УДК 519.85:629.735(043.2)

А. И. ЛЫСЕНКО, С. Н. ЧУМАЧЕНКО, Е. Н. ТАЧИНИНА

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ ГРУППЫ КВАДРОКОПТЕРОВ

Целью публикации является разработка математической постановки задачи управления группой квадрокоптеров как составной динамической системы. В работе рассмотрены вопросы математического моделирования движения квадрокоптера. Решена задача оптимизации траектории группы квадрокоптеров, состоящая в поиске оптимальных управлений и траекторий движения квадрокоптеров по участкам ветвящейся траектории. Постановка такой задачи является новой с учетом применения в ней метода ветвящихся траекторий. Практическая значимость этой работы заключается в разработке системы управления робототехнических комплексов для выполнения задач оперативной разведки в зоне чрезвычайных ситуаций, группового применения системы квадрокоптеров для проведения оперативного картографирования территорий с динамически меняющейся обстановкой.

Метою публікації є розробка математичної постановки задачі управління групою квадрокоптерів як складеної динамічної системи. В роботі розглянуті питання математичного моделювання руху квадрокоптера. Вирішена задача оптимізації траєкторії групи квадрокоптерів, що складається в пошуку оптимальних управлінь і траєкторій руху квадрокоптерів по ділянках розгалуженої траєкторії. Постановка такої задачі є новою з урахуванням застосування в ній методу розгалужених траєкторій. Практична значущість цієї роботи полягає в розробці системи управління робототехнічних комплексів для виконання завдань оперативної розвідки в зоні надзвичайних ситуацій, групового застосування системи квадрокоптерів для проведення оперативного картографування територій з динамічно мінливою обстановкою.

This paper describes the development of a mathematical formulation of the problem in control of a group of quadrocopters as an integral dynamic system. The study examines the problems of mathematical modeling the quadrocopter movement. The problem for optimizing the trajectory of a group of quadcopters is resolved. It results from search of the optimal control and mechanical trajectories of quadrocopters on paths of the branching trajectory. A novel approach to the formulation of this problem is applied using the branching trajectories method. The practical significance of this work is in the development of robotic systems designed for missions of operational reconnaissance in the zone of an emergency and the use of a group of quadrocopters for operative mapping territories with dynamically changing situations.

Ключевые слова: *составная динамическая система, оптимизация, управление, математическая модель*.

В последние десятилетия в связи с успешным развитием области микромеханики и микроэлектроники возрос интерес к использованию компактных беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) – квадрокоптеров, линейные размеры и масса которых составляют (0,1 – 0,5) метра и (0,1 – 0,5) кг соответственно. Такие преимущества квадрокоптеров, как дешевизна, высокая грузоподъемность (соизмерима с массой самого аппарата), простота управления открывают широкие перспективы по применению этих аппаратов для дистанционного видеонаблюдения, картографирования, радиоразведки и радиоподавления, а также других гражданских и военных применений.

Вместе с тем, одиночный квадрокоптер обладает ограниченным запасом бортовых энергоресурсов и функциональных устройств, доступная ему информация о состоянии окружающей среды ограничена возможностями бортовых сенсорных устройств. В то же время квадрокоптеры, используемые в группе, могут обмениваться собранной информацией об окружающей среде, что позволит существенно увеличить информированность каждого аппарата о состоянии окружающей среды. Доступный группе запас бортовых энергоресурсов позволяет выполнять существенно больший объем работ, а выход из строя одного или нескольких квадрокоптеров во время выполнения задания не приводит к срыву выполнения задачи, а только лишь уменьшает эф-

© А. И. Лысенко, С. Н. Чумаченко, Е. Н. Тачинина, 2016

фективность работы группы.

Группы квадрокоптеров представляют практический интерес при решении таких задач, как видеомониторинг, формирование ложных целей, сбор данных о территории, картографирование, разведка, поиск пострадавших в местах катастроф, измерение уровня радиационного и химического заражения, мониторинг состояния протяженных объектов (лесных массивов, транспортных магистралей, нефте- и газопроводов, границ и др.), радиоэлектронная борьба, формирование мобильных коммуникационных сетей, формирование мобильных фазированных антенных решеток и др. При этом возникают новые проблемы группового управления и коммуникации, связанные с организацией группового взаимодействия БПЛА. Таким образом, научная проблема группового управления квадрокоптерами, функционирующими автономно в условиях сложной недетерминированной динамической среды, является актуальной.

Математическая модель квадрокоптера. Для решения задач оптимизации движения группы квадрокоптеров необходимо определить динамику движения одного квадрокоптера. Квадрокоптер является разновидностью летательного аппарата с четырьмя несущими винтами, у которого два противоположных винта вращаются в одном направлении и два других – в обратном, при этом маневры осуществляются путем изменения скорости вращения винтов [1].

Рассмотрим квадрокоптер с известными физическими параметрами, движением которого можно управлять, изменяя скорости вращения винтов. Для формального описания динамики движения квадрокоптера как твердого объекта в трёхмерном пространстве необходимо ввести в рассмотрение две системы координат (СК) [2]:

– неподвижную систему координат (НСК), в качестве которой выступает нормальная земная система координат с заданными перпендикулярными друг другу координатными осями O_gX_g, O_gY_g, и O_gZ_g, причем ось O_gZ_g направлена противоположно вектору силы тяжести;

– связанную с квадрокоптером систему координат (ССК), центр которой размещен в центре масс аппарата, а оси OX, OY и OZ параллельны и сонаправлены с осями неподвижной системы. Угловое положение аппарата зададим тремя углами Эйлера: углами крена φ, тангажа θ и рыскания ψ, определяющими вращение вокруг осей OX, OY и OZ соответственно.

Основываясь на ранее рассмотренных системах координат, можно утверждать, что квадрокоптер имеет шесть степеней свободы, а именно три линейных координаты $[x, y, z]$ и три угловых $[\theta, \varphi, \psi]$. В качестве управляющих каналов выступают скорости вращения роторов (рис. 1), которые создают динамику движения БПЛА в пространстве. Согласно [3 – 4], возникающие в результате подачи управляющих воздействий силы и моменты пропорциональны квадрату угловых скоростей винтов Ω^2. Поэтому, для достижения желаемого режима работы БПЛА необходимо связать совокупность управляющих воздействий со степенями свободы БПЛА через уравнения связи, которые определяют основные режимы движения квадрокоптера в пространстве.

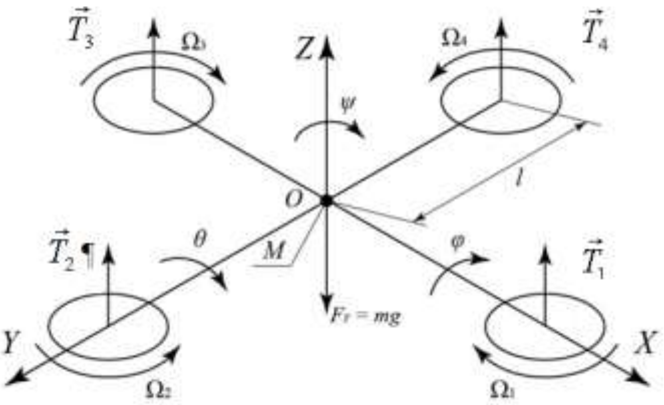


Рис. 1 – Связанная система координат квадрокоптера

В качестве первого режима БПЛА U_1 рассмотрим движение вдоль оси *OZ*, принадлежащей ССК. Данное движение обеспечивается одновременным увеличением скоростей винтов на одинаковое значение угловой скорости Δa. Полученное при этом движение (рис. 1) характеризуется взлетом или посадкой квадрокоптера (при нулевых значениях тангажа и крена) и описывается следующим выражением:

$$U_1 = b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2), \tag{1}$$

где b – аэродинамическая составляющая тяги винта.

В качестве второго режима движения БПЛА U_2 необходимо взять поворот вокруг оси *OX*, принадлежащей ССК. Данное движение достигается путем увеличения/уменьшения на величину Δa значения Ω_4 левого винта и уменьшением/увеличением на величину Δb значения Ω_2 правого. Полученное при этом движение характеризуется изменением угла крена φ (рис. 2) и описывается следующим выражением:

$$U_2 = lb(-\Omega_2^2 - \Omega_4^2), \tag{2}$$

где l – расстояние между центром квадрокоптера и центром винта.

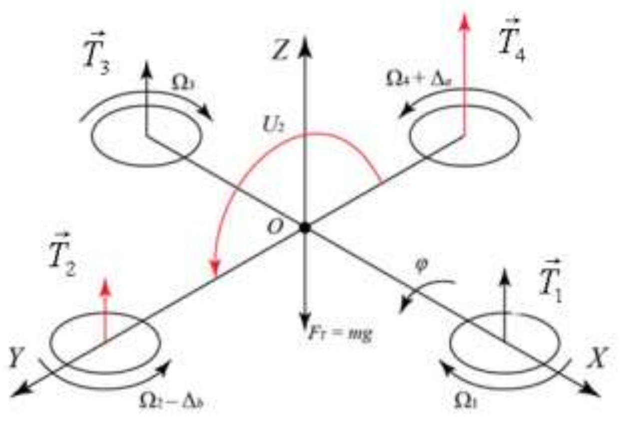
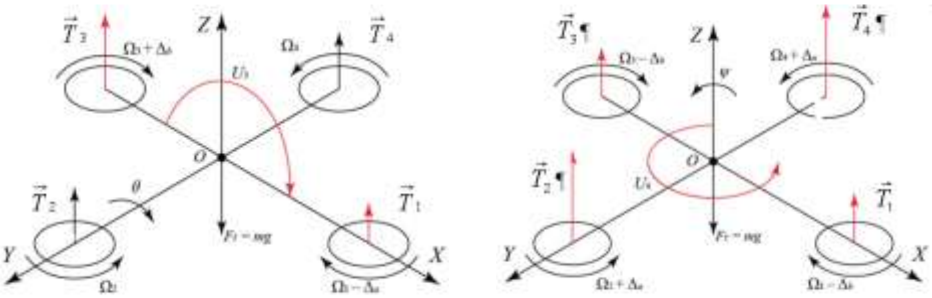


Рис. 2 – Режим движения квадрокоптера вокруг оси OX

В качестве третьего режима движения U_3 необходимо взять поворот БПЛА вокруг оси OY, принадлежащей ССК. Данное движение достигается путем уменьшения/увеличения на величину Δa значения Ω_1 фронтального винта и увеличения/уменьшения на величину Δb значения Ω_3 заднего. Полученное при этом движение характеризуется изменением угла тангажа θ (рис. 3, а) и описывается следующим выражением:

$$U_3 = lb(-\Omega_1^2 - \Omega_3^2). \tag{3}$$



а) б)

а) режим движения вокруг оси OY;
б) режим движения вокруг оси OZ

Рис. 3 – Режимы движения квадрокоптера

В качестве последнего, четвертого, режима движения U_4 необходимо взять поворот БПЛА вокруг оси OZ , принадлежащей ССК. Данное движение достигается путем одновременного увеличения/уменьшения на величину Δa значений Ω_4 левого и Ω_2 правого винтов, а также одновременного уменьшения/увеличения на величину Δb значений Ω_1 фронтального и Ω_3 заднего винтов. Благодаря вращению роторов в диагонально противоположных направлениях, полученное движение характеризуется изменением угла рыскания ψ (рис. 3, б) и описывается следующим выражением:

$$U_4 = d(-\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3^2 + \Omega_4^2), \tag{4}$$

где d – аэродинамическая составляющая коэффициента сопротивления среды.

Введенное, с учетом (1) – (4), множество U, характеризующее режимы движения квадрокоптера можно записать следующим образом:

$$U = \begin{cases} U_1 = b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2); \\ U_2 = lb(-\Omega_2^2 - \Omega_4^2); \\ U_3 = lb(-\Omega_1^2 - \Omega_3^2); \\ U_4 = d(-\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3^2 + \Omega_4^2). \end{cases}$$

Множество U определяет связь между системой исполнительных приводов и платформой БПЛА. Поэтому, при дальнейшем рассмотрении математической модели динамики движения квадрокоптера, режимы движения (1) – (4) будут использоваться как задающие воздействия для платформы БПЛА.

Постановки задачи. При групповом применении квадрокоптеров, решающих единую целевую задачу, они должны действовать как нечто единое целое и действия каждого отдельного БПЛА должны быть направлены на получение наибольшего группового эффекта. С этой целью предлагается группу квадрокоптеров, выполняющую единую задачу, рассматривать как составную динамическую систему. Под составной динамической системой (СДС) понимается совокупность квадрокоптеров, объединенных в систему единой целевой задачей.

Траектории таких составных динамических систем называются ветвящимися, так как состоят из участков совместного движения квадрокоптеров и участков их индивидуального движения к цели, то есть движения по отдельным ветвям траектории.

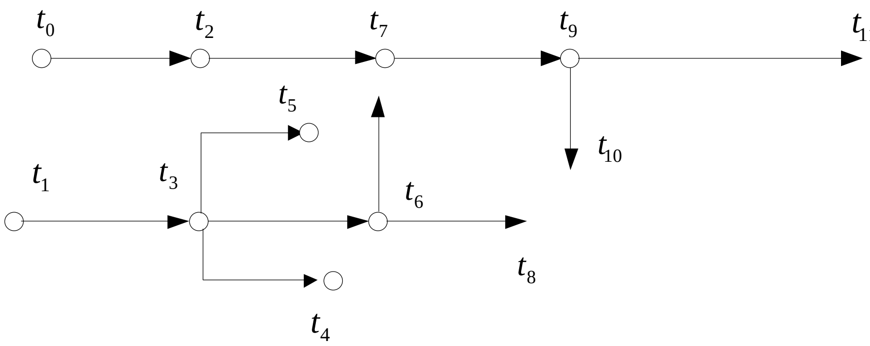
Управление группой квадрокоптеров является нетривиальной задачей, требующей оптимального выбора координат и момента времени разделения их траекторий, а также оптимального способа движения к точке разделения и оптимального перемещения к целям по ветвям траектории после разделения.

Оптимизация траектории группы квадрокоптеров. Квадрокоптеры в процессе своего движения могут многократно группироваться и разделяться (рис. 4).

Движение квадрокоптеров по ветви траектории СДС описывается системой дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(x,u;y,v;t),\ t \in [t_0, t_f], \tag{5}$$

где $x \in E^n$, $u \in \cap \subset E^m$; y – фазовые координаты, v – управления других квадрокоптеров из состава СДС, влияющих на движение рассматриваемого квадрокоптера; t_0, t_f – моменты времени начала и конца движения квадрокоптера по рассматриваемой ветви траектории.



t_i – моменты времени структурных преобразований СДС;
стрелки условно показывают направление движения квадрокоптеров

Рис. 4 – Пример схемы ветвящейся траектории

На траекторию квадрокоптера (5) накладываются скалярные ограничения вида [5]

$$\mathrm{g_i}(x(t_0),y(t_0),t_0;x(t_f),y(t_f),t_f)\begin{cases}=0, & i=\overline{1,k_g} \\ \le 0, & i=\overline{k_g+1,n_g}\end{cases}, \tag{6}$$

$$\mathrm{q_i}(x(t),u(t),t_0;y(t),v(t);t)\begin{cases}=0, & i=\overline{1,k_q} \\ \le 0, & i=\overline{k_q+1,n_q}\end{cases}, \tag{7}$$

где $t \in [t_0, t_f]$.

Критерий, оценивающий эффективность функционирования СДС, описывается выражением

$$P = \Pi(\cdot) + \rho_{\sum} \to \min, \tag{8}$$

где $\Pi(\cdot)$ – терминальная составляющая критерия, зависящая от фазовых координат квадрокоптеров в моменты времени структурных преобразований СДС и самих моментов времени; $\rho_{\sum}$ – интегральная составляющая критерия, состоящая из суммы частных интегральных составляющих типа

$$\rho = \int_{t_0}^{t_f} \mathrm{h}(x(t),u(t);y(t),v(t);t)\,dt, \tag{9}$$

соответствующих отдельным ветвям траектории СДС.

Таким образом, задача (5) – (9) оптимизации траектории СДС состоит в поиске оптимальных управлений и траекторий движения квадрокоптеров по участкам ветвящейся траектории, минимизирующих критерий (8), а также в отыскании оптимальных моментов времени и фазовых координат, в которых происходят структурные преобразования СДС.

Решение указанной задачи предполагается выполнить в три этапа: вначале осуществить переход от состояний динамической системы к разрывной динамической системе с переменным размером векторов состояния управления, затем оптимизировать разрывную систему и, наконец, вернуться к исходной задаче, выразив результат оптимизации разрывной системы через обозначения, принятые в первоначальной формулировке задачи.

Методика преобразования составной динамической системы в разрывную динамическую систему. Методика преобразования составной динамической системы в разрывную динамическую систему с изменяющимся в моменты структурных преобразований размером векторов состояния и управления состоит в следующем [6 – 7]:

– исходя из физических соображений функционирования СДС, вычерчивается схема ветвящейся траектории, составляются уравнения движения квадрокоптеров вдоль ветвей траектории, записываются ограничения, действующие непрерывно на подсистемы и в граничных точках, формулируется критерий;

– устанавливается хронологическая последовательность моментов времени структурных преобразований СДС;

– в интервалах времени между структурными преобразованиями СДС вводятся расширенные векторы состояния X_i и управления U_i (i= $\overline{1,N}$), где N+1 – количество структурных преобразований СДС с учетом структурного преобразования, связанного с началом движения СДС (i=0), состоящие соответственно из векторов состояния и управления квадрокоптеров, перемещающихся по ветвям траектории в данном интервале времени.

В результате применения указанной методики приходим к следующей постановке задачи оптимизации разрывной системы с переменным размером векторов состояния и управления [8 – 9].

$$I = S(X_{1(}(t_0^+), t_0;\ X_{1(}(t_1^-),\ X_{2(}(t_1^+), t_1; X_{2(}(t_2^-),\ X_{3(}(t_2^+), t_2; \ldots$$
$$\ldots; X_{i(}(t_i^-),\ X_{i+1(}(t_i^+), t_i; \ldots; \ldots; X_{N(}(t_N^-),\ t_N) + \sum_{i=1}^{N} \int_{t_{i-1}^+}^{t_i^-} \Phi(\mathrm{X, U, t})\mathrm{dt} \to \min; \tag{10}$$

$$G_i(X_{1(}(t_0^+), t_0;\ X_{1(}(t_1^-),\ X_{2(}(t_1^+), t_1; \ldots; X_{N(}(t_N^-), t_N) \begin{cases} = 0, & \overline{i = 1, K_G}\ ; \\ \le 0, & \overline{i = K_G + 1, N_G} \end{cases}; \tag{11}$$

$$Q_{ij}(X_{i(}(t), U_i(t), t) \begin{cases} = 0, & \overline{j = 1, K_{Q_i}}\ ; \\ \le 0, & \overline{j = K_{Q_i} + 1, N_{Q_i}} \end{cases}; \tag{12}$$

$$\dot{X}_i = F_i(X_i, U_i, t),\ t \in \left[t_{i-1}^+,\quad t_i^-\right],\ i = \overline{1, N}\ ; \tag{13}$$

$$X_i \in E^{n_{\sum i}},\ \ U \in \cap_i \subset E^{m_{\sum i}};\ U_i(\cdot) - \text{ кусочно-непрерывно.} \tag{14}$$

Здесь X_i, U_i – расширенные векторы фазового состояния и управляющих воздействий размерности $n_{\sum i}$ и $m_{\sum i}$, соответствующие i-му интервалу времени между структурными преобразованиями СДС; $\cap_i$ – ограниченное множество пространства $E^{m_{\sum i}}$; $S(\cdot)$, $G_j(\cdot)$ $(j = \overline{1, N_G;})$ – гладкие на $E^{2\sigma} \times E^{\mathrm{N}+1}(\sigma = \sum_{i=1}^{N} n_{\sum i})$ скалярные функции переменных $\mathrm{X}_1, \ldots \mathrm{X}_{\mathrm{N},}\ t_0, \ldots t_N; Q_j(\cdot)\ (j = \overline{1, N_G}\ )$ – непрерывные на $E^{2\sigma} \times E^{\mathrm{N}+1}(\sigma = \sum_{i=1}^{N} n_{\sum i})$ вместе с первыми производными по всем своим аргументам скалярные функции, для которых соотношения (12) удовлетворяют условию общности положения [8], т. е. векторы $\mathrm{grad}_{\mathrm{U_i}}\, \mathrm{Q_j}(X_i(t), U_i(t), t)$ $(j = \overline{1, K_{G,i}})$ и $\mathrm{grad}_{\mathrm{U_i}}\, \mathrm{Q}_\gamma(X_\gamma(t), U_\gamma(t), t)$ $(\gamma \in I_\gamma;\ I_\gamma$ – множество все индексов из

($j=\overline{K_{G,i}+1,N_{Q,i}}$, для которых $Q_j(\cdot)=0$) линейно независимы; $F_i(\cdot)$ – непрерывное вместе с матрицей производных ${}_iF_{x_i}$ отображение: $E^{n_{\sum i}}\times\Omega\times E^1\to E^{n_{\sum i}}$; K_G, N_G, K_Q, N_Q, N – заданные целые числа, $0\le K_G\le N_G$, $K_G\langle\sum_{i=1}^{N}(2n_{\sum i}+1)+1$; $0\le K_{Q,i}\le N_{Q,i}$; $K_{Q,i}+K_\gamma\langle m_{\sum i}$, где K_γ – количество индексов γ.

Следует отметить, что только приведение задачи оптимизации ветвящейся траектории СДС к оптимизации траектории разрывной системы с переменным размером вектора состояния и управления (10) – (14) позволяет сформулировать теоремы, на основании которых можно выполнять оптимизацию траектории СДС с произвольной схемой ветвлений. В противном случае каждая новая схема ветвлений траектории СДС требует выполнения всей процедуры доказательств, учитывающих особенности траектории.

Как было сказано выше, третий этап решения задачи оптимизации ветвящейся траектории СДС состоит в возвращении к терминам исходной формулировки задачи. Приведение условий оптимальности управления и траектории разрывной динамической системы к условиям оптимальности СДС, формальным эквивалентом которой является разрывная система, осуществляется декомпозицией расширенных векторов состояния и управления, ограничений и граничных условий, вспомогательных функций и переменных, использовавшихся в ходе применения метода оптимизации, в последовательности, обратной исходным преобразованиям, приведшим к переходу от СДС к разрывной динамической системе, по правилу перехода к исходным терминам. Для наиболее типичных случаев такой переход будет рассматриваться в последующих публикациях в форме следствий из основной теоремы, в которой сформулирован результат решения задачи (10) – (14).

Выводы. В работе рассмотрены вопросы математического моделирования движения квадрокоптера. Предложены расчетная схема и математическая модель режимов пространственного движения квадрокоптера, учитывающая кинематические связи, механические процессы в системе вращающихся винтов квадрокоптера, а также алгоритмы выработки управляющих воздействий.

Предложена методика преобразования составной динамической системы в разрывную динамическую систему с изменяющимся в моменты структурных преобразований размером векторов состояния и управления с учетом заданных критериев.

Кроме этого, решена задача оптимизации траектории движения группы квадрокоптеров, позволяющая определить оптимальные координаты и моменты времени разделения их траекторий, а также оптимальные управления и траектории движения квадрокоптеров к заданным целям по отельным ветвям траектории после разделения, минимизирующие заданные критерии.

1. Aerodynamics and control of autonomous quadrotor helicopters in aggressive maneuvering / *H. Huang, G. M. Hoffmann, S. L. Waslander, and C. J. Tomlin* // IEEE International Conference on Robotics and Automation, May 2009. – P. 3277 – 3282.
2. Quadrotor Helicopter Flight Dynamics and Control: Theory and Experiment / *G.M. Hoffmann, H. Huang, S. L. Waslander, and C.J. Tomlin* // In Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference

and Exhibit : August, 2007, South Carolina, Hilton Head, American Institute of Aeronautics and Astronautics. – P. 6461 – 6481.
3. *Bresciani T.* Modeling, identification and control of a quadrotor helicopter / *T. Bresciani //* Master's thesis. October, 2008, Department of Automatic control, Lund University. – P. 170.
4. *Tahar M.* Control of under-actuated X4-flyer using indegral Backstepping controller / *M. Tahar, K. Zemalache, A. Omari //* Open Science Journal, Przeglad elektrotechniczny, Warszawa. – 2011. – October. – P. 251 – 256.
5. Increasing of manet throughput using quasi-optimal UAVs placement control / *O. Lysenko, I. Uryadnikova, S. Valuiskyi, S. Chumachenko* // Journal «Science&Military», Akademia ozbrojenyah sil. Gen. M.R. Stefanika, Slovakia. – 2013. –Volume 8, №1. – P. 52 – 61.
6. *Лысенко А. И.* Моделирование оптимального движения составной динамической системы / *А. И. Лысенко //* Електронне моделювання. – 1989. – Т.11, № 4. – С. 71 – 76.
7. *Лысенко А. И.* Необходимые условия оптимальности траектории составной динамической системы / *А. И. Лысенко //* Сборник "Авиационные приборы, навигационные системы обеспечения жизнедеятельности экипажей ЛА". – ВВИА им. проф. Жуковского, 1988. – С. 11 – 18.
8. *Ащепков Л. Т.* Оптимальное управление разрывными системами / *Л. Т. Ащепков*. – Новосибирск : Наука, 1987. – 226 с.
9. *Иванов В. А.* Теория оптимальных систем автоматического управления / *В. А. Иванов, Н. В. Фалдин*. – М. : Наука, 1981. – 336 с.

Украинский научно-исследовательский
институт гражданской обороны,
Киев

Национальный технический
университет «КПИ»,
Киев

Национальный авиационный
университет,
Киев

Получено 22.02.2016,
в окончательном варианте 09.03.2016