q_y y)\cos(q_z z)$, получаем для величины $A_{zq}(t)$ следующее уравнение:

$$\frac{d^2 A_{zq}(t)}{dt^2} + \omega_0^2 A_{zq}(t) = \beta\omega_J^2 \frac{a_1^3}{A_0^2}\cos^3(\omega t), \qquad (23)$$

где коэффициент $\beta = 9/4$ для мод с $q_z \neq 0$ и $\beta = 3$ для моды с $q_z = 0$.

Далее, представляя $A_{zq}(t)$ в виде суммы первой и третьей гармоник,

$$A_{zq}(t) = a_1\cos(\omega t) + a_3\cos(3\omega t), \qquad (24)$$

(более высокими гармониками в $A_{zq}(t)$ пренебрегаем ввиду малости амплитуды колебаний, $a_1 \ll A_0$) и приравнивая в (23) коэффициенты при $\cos(\omega t)$ и $\cos(3\omega t)$, находим нелинейное дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 = \omega_0^2(q_x, q_y, q_z) - \frac{3\beta}{4}\omega_J^2 \frac{a_1^2}{A_0^2} \qquad (25)$$

и амплитуду третьей гармоники

$$a_3 = -\frac{a_1^3}{32 A_0^2}\left(1 + \frac{q_\perp^2 \lambda_c^2}{q_z^2 \lambda_{ab}^2 + 1}\right)^{-1}. \qquad (26)$$

Таким образом, нелинейность приводит к уменьшению частоты необыкновенных мод и к генерации третьей гармоники колебаний.

4. Распространение джозефсоновских плазменных волн в волноводе, заполненном слоистым сверхпроводником

В этом разделе рассмотрено распространение джозефсоновских плазменных волн в прямоугольных волноводах, заполненных слоистым сверхпроводником, с конечными поперечными размерами L_1 и L_2. В данном случае решение задачи подразумевает нахождение зависимости постоянной распространения (волнового вектора вдоль оси волновода) от частоты колебаний и от поперечных волновых чисел, а также от амплитуды колебаний. Необходимо рассмотреть две принципиальные геометрии задачи — когда волна распространяется в сверхпроводнике вдоль кристаллографической оси **c** (вдоль оси z), либо параллельно **ab**-плоскости (скажем, вдоль оси x).

Решение задачи о джозефсоновских плазменных волнах, распространяющихся в волноводе, в принципиальном отношении не отличается от задачи о стоячих собственных колебаниях в резонаторе, которая рассмотрена в предыдущем разделе. При этом дисперсионные соотношения (15) и (21) остаются справедливыми и для распространяющихся волн. Отличие возникает только в нелинейном слагаемом в соотношении (25) — в нем необходимо убрать коэффициент 3/4. Те же изменения происходят и в выражении (26) для амплитуды генерируемой третьей гармоники. Иначе говоря, нелинейность оказывает влияние на распространяющиеся волны в 4/3 раза большее, чем на стоячие.

Чтобы не повторять выкладки, содержащиеся в предыдущем разделе, ниже приведены лишь окончательные формулы, описывающие распространение волноводных мод. При этом в выражениях для векторного потенциала колебательных мод мы удерживаем лишь первую и третью гармоники, а более высокими гармониками пренебрегаем в виду их малости по сравнению с удерживаемой третьей. Такое пренебрежение допустимо в случае малых амплитуд волны, когда мал параметр a_1 / A_0 в выражениях (25) и (26).

4.1. Обыкновенные волноводные моды

У обыкновенной волны отсутствуют z-компоненты электрического поля, векторного потенциала и плотности тока. Если ось волновода совпадает с кристаллографической осью **c** сверхпроводника, отличные от нуля компоненты векторного потенциала имеют вид

$$A_x = a\cos(q_x x)\sin(q_y y)\sin(q_z z - \omega t),$$

$$A_y = -\frac{q_x}{q_y} a\sin(q_x x)\cos(q_y y)\sin(q_z z - \omega t). \qquad (27)$$

Волновой вектор q_z определяется из соотношения (15)

$$q_z = \left[\frac{1}{\lambda_c^2}\left(\frac{\omega^2}{\omega_J^2} - \gamma^2\right) - q_x^2 - q_y^2\right]^{1/2}. \qquad (28)$$

Аналогичные соотношения имеем для случая распространения обыкновенной волны вдоль **ab**-плоскости (вдоль оси x):

$$A_x = a\sin(q_y y)\sin(q_z z)\cos(q_x x - \omega t),$$

$$A_y = -\frac{q_x}{q_y} a\cos(q_y y)\sin(q_z z)\sin(q_x x - \omega t), \qquad (29)$$

$$q_x = \left[\frac{1}{\lambda_c^2}\left(\frac{\omega^2}{\omega_J^2} - \gamma^2\right) - q_y^2 - q_z^2\right]^{1/2}. \qquad (30)$$

Видно, что обыкновенные джозефсоновские плазменные волны могут распространяться только при очень высоких частотах $\omega > \gamma\omega_J$; они не подвержены влиянию нелинейности.

4.2. Необыкновенные волноводные моды

Распространение вдоль кристаллографической оси **c**. Для векторного потенциала волн с поляризацией $H_z = 0$ (для необыкновенных мод), распространяющихся вдоль кристаллографической оси **c**, выполняются соотношения

$$A_x = \left[a_1 \frac{q_x q_z \lambda_{ab}^2}{1+q_z^2\lambda_{ab}^2} \sin(q_z z - \omega t) + \right.$$

$$\left. + a_3 \frac{3q_x q_z \lambda_{ab}^2}{1+9q_z^2\lambda_{ab}^2} \sin(3q_z z - 3\omega t) \right] \cos(q_x x)\sin(q_y y),$$

$$A_y = \left[a_1 \frac{q_y q_z \lambda_{ab}^2}{1+q_z^2\lambda_{ab}^2} \sin(q_z z - \omega t) + \right.$$

$$\left. + a_3 \frac{3q_y q_z \lambda_{ab}^2}{1+9q_z^2\lambda_{ab}^2} \sin(3q_z z - 3\omega t) \right] \sin(q_x x)\cos(q_y y),$$

$$A_z = \left[a_1 \cos(q_z z - \omega t) + a_3 \cos(3q_z z - 3\omega t) \right] \sin(q_x x)\sin(q_y y). \tag{31}$$

Волновой вектор q_z определяется из соотношения (21):

$$q_z = \frac{1}{\lambda_{ab}} \left(\frac{\omega_J^2 q_\perp^2 \lambda_c^2}{\omega^2 - \omega_J^2 + \beta\omega_J^2 a_1^2 / A_0^2} - 1 \right)^{1/2}. \tag{32}$$

Амплитуда A_3 третьей гармоники задается выражением

$$a_3 = -\frac{a_1^3}{24A_0^2} \left(1 + \frac{q_\perp^2 \lambda_c^2}{1+9q_z^2\lambda_{ab}^2} \right)^{-1}. \tag{33}$$

Распространение параллельно **ab**-*плоскости*. Необыкновенная волна, распространяющаяся вдоль **ab**-плоскости, описывается формулами

$$A_x = \frac{q_x q_z \lambda_{ab}^2}{1+q_z^2\lambda_{ab}^2} \left[a_1 \cos(q_x x - \omega t) + 3a_3 \cos(3q_x x - 3\omega t) \right] \times$$

$$\times \sin(q_y y)\sin(q_z z),$$

$$A_y = \frac{q_y q_z \lambda_{ab}^2}{1+q_z^2\lambda_{ab}^2} \left[a_1 \sin(q_x x - \omega t) + a_3 \sin(3q_x x - 3\omega t) \right] \times$$

$$\times \cos(q_y y)\sin(q_z z),$$

$$A_z = \left[a_1 \sin(q_x x - \omega t) + a_3 \sin(3q_x x - 3\omega t) \right] \times$$

$$\times \sin(q_y y)\cos(q_z z), \tag{34}$$

$$q_x^2 = -q_y^2 + \frac{1+q_z^2\lambda_{ab}^2}{\omega_J^2\lambda_c^2} \left(\omega^2 - \omega_J^2 + \beta\omega_J^2 \frac{a_1^2}{A_0^2} \right), \tag{35}$$

$$a_3 = -\frac{a_1^3}{24A_0^2} \left[1 + \frac{(9q_x^2 + q_y^2)\lambda_c^2}{1+q_z^2\lambda_{ab}^2} \right]^{-1}. \tag{36}$$

Видно, что независимо от направления распространения необыкновенной волны в слоистом сверхпроводнике нелинейность «облегчает» прохождение колебаний по волноводу, увеличивая постоянную распространения и уменьшая пороговую частоту для расспространения волны. Как будет показано в следующем разделе, это свойство нелинейных джозефсоновских плазменных волн может приводить к весьма необычному явлению остановки терагерцовых волн в волноводе.

5. Остановка терагерцовых волн в волноводе, заполненном слоистым сверхпроводником

Соотношения (32) и (35) показывают, что линейные джозефсоновские плазменные волны не могут распространяться в волноводе, заполненном слоистым сверхпроводником, если частота не превышает некоторое критическое значение $\omega_{\rm cr}$, где

$$\omega_{\rm cr} = \omega_J \left(1 + q_\perp^2 \lambda_c^2 \right)^{1/2}, \tag{37}$$

когда ось волновода перпендикулярна слоям, и

$$\omega_{\rm cr} = \omega_J \left(1 + \frac{q_y^2 \lambda_c^2}{1+q_z^2\lambda_c^2} \right)^{1/2}, \tag{38}$$

когда направление распространения волны параллельно слоям (ось волновода параллельна оси x). Тем не менее из тех же соотношений (32) и (35) следует, что нелинейная ДПВ может распространяться даже в условиях

$$\omega < \omega_{\rm cr}, \tag{39}$$

если ее амплитуда a_1 превышает пороговое значение $a_{\rm cr}$,

$$a_1 > a_{\rm cr} = A_0 \sqrt{\frac{\omega_{\rm cr}^2 - \omega^2}{\beta\omega_J^2}}. \tag{40}$$

Теперь рассмотрим ситуацию, когда нелинейная ДПВ распространяется в волноводе при условиях выполнения неравенств (39) и (40). Если мы примем во внимание сколь угодно малое затухание, то станет ясно, что по мере распространения волны ее амплитуда уменьшается из-за диссипации. Поэтому колебания в конце концов достигнут такой точки $z = z_0$ (или $x = x_0$, если волна распространяется вдоль оси x), где амплитуда a_1 сравнивается с ее критическим значением $a_{\rm cr}$. Нетрудно убедиться, что в этой точке обращаются в нуль постоянная распространения, групповая скорость волны и вектор Пойнтинга. Любопытно, что при распространении волны поперек сверхпроводящих слоев, вектор Пойнтинга обращается в нуль в точке $z = z_0$ за счет обращения в нуль компонент E_x и E_y электрического поля. При этом плотность электромагнитной энергии не равна нулю за счет магнитной компоненты колебаний. В случае же, когда волна распространяется вдоль сверхпроводящих слоев, вектор Пойнтинга зануляется из-за обращения в нуль компонент H_y и H_z магнитного поля, а электрическое поле отлично от нуля.

Таким образом, из-за совместного действия нелинейности и затухания волны в волноводе происходит явление, подобное остановке света в оптике. Терагерцовая волна в определенной точке волновода прекращает свое распространение при том, что сами электромагнитные колебания не исчезают. Они остаются даже правее точки x_0 (или z_0) в виде неоднородной волны (evanescent wave). Явление остановки терагерцовых волн (распространяющихся вдоль сверхпроводящих слоев и однородных поперек слоев) было рассмотрено ранее в работах [18,19] для случая *безграничного* слоистого сверхпроводника. Ясно, что для количественного описания предсказанного эффекта необходимо построение теории нелинейных ДПВ в волноводе с учетом затухания.

6. Заключение

В настоящей работе проведены теоретические исследования собственных электромагнитных колебаний в слоистых сверхпроводниках ограниченных размеров для двух типичных экспериментальных ситуаций, когда сверхпроводник служит как материал, заполняющий прямоугольный резонатор или волновод. Для первого случая получены спектры как обыкновенных, так и необыкновенных собственных мод, проанализирован нелинейный эффект понижения собственных частот ТМ мод, а также изучена генерация третьей гармоники колебаний, возникающая за счет нелинейной зависимости джозефсоновской плотности тока поперек сверхпроводящих слоев от межслойной разности фаз параметра порядка. Для случая волновода исследованы спектральные характеристики бегущих вдоль него джозефсоновских плазменных волн, а также нелинейные эффекты, возникающие при распространении этих волн. Кроме того, предсказан эффект остановки терагерцовых волн в волноводах, связанный с совместным действием нелинейности и затухания.

Работа частично финансирована Украинской Государственной программой «Нанотехнологии и наноматериалы» и программой НАН Украины «Фундаментальные проблемы наноструктур, наноматериалов и нанотехнологий» (грант № 9/11-Н).

1. R. Kleiner, F. Steinmeyer, G. Kunkel, and P. Müller, *Phys. Rev. Lett*. **68**, 2394 (1992).
2. R. Kleiner and P. Müller, *Phys. Rev.* **B49**, 1327 (1994).
3. G. Blatter, M.V. Feigel'man, V.B. Geshkenbein, A.I. Larkin, and V.M. Vinokur, *Rev. Mod. Phys*. **66**, 1125 (1994).
4. E.H. Brandt, *Rep. Prog. Phys*. **58**, 1465 (1995).
5. V.L. Pokrovsky, *Phys. Rep*. **288**, 325 (1997).
6. S. Savel'ev, V.A. Yampol'skii, A.L. Rakhmanov, and F. Nori, *Rep. Prog. Phys*. **73**, 026501 (2010).
7. Xiao Hu and Shi-Zeng Lin, *Supercond. Sci. Technol*. **23**, 053001 (2010).
8. S. Savel'ev, V. Yampol'skii, and F. Nori, *Phys. Rev. Lett*. **95**, 187002 (2005).
9. S. Savel'ev, V. Yampol'skii, A.L. Rakhmanov, and F. Nori, *Physica* **C445–448**, 183 (2006).
10. S. Savel'ev, V. Yampol'skii, A. Rakhmanov, and F. Nori, *Physica* **C437–438**, 281 (2006).
11. V.A. Yampol'skii, D.R. Gulevich, S. Savel'ev, and F. Nori, *Phys. Rev.* **B78**, 054502 (2008).
12. V.A. Golick, D.V. Kadygrob, V.A. Yampol'skii, A.L. Rakhmanov, B.A. Ivanov, and F. Nori, *Phys. Rev. Lett*. **104**, 187003 (2010).
13. V.A. Yampol'skii, A.V. Kats, M.L. Nesterov, A.Yu. Nikitin, T.M. Slipchenko, S. Savel'ev, and F. Nori, *Phys. Rev.* **B76**, 224504 (2007).
14. A.V. Kats, A.Yu. Nikitin, M.L. Nesterov, F. Nori, S. Savel'ev, T.M. Slipchenko, and V.A. Yampol'skii, *Phys. Rev.* **B79**, 214501 (2009).
15. D.V. Kadygrob, V.A. Golick, V.A. Yampol'skii, T.M. Slipchenko, D.R. Gulevich, and S. Savel'ev, *Phys. Rev.* **B80**, 184512 (2009).
16. A.L. Rakhmanov, V.A. Yampol'skii, J.A. Fan, F. Capasso, and F. Nori, *Phys. Rev.* **B81**, 075101 (2010).
17. V.A. Yampol'skii, S. Savel'ev, O.V. Usatenko, S.S. Mel'nik, F.V. Kusmartsev, A.A. Krokhin, and F. Nori, *Phys. Rev.* **B75**, 014527 (2007).
18. S. Savel'ev, A.L. Rakhmanov, V.A. Yampol'skii, and F. Nori, *Nature Phys*. **2**, 521 (2006).
19. V.A. Yampol'skii, S. Savel'ev, A.L. Rakhmanov, and F. Nori, *Phys. Rev.* **B78**, 024511 (2008).
20. S. Savel'ev, V.A. Yampol'skii, A.L. Rakhmanov, and F. Nori, *Phys. Rev.* **B75**, 184503 (2007).
21. S.S. Apostolov, Z.A. Maizelis, M.A. Sorokina, V.A. Yampol'skii, and F. Nori, *Phys. Rev.* **B82**, 144521 (2010).
22. S. Sakai, P. Bodin, and N.F. Pedersen, *J. Appl. Phys*. **73**, 2411 (1993).
23. L.N. Bulaevskii, M. Zamora, D. Baeriswyl, H. Beck, and J.R. Clem, *Phys. Rev.* **B50**, 12831 (1994); T. Koyama and M. Tachiki, *Phys. Rev.* **B54**, 16183 (1996); С.Н. Артеменко, С.В. Ремизов, *Письма в ЖЭТФ* **66**, 811 (1997); M. Tachiki and M. Machida, *Physica* **C341–348**, 1493 (2000); S.N. Artemenko and S.V. Remizov, *Physica* **C362**, 200 (2001); Yu.H. Kim and J. Pokharel, *Physica* **C384**, 425 (2003).
24. M. Machida, T. Koyama, A. Tanaka, and M. Tachiki, *Physica* **C331**, 85 (2000).

25. L.N. Bulaevskii and A.E. Koshelev, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 057002 (2007).
26. L. Ozyuzer, A.E. Koshelev, C. Kurter, N. Gopalsami, Q. Li, M. Tachiki, K. Kadowaki, T. Yamamoto, H. Minami, H. Yamaguchi, T. Tachiki, K.E. Gray, W.-K. Kwok, and U. Welp, *Science* **318**, 1291 (2007).

Josephson plasma oscillations in confined layered superconductors

S.I. Khankina, V.M. Yakovenko, and V.A. Yampol'skii

Electromagnetic fundamental oscillations in layered finite-sized superconductors, which fill a rectangular resonator are investigated theoretically. The spectra of ordinary and nonordinary eigenmodes are obtained. The nonlinear effect of decrease in frequency of the non-ordinary eigenmodes is analyzed and the generation of the third harmonics of oscillations is studied. The nonlinearity of the system is due to the nonlinear dependence of the Josephson current density across the superconducting layers on interlayer phase difference of the order parameter. We study the Josephson plasma waves running along a waveguide filled by a layered superconductor, and the nonlinear effects accompanying the propagation of these waves. In addition, a phenomenon of terahertz waves stopping in waveguides caused by the combined effect of the nonlinearity and damping is predicted.

PACS: **74.72.–h** Cuprate superconductors;
74.50.+r Tunneling phenomena; Josephson effects;
74.78.–w Superconducting films and low-dimensional structures;
74.25.Gz Optical properties.

Keywords: layered superconductors, Josephson plasma waves, nonlinearity and damping of the waves.