

В. Д. Лакиза

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ КОМПОЗИТНОЙ  
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ  
ПРИ ДВУХЧАСТОТНОМ ВОЗБУЖДЕНИИ**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина: e-mail: volna@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** The results of experimental study of specificity in nonlinear dynamical processes of deforming the elastic wall of glass-reinforced plastic cylindrical shell (“dry” and filled) under kinematic two-frequency excitation in conditions of beating regime are proposed. It is revealed that the nonlinear processes of deformation of shell under excitation shown above (especially, in the zone of two closed frequencies with modes  $n=3$  and  $n=5$ ) can be accompanied by the change of amplitude and mode of deformation from one mode  $n=3$  to two modes  $((n=3)+(n=5))$  in circumferential direction and also for one mode  $n=3$  – by transition from the running wave to the standing wave.

**Key words:** glass-reinforced plastic cylindrical shell, filler, coupled bending modes, two-frequency excitation.

**Введение.**

Исследование специфики процессов деформирования упругих цилиндрических оболочек существенно зависит от основных факторов (параметров внешнего периодического воздействия), так и других. Например, наличие заполнителя (жидкость, сыпучий материал) в тонкостенных цилиндрических оболочках при определенных условиях (при свободных колебаниях или при действии периодических нагрузок) может привести к появлению сложных многомодовых или многоволновых форм их динамического деформирования. В настоящее время исследованию процессов деформирования оболочечных конструкций, а также нелинейных и резонансных явлений, обусловленных наложением и нелинейным взаимодействием нескольких форм изгибных колебаний, создающих предпосылки для реализации сложных форм их деформирования (таких, как распространяющиеся в окружном направлении бегущие волны, хаотические процессы и др.) при одночастотном возбуждении посвящено достаточно большое количество таких теоретических и экспериментальных исследований [2, 3, 6, 7, 8, 9, 12 – 14]. Установлено, что даже форма оболочки при чисто гармонических нагрузках может оказывать влияние на области динамической неустойчивости (ОДН) оболочек [4]. Так, ОДН для цилиндрической оболочки расположена ниже по частотной оси и значительно шире, чем для оболочки знакопеременной кривизны. В большой степени такая ситуация характерна для оболочек с композитной структурной строения материала [1, 8]. Поэтому актуальными на современном этапе являются экспериментальные исследования колебательных и волновых процессов в композитных оболочечных конструкциях при взаимодействии их с жидкостью. При этом, как отмечено в [5], экспериментальные методы исследований не только дают реальную карти-

ну поведения механических конструкций под действием переменных нагрузок, но и позволяют оценить границы применимости тех или иных теоретических моделей. Этот факт подтвержден исследованиями частот и форм свободных колебаний изотропных круговых цилиндрических оболочек с помощью экспериментального метода голографической интерферометрии.

К актуальным и важным проблемам механики деформируемых тел относятся исследования нелинейных колебаний (т.е. колебаний с большими прогибами) тонкостенных оболочек, изготовленных из слоистых композитных материалов, при сложном вибровозбуждении. Это обусловлено тем, что в реальных условиях эксплуатации оболочечные элементы конструкций, содержащие жидкость, которые используются в авиационной и ракетной технике, в химическом машиностроении и т.д. подвергаются воздействию различного рода сложных вибрационных нагружений. Специфика динамического поведения оболочек, заполненных жидкостью, более интенсивная при сложном двухчастотном вибрационном возбуждении [10, 11], по сравнению с одночастотным воздействием вибрации [8, 12].

В данной работе приведены результаты экспериментальных исследований особенностей нелинейных динамических процессов деформирования стеклопластиковой оболочки («сухой» и с заполнителем) при продольном кинематическом двухчастотном вибровозбуждении. Основное внимание уделяется установлению и анализу, влиянию соотношений между двумя частотами кинематического возмущения и собственными частотами испытываемой оболочки, а также амплитуд кинематического возмущения, при которых реализуются наиболее интенсивные процессы деформирования оболочки. Рассматривается также влияние характера изменения частоты возбуждения и заполнителя на степень реализации данных процессов.

### **§ 1. Модель, экспериментальное оборудование и методика исследований.**

Экспериментальные исследования проведены с упругой трехслойной композитной цилиндрической оболочкой высотой  $H_{об} = 900$  мм с внутренним диаметром  $D_{об} = 320$  мм при толщине стенки  $\Delta_{об} = 0,68$  мм. Продольное кинематическое возбуждение создано при помощи электродинамического вибратора ВЭДС-100. При этом оболочка установлена вертикально на подвижную платформу вибратора, ее верхний торец остался свободным, а нижний – введен в кольцевое углубление кругового диска, жестко связанного с платформой вибратора. Зазор между оболочкой и диском заполнен эпоксидной смолой, после отверждения которой реализовано краевое условие, близкое к жесткому защемлению. При двухчастотном вибровозбуждении использованы: генератор, встроенный непосредственно в стойку вибростенда, и внешний генератор типа «Роботрон» (при одночастотном возбуждении использован один из них). Для измерения и контроля уровней виброускорения подвижной платформы вибростенда и стенки оболочки использованы датчики ИС-318 и Д-14, работающие с виброизмерительным блоком вибростенда, а также микродатчик АД-1 массой около 1 г с прибором ВШВ-3. Анализ поступающих с датчиков сигналов и измерение амплитуд виброускорения, частот, осуществлено низкочастотным анализатором типа 2031 фирмы «Брюль и Къер» и милливольтметром ВЗ-56. Для измерения амплитуды колебаний торца оболочки в зоне пучности использован мерный клин [1, 11].

При проведении исследований в качестве заполнителя упругой оболочки, масса которой  $m_{об} = 0,9$  кг, использовано пенопластиковые шарики диаметром (15...20) мм. Масса такого заполнителя в данной оболочке меньше по сравнению с массой воды, что обеспечивало сохранение целостности тонкостенной оболочки.

В проводимых исследованиях оболочка при уровнях заполнителя  $H_3 = (0,3; 0,5) H_{об}$ , а также без заполнителя ( $H_3=0$ ), подвергалась воздействию вибрации в диапазоне частот  $\Delta f_B = (50...200)$  Гц при амплитудах внешнего кинематического вибровоздействия  $g_B = (2...20) g_0$ .

Для установления степени влияния двухчастотного вибровозбуждения на характер деформирования оболочки с наполнителем и без наполнителя в начале исследуемая оболочка подвергалась одночастотному осевому кинематическому воздействию вибрации. Как показали ранее проведенные исследования [1, 8, 11], при одночастотном вибровозбуждении тонкостенных композитных оболочек (в основном «сухих оболочек») максимальные амплитуды колебаний деформирования оболочки реализуются в области резонансных частот, особенно при возбуждении бегущих окружных волн. При этом определены области динамической неустойчивости (ОДН), в которых реализуются наиболее интенсивные процессы деформирования оболочки при меньших амплитудах внешнего возбуждения, а также диапазоны частот, в которых реализуется процесс деформирования оболочки в виде бегущей волны. Также определены уровни внешнего вибровозбуждения  $g_b$ , при которых наблюдаются эти процессы, и степень влияния уровня наполнителя  $N_3$  на них. Исходя из полученной информации о специфике реализации каждого из данных нелинейных процессов и их интенсивности при одночастотном осевом параметрическом виброн нагружении, определены соответствующие варианты двухчастотного возбуждения.

## § 2. Результаты экспериментальных исследований и их анализ.

**2.1. Режимы деформирования упругой стенки оболочки при одночастотном кинематическом возбуждении.** Перед исследованием деформирования цилиндрической оболочки предварительно определены границы ОДН, в которых возбуждались параметрические колебания. В [1, 8] представлены эти области, полученные при виброиспытаниях различных стеклопластиковых оболочек в случае относительно небольших амплитуд внешних воздействий.

В результате проведенных экспериментальных исследований выявлено, что в рассматриваемой цилиндрической оболочке происходит возбуждение двух окружных мод:  $n = 3$  и  $5$ . Исследования особенностей возбуждения окружных форм колебаний стенки оболочки проводились при уровнях кинематического возбуждения  $g_b = (5, 10, 15 \text{ и } 20)g_0$ . При данных уровнях воздействия возбуждалась окружная мода  $n = 3$  «сухой» оболочки. При этом исследуемая оболочка, вследствие влияния начальных неправильностей в зоне параметрического резонанса, дважды теряет устойчивость. Первый раз, когда возбуждается основная, отвечающая низшей собственной частоте, изгибная форма; второй – когда возбуждается сопряженная форма. Экспериментальные исследования показали, что при определенных уровнях внешнего воздействия  $g_b$  и наполнителя  $N_3$ , а также, особенно от направления сканирования частоты возбуждения  $f_b$  оболочки, происходит пересечение двух ОДН по данной моде ( $n = 3$ ), что приводит к потере устойчивости оболочки по двум сопряженным формам одновременно. В результате наложения этих форм и их взаимодействия реализуется сложный процесс деформирования оболочки в виде бегущей волны [1, 8, 11], распространяющейся в окружном направлении. Возбуждение колебаний «сухой» оболочки с волновым параметром  $n = 5$  реализуется при  $g_b = (10, 15 \text{ и } 20) g_0$ . При возбуждении данной моды колебаний также дважды происходит потеря устойчивости, но в данном случае реализуется лишь одна окружная форма, вследствие чего бегущая волна отсутствует.

Как показали исследования, вследствие гистерезисного эффекта [1, 8], положение и ширина областей, в которых возбуждаются параметрические колебания, зависят от направления сканирования частоты возбуждения  $f_b$  и уровней возбуждения  $g_b$ .

Численные значения диапазонов частот ОДН используемой сухой оболочки с волновыми параметрами  $n = 3$  и  $n = 5$  при увеличении ( $\rightarrow$ ) и уменьшении ( $\leftarrow$ ) частоты возбуждения  $f_b$  приведены в табл. 1 ( $n = 3$ ) и в табл. 2 ( $n = 5$ ). Здесь представлены данные диапазонов частот стоячих и бегущих волн, а также данные максимальных амплитуд колебаний  $2A$  стенки оболочки в пучностях мод  $n = 3$  и  $n = 5$  при указанных уровнях возбуждения на резонансных частотах при увеличении и уменьшении

частоты возбуждения. Регистрация ОДН производилась при уровнях осевого кинематического возбуждения  $g_b$ , указанных ранее.

Таблица 1

$g_b$	$f_b \rightarrow \leftarrow$	$f_b, \Gamma\text{ц}$					$2A_{\max}$
		$F_{\text{CT}}^1 (n=3)$	$\Delta F_{\text{CT}}^1$	$F_{\text{O}}$	$F_{\text{CT}}^2 (n=3)$	$\Delta F_{\text{CT}}^2$	
5	$\rightarrow$	79,0...79,8	0,8	–	81,8...82,1	0,3	4
	$\leftarrow$	77,0...79,1	2,1	–	79,1...81,2	2,4	6
10	$\rightarrow$	78,2...79,8	1,6	–	79,8...82,7	2,9	10
	$\leftarrow$	75,2...78,9	3,7	79,0...79,3	79,4...82,8	3,4	12
15	$\rightarrow$	77,9...79,5	1,6	–	79,5...84,0	4,5	11
	$\leftarrow$	74,9...78,5	3,6	78,6...79,1	79,2...84,0	4,8	13
20	$\rightarrow$	77,2...79,0	1,8	79,1...79,3	79,4...84,0	4,6	15
	$\leftarrow$	74,2...77,8	3,6	77,9...79,0	79,1...84,0	4,9	17

Таблица 2

$g_b$	$f_b \rightarrow \leftarrow$	$f_b, \Gamma\text{ц}$		$2A_{\max}, \text{мм}$
		$F_{\text{CT}}^1 (n=5)$	$\Delta F_{\text{CT}}^1$	
10	$\rightarrow$	85,0...85,6	0,6	2,5
	$\leftarrow$	85,0...85,6	0,6	2,5
15	$\rightarrow$	84,8...85,9	1,1	4
	$\leftarrow$	84,2...85,9	1,7	5
20	$\rightarrow$	84,7...86,0	1,3	6
	$\leftarrow$	84,1...86,0	1,9	7

Как видно из приведенных данных (табл. 1 и 2), колебания с наибольшими амплитудами  $2A$  свободного торца оболочки в радиальном направлении реализуются с волновым параметром  $n = 3$ .

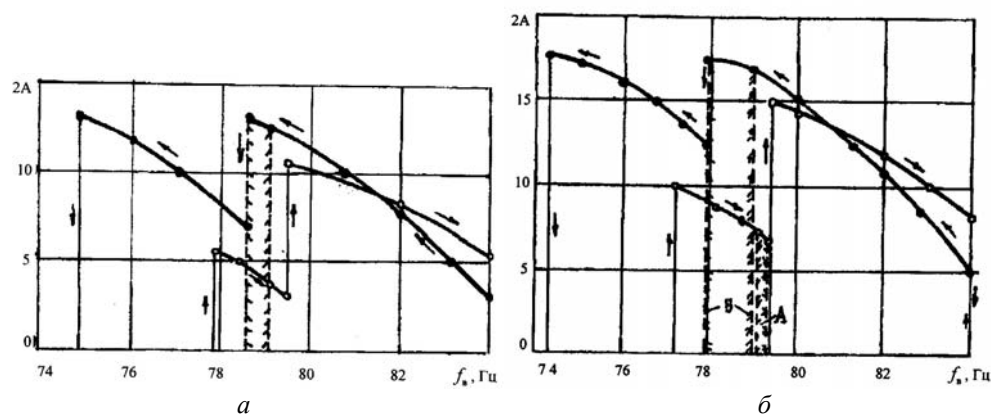


Рис.1

На рис. 1 приведены амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) параметрических колебаний торца оболочки, соответствующие моде  $n = 3$ , при двух уровнях перемещения подвижной платформы вибростенда:  $g_b = (15 \text{ и } 20) g_0$ . Светлыми точками отмечены прогибы, зафиксированные при прямом сканировании частоты колебаний основания  $f_b$ , зачерненные – при обратном. Рис. 1, *a* построен при  $g_b = 15g_0$ , рис. 1, *b* – при  $g_b = 20g_0$ . Как видно из рисунков, вследствие влияния начальных неправильностей исследуемая оболочка в зоне параметрического резонанса дважды теряет устойчивость. Так, при увеличении частоты возбуждения, начиная с  $f_b = 76$  Гц ( $g_b = 15 g_0$ ), первый раз происходит потеря устойчивости на частоте  $f_b = 77,9$  Гц и возбуждается первая основная окружная форма, соответствующая низшей собственной частоте ( $F_{06} = 1/2 f_2$ ) (рис.1, *a*). При дальнейшем увеличении частоты возбуждения на  $f_b = 79,5$  Гц происходит срыв колебаний по данной форме, а через (1...2) сек скачкообразно увеличивается амплитуда колебаний оболочки и возбуждается «сопряженная» форма, т.е. оболочка второй раз теряет устойчивость. Следует отметить, что при данном уровне осевого возбуждения ( $g_b = 15 g_0$ ), а также и при  $g_b = (5 \text{ и } 10) g_0$ , как установлено в ходе проведенных экспериментальных исследований при одночастотном вибровозбуждении, в случае увеличения частоты возбуждения зоны динамической неустойчивости, не пересекаются. Поэтому взаимодействие сопряженных форм здесь будет отсутствовать и возбуждения бегущих волн не происходит (табл. 1). При  $g_b = 20 g_0$  наблюдается частичное пересечение данных областей, так что в некоторой частотной области ( $\Delta f_b = (79,1 \dots 79,4)$  Гц), в случае увеличения частоты возбуждения, происходит потеря устойчивости оболочки по двум формам одновременно, что приводит к возбуждению бегущей волны (рис. 1, *b*, табл. 1).

При обратном сканировании частоты возбуждения  $f_b$  (уменьшение  $f_b$ ) реализуется, как обычно, гистерезисное «затягивание» колебательных режимов [8], что сопровождается расширением областей главного и побочного параметрических резонансов. Это приводит к пересечению двух ОДН при меньших уровнях внешнего кинематического воздействия. В данных проводимых исследованиях с «сухой» оболочкой это наблюдалось при  $g_b = (10, 15 \text{ и } 20) g_0$ , что сопровождается взаимодействием сопряженных форм окружной формы  $n = 3$  и возбуждением бегущей волны (рис. 1, табл. 1). На рис. 2 приведено сравнение областей возбуждения параметрических колебаний исследуемой «сухой» оболочки при прямом (рис. 2, *a*) и обратном (рис. 2, *b*) медленном прохождении резонансных зон, соответствующих моде  $m = 1$ ;  $n = 3$ . По вертикальной оси отложены уровни ускорения подвижной платформы вибратора, по горизонтальной – частоты кинематического возбуждения оболочки.

Как следует из рис. 2, *a*, пересечение ОДН, отвечающих сопряженным формам, при увеличении  $f_b$  происходит при уровнях  $g_b = (19,5 \dots 20) g_0$  (область А), а в случае уменьшения частоты возбуждения – при  $g_b = (8,5 \dots 20) g_0$ , рис. 2, *b* (область Б). Как видно из приведенных данных (рис. 1 и 2, табл. 1), полученных из проведенных экспериментальных исследований, область А намного уже области Б, в которых возбуждаются бегущие волны.

Исследование зависимостей ОДН испытуемой оболочки от амплитуды внешнего кинематического возбуждения  $g_b$  и уровня пенопластикового заполнителя  $H_3$  позволило выявить, что с увеличением  $g_b$  ОДН расширяется, а при увеличении  $H_3$  – сужается. Диапазон частот ОДН с увеличением уровня  $g_b$  расширяется как при уменьшении частоты возбуждения  $f_b$ , так и при ее увеличении. Наличие пенопластикового заполнителя не только интенсифицирует процесс демпфирования, но и сужает диапазон частот ОДН, в которых возбуждаются интенсивные окружные колебания внешнего торца оболочки.

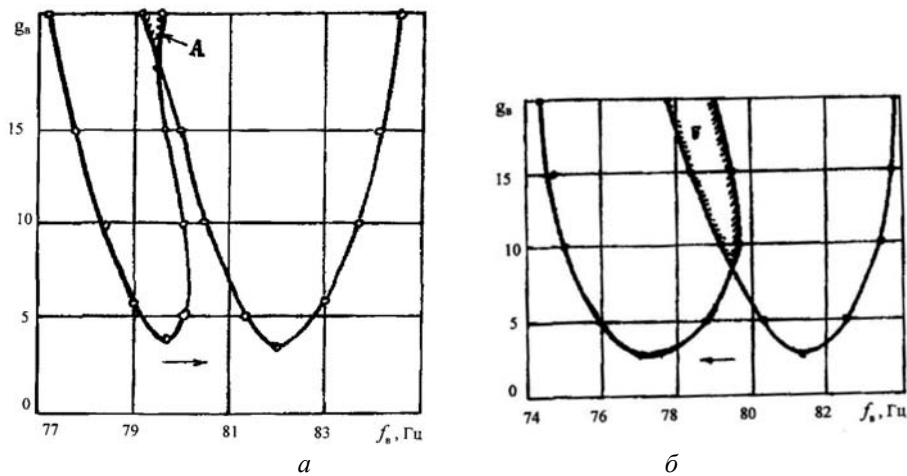


Рис.2

Особенно это проявляется при уровне  $H_3 = 0,5 H_{об}$ . При данном уровне заполнителя окружные колебания свободного верхнего торца оболочки по форме  $n = 3$  реализуются при  $g_b = (15 \text{ и } 20)g_0$ , а  $n = 5$  реализуются лишь при  $g_b = 20 g_0$ .

Таким образом, анализ результатов исследований при одночастотном возбуждении показал, что наиболее широкий спектр нелинейных процессов деформирования упругой стенки оболочки наблюдаются в области наименьших резонансных частот сопряженных форм с волновым параметром  $n = 3$ . Специфика возбуждения бегущих волн зависит от направления сканирования частоты возбуждения  $f_b$ , амплитуды внешнего вибровозбуждения  $g_b$  и уровня заполнителя  $H_3$ , находящегося в оболочке.

2.2. Особенности процессов деформирования упругой стенки оболочки при суммарном кинематическом вибровозбуждении. Исходя из установленного характера деформирования оболочки, «сухой» и при наличии пенопластикового заполнителя, при одночастотном кинематическом осевом вибровозбуждении, в дальнейших исследованиях использовано несколько вариантов двухчастотного вибровоздействия. В данной серии исследований принят набор частот, соответствующий частотам сопряженных форм с волновым параметром  $n = 3$ , а также не сопряженных форм  $n = 5$ , которые соответствуют двум ОДН (рис. 3).

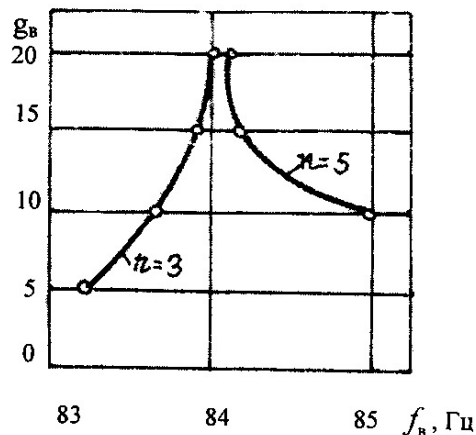


Рис. 3

Причем, выбирались те частоты, на которых реализуются наиболее интенсивные нелинейные процессы деформирования (что отмечено ранее). При этом основное внимание уделено исследованию динамического поведения оболочки в зависимости от соотношения частот и уровня амплитуды внешнего возбуждения при двухчастотном возбуждении.

Первый вариант: в качестве основной частоты возбуждения  $f_b^1$  задавалась одна из удвоенных резонансных частот окружных сопряженных форм оболочки  $f_b^1 = 2 F_p$ , а вторая частота  $f_b^2$  выбиралась равной частотам близким по значению к первой частоте возбуждения  $f_b^2 \approx f_b^1 = 2 F_p$ .

Второй вариант: основная частота возбуждения  $f_B^1$  соответствовала удвоенной частоте бегущей волны с параметром  $n = 3$   $f_B^1 = 2 F_0$ , а другая  $f_B^2$  – близким частотам к удвоенной частоте бегущей волны ( $f_B^1 = 2 F_0$  и  $f_B^2 \approx 2 F_0$ ).

Третий вариант: в качестве первой частоты возбуждения  $f_B^1$  использована одна из крайней критической частоты, соответствующая моде  $n = 3$ , а вторая частоте  $f_B^2$  – моде  $n = 5$ .

В результате проведенных исследований установлено, что наиболее существенное влияние на нелинейные процессы деформирования композитной оболочки наблюдаются в случае совместного воздействия одной из резонансных частот  $F_p$  окружной формы или частоты бегущей волны  $F_0$  волнового параметра  $n = 3$  с частотами близкими по значению к данным частотам:  $f_B^1 = 2 F_{p_2}$  и  $f_B^2 \approx 2 F_{p_2}$ ;  $f_B^1 = 2 F_0$  и  $f_B^2 \approx 2 F_0$ . Также был обнаружен своеобразный процесс деформирования стенки оболочки при двухчастотном вибровозбуждении, частоты которого соответствуют двум модам:  $f_B^1 (n = 3)$  и  $f_B^2 (n = 5)$ . Наиболее интенсивно процессы деформирования реализуются при небольшом отличии частот  $f_B^1$  и  $f_B^2$ : (0,1...0,2) Гц. Так, упругая оболочка без заполнителя ( $H_3 = 0$ ), а также при уровнях заполнителя  $H_3 = (0,3; 0,5) H_{об}$ , подвергалась влиянию вибрации в соответствии с первым вариантом. «Сухая» оболочка подвергалась двухчастотному возбуждению, частоты которого ( $f_B^1$  и  $f_B^2$ ) равны удвоенной величине резонансной частоте  $f_B^1 = 81,5$  Гц  $= 2 F_p$  поперечных колебаний оболочки, одной из сопряженных форм с волновым параметром  $n = 3$ , на которой колебания реализуются при меньшей амплитуде возбуждения  $g_B$  и близкой ей частоте  $f_B^2 = 81,6$  Гц при уровне осевого кинематического возбуждения  $g_B = 4,0 g_0$ . Такое совместное воздействие приводит к возникновению режима биений [11] (частота биений  $\omega_6 \approx 0,1$  Гц), что сопровождается изменением как амплитуды виброускорения кинематического возбуждения, так и амплитуды параметрического колебания стенки оболочки.

В табл. 3 приведены данные о степени изменения амплитуд колебаний оболочки  $F = 2 A$  мм ( $f_B^1$  и  $f_B^2$ ) с волновым параметром  $n = 3$  и кинематического возбуждения  $G = g_B$  ( $f_B^1$  и  $f_B^2$ ) при двухчастотном возбуждении, а также данные об амплитудах колебаний стенки оболочки  $F_1 = 2 A$  мм ( $f_B^1$ ) при одночастотном возбуждении  $G_1 = g_B$

( $f_B^1$ ) с уровнем заполнения  $H_3 = (0; 0,3; 0,5) H_{об}$ .

Как видно из проведенных данных (табл. 3), в результате реализации режима биений при данном варианте осевого возбуждения ( $f_B^1 = 81,5$  Гц и  $f_B^2 = 81,6$  Гц) происходит изменение амплитуды кинематического возбуждения в пределах  $g_B = (3,5...5) g_0$ , а также, соответственно, и амплитуды колебаний стенки оболочки («сухой») в пучностях  $-2 A = (4,5...7)$  мм. При одно-

Таблица 3

$f_B, \text{ Гц},$ $F, F_1,$ $G, G_1$	$H_3 / H_{об}$		
	0	0,3	0,5
$f_B^1$	81,5	81,7	82,2
$f_B^2$	81,6	81,8	82,3
$F$	4,5...7	3,5...5,	1...2,5
$G$	3,5...5	3...4,6	3...4,2
$F_1$	6	4,5	3
$G_1$	4	4	4

частотном возбуждении ( $f_b^1 = 81,5$  Гц;  $g_b = 4 g_0$ ) амплитуда колебаний стенки оболочки достигла значения:  $2A = 6$  мм.

Процесс деформирования «сухой» оболочки с волновым параметром  $n = 5$  при двухчастотном возбуждении ( $f_b^1 = F_p$  (85,2 Гц) и  $f_b^2 = 85,3$  Гц) реализуется с меньшими амплитудами колебаний:  $2A = (1,5 \dots 2)$  мм и при больших амплитудах внешнего возбуждения  $g_b = (8,5 \dots 9,2)g_0$  по сравнению с формой  $n = 3$ .

Для исследования процессов деформирования оболочки при реализации режима бегущей волны (второй вариант), который был выявлен при одночастотном осевом кинематическом возбуждении в сухой оболочке и при уровнях заполнителя  $N_3 = (0,3; 0,5)$   $N_{об}$  использовано несколько способов двухчастотного возбуждения. В данной серии исследований использован набор частот, соответствующих частотам ОДН сопряженных форм нелинейных процессов деформирования с волновым параметром  $n = 3$ , которые реализуются, как отмечено ранее, в испытываемой оболочке только по данной форме при кинематическом возбуждении.

При этом, как было установлено, при одночастотном вибровозбуждении, специфика деформирования стенки оболочки в окружном направлении зависит не только от частоты, но и от амплитуды кинематического возбуждения. В зависимости от уровня амплитуды  $g_b$  внешнего вибровозбуждения происходит реализация бегущей или стоячей окружной формы деформирования верхнего торца оболочки. Бегущая волна реализуется при больших амплитудах  $g_b$ , а стоячая – при меньших.

При исследовании процессов деформирования сухой оболочки при двухчастотном вибровозбуждении  $f_b^1$  и  $f_b^2$  в качестве основных частот  $f_b^1$  использовано частоты, которые соответствуют частотам бегущих волн  $f_b^1 = F_6$  при стартовых уровнях кинематического возбуждения  $g_b = (10, 15, 20)g_0$ . При этих уровнях реализуется сложный процесс деформирования стенки оболочки в виде бегущей волны с наибольшими амплитудами  $2A$ , а другие ( $f_b^2$ ) – равны близким частотам, соответствующие данным стартовым уровням возбуждения:  $f_b^1 = 2F_6 = (79,0; 78,6; 77,9)$  Гц и  $f_b^2 \approx 2F_6 = (\Delta 78,5 \dots 79,5; 78,0 \dots 80,0; 77,0 \dots 80,0)$  Гц.

При двухчастотном возбуждении «сухой» оболочки анализ результатов экспериментальных исследований показал, что в используемых областях частот  $\Delta f_b$  в результате изменения уровня возбуждения  $g_b$ , обусловленного реализацией режима биеений при взаимодействии двух частот возбуждения [11], происходит циклическое изменение формы деформирования от режима бегущей волны к стоячей, и наоборот.

На рис. 4 приведены данные о ширине диапазонов частот, в которых реализуются бегущие волны свободного торца сухой оболочки при одночастотном (кривая 1) и двухчастотном (кривая 2) возбуждениях, при стартовых уровнях  $g_b = (10; 15; 20)g_0$ .

Наиболее интенсивно данный процесс деформирования свободного торца сухой оболочки реализуется при двухчастотном возбуждении, частоты которого ( $f_b^1$  и  $f_b^2$ ) равны частотам бегущих волн  $f_b^1$  и близким к ним частотам.

Так, при стартовом уровне  $g_b = 15,0g_0$  и совместном воздействии двух частот  $f_b^1 = F_6$  (78,6 Гц) и  $f_b^2 = 78,5$  Гц циклический процесс реализуется в пределах  $t = (8 \dots 9)$  сек при изменении амплитуды возбуждения  $g_b = (13,0 \dots 16,0)g_0$ . При этом бегущая волна реализуется при  $g_b = (14,5 \dots 16,0)g_0$  в пределах  $t = (4 \dots 5)$  сек в диапазоне частот  $\Delta f_b = (78,5 \dots 79,1)$  Гц (рис. 4, а, кривые 2), а при уровнях  $g_b = (13,0 \dots 14,5)g_0$  реализуется стоячая волна в пределах  $t = (3 \dots 4)$  сек.

Кроме процесса циклического изменения формы деформирования стенки оболочки при данных параметрах внешнего возбуждения, в результате изменения амплитуды кинематического возбуждения  $g_b$ , соответственно, происходит и циклическое измене-



ние амплитуд колебаний стенки оболочки в пучностях  $-2A=(8...15)$ мм. При одночастотном возбуждении бегущей волны ( $f_b^1=78,6$  Гц;  $g_b=15,0g_0$ ) амплитуда колебаний стенки сухой оболочки достигла значения  $2A=13$ мм.

При проведении исследований специфики процессов деформирования композитной оболочки при наличии в ней заполнителя установлено, что циклические процессы, описанные выше, реализуются при больших амплитудах кинематического возбуждения  $g_b$  и в меньших диапазонах частот.

Цилиндрическая оболочка при уровне заполнителя  $N_3=0,5N_{06}$  подвергалась двухчастотному осевому кинематическому воздействию, основные частоты которого равны частотам бегущих волн ( $f_b^1=F_6$ ) при стартовых уровнях кинематического возбуждения  $g_b=(15; 20)g_0$ , а другие ( $f_b^2$ ) – равны близким частотам, соответствующим следующим стартовым уровням возбуждения:  $f_b^1 = 2 F_6 (78,75; 78,2)$  Гц и  $f_b^2 \approx 2 F_6 = (177,5; ...179,0; 177,5...178,7)$  Гц. Как установлено ранее, при одночастотном вибровозбуждении реализация процесса деформирования стенки оболочки по типу бегущая волна формы  $n=3$  при уровне заполнителя  $N_3=0,5N_{06}$  реализуется при  $g_b=(15...20)g_0$ .

На рис. 4, б приведены данные о ширине диапазона частот, в которых реализуются бегущие волны свободного торца оболочки при одночастотном (кривая 1) и двухчастотном (кривая 2) возбуждениях при стартовых уровнях  $g_b = (15; 20)g_0$  и при данном уровне заполнения.

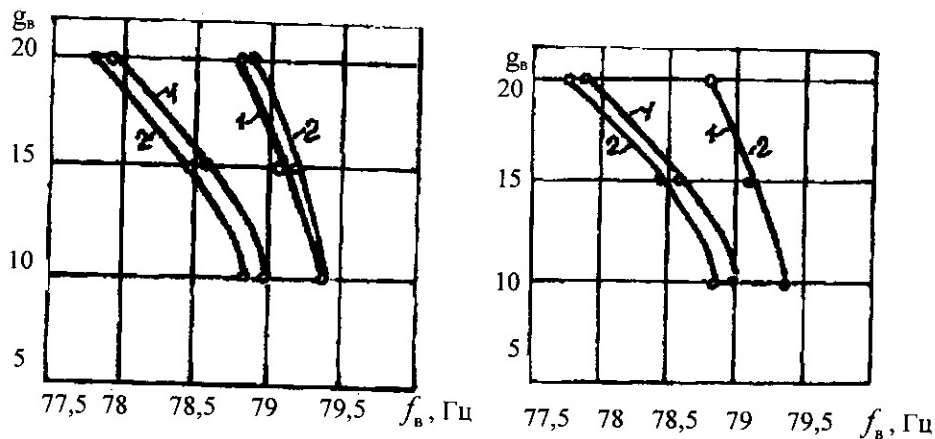


Рис. 4

При наличии заполнителя в оболочке наиболее интенсивно циклический процесс деформирования стенки оболочки, как и в сухой оболочке, реализуется при двухчастотном возбуждении, частоты которого равны частоте бегущей волны и близкой к ней частоте:  $f_b^1=F_6 (78,5$  Гц) и  $f_b^2=77,75$  Гц ( $N_3=0,5N_{06}$ ;  $g_b=15,0g_0$ ). При данном варианте возбуждения процесс деформирования оболочки реализуется в пределах  $t=(8...9)$ сек при изменении амплитуды возбуждения  $g_b=(13...16)g_0$ . Бегущая волна реализуется при  $g_b = (15...16)g_0$  в пределах  $t = (3...4)$  сек, а при уровнях  $g_b = (13...15)g_0$  возбуждается стоячая волна в пределах  $t = (4...5)$  сек. При данном циклическом процессе также происходит изменение амплитуды колебаний стенки оболочки в пучностях  $-2A=(9...12)$ мм. При одночастотном возбуждении бегущей волны ( $f_b^1=78,75$  Гц;  $g_b=15,0g_0$ ) амплитуда колебаний стенки оболочки при  $N_3=0,5N_{06}$  достигла значения:  $2A=10$ мм.

В третьем варианте двухчастотного возбуждения «сухой» оболочки ( $H_3 = 0$ ) использовано крайние критические частоты [1, 8], на которых возбуждаются радиальные колебания свободного верхнего торца оболочки по формам  $n = 3$  и  $n = 5$  при минимальных уровнях вибровозбуждения  $g_b$ . Спектр близких крайних критических частот данных двух форм колебаний в зависимости от уровня амплитуды кинематического возбуждения приведены на рис. 3.

При проведении данной серии экспериментальных исследований использовано два варианта двухчастотного вибровозбуждения с крайними критическими частотами форм  $n = 3$  и  $n = 5$ : вариант 3.1:  $f_B^1 = 84,0$  Гц ( $n = 3$ ) и  $f_B^2 = 84,2$  Гц ( $n = 5$ ); вариант 3.2:  $f_B^1 = 84,0$  Гц ( $n = 3$ ) и  $f_B^2 = 84,1$  Гц ( $n = 5$ ).

Установлено, что при одночастотном вибровозбуждении процесс возбуждения колебаний стенки оболочки с волновыми параметрами  $n = 3$  и  $n = 5$  зависит как от частоты  $f_B$ , так и от уровня амплитуды  $g_b$  внешнего периодического нагружения. Окружная форма колебаний  $n = 5$  свободного торца оболочки в своей ОДН на частоте  $f_B = 84,2$  Гц начинает возбуждаться при уровнях  $g_b = (14,0 \dots 14,5) g_0$ , а на частоте  $f_B = 84,1$  Гц – при  $g_b = (18,0 \dots 18,5) g_0$ , в то время как колебания оболочки по форме  $n = 3$  реализуются при меньших амплитудах  $g_b$ . Исходя из полученных данных стартовые амплитуды возбуждения при данных вариантах двухчастотного воздействия, соответственно составили: вариант 3.1:  $g_{bstr} = 14,5 g_0$ ; вариант 3.2:  $g_{bstr} = 18,5 g_0$ .

В результате совместного воздействия двух частот возбуждения реализуется режим биений [1, 8, 14] (частоты биений  $\omega_6 = (0,1; 0,2)$  Гц), что приводит как к изменению амплитуды кинематического воздействия  $g_b$ , так и амплитуды колебаний  $2A$  свободного торца оболочки.

Анализ результатов экспериментальных исследований показал (табл. 4), что при данных вариантах двухчастотного возбуждения  $f_B^1$  ( $n = 3$ ) и  $f_B^2$  ( $n = 5$ ) в результате циклического изменения общей амплитуды внешнего осевого кинематического воздействия  $g_b$  происходит своеобразное изменение окружной формы деформирования стенки оболочки: от одной ( $n = 3$ ) к суммарной ( $n = 3 + n = 5$ ), и наоборот. Так, при двухчастотном возбуждении с частотами  $f_B^1 = 84,0$  Гц и  $f_B^2 = 84,2$  Гц при стартовой амплитуде возбуждения  $g_{bstr} = 14,5 g_0$  циклическое изменение общей амплитуды возбуждения происходит в пределах  $g_b = (13,0 \dots 15,0) g_0$ . При уровнях  $g_b = (13,0 \dots 14,5) g_0$  реализуется лишь одна окружная форма –  $n = 3$  в пределах  $t = (5 \dots 6)$  сек, а при достижении уровней амплитуды кинематического возбуждения  $g_b = (14,5 \dots 15,0) g_0$  реализуется суммарная двухмодовая окружная форма деформирования верхнего свободного торца оболочки ( $n = 3 + n = 5$ ) в пределах  $t = (1 \dots 2)$  сек. В результате одновременного возбуждения двух окружных форм  $n = 3$  и  $n = 5$  существенно интенсифицируется процесс деформирования оболочки. Как установлено, при данном варианте возбуждения циклическое изменение амплитуды колебаний торца оболочки

Таблица 4

$f_B, \text{ Гц}, 2A, g_b$	Вариант	
	3,1	3,2
$f_B^1 (n=3)$	84,0	84,0
$f_B^2 (n=5)$	84,2	84,1
$2A (f_B^1 \text{ и } f_B^2)$	4...7	7...13
$g_b (f_B^1 \text{ и } f_B^2)$	13...15	17...20
$2A (f_B^1)$	4,5	6,5
$g_{bstr} (f_B^1)$	14,5	18,5
$2A (f_B^2)$	3,5	5,5
$g_{bstr} (f_B^2)$	14,5	18,5

(«сухой») происходит в пределах  $2A=(4,0...7,0)$  мм (табл. 4)). При одночастотном вибровозбуждении амплитуды деформирования стенки оболочки при  $g_b = 15 g_0$  на этих частотах достигают: на  $n = 3 - 2A = 6,0$  мм;  $n = 5 - 2A = 5,0$  мм.

Процесс деформирования «сухой» оболочки с суммарными волновыми параметрами  $n = 3$  и  $n = 5$  при двухчастотном возбуждении ( $f_b^1 = 84,0$  Гц и  $f_b^2 = 84,1$  Гц) реализуется при больших уровнях кинематического возбуждения.

Так, при стартовой амплитуде возбуждения  $g_b = 18,5 g_0$  циклическое изменение общей амплитуды внешнего осевого кинематического воздействия происходит в пределах  $t=(13...14)$ сек при изменении амплитуды возбуждения  $g_b=(17,0...20,0) g_0$ . В данном случае, при уровнях  $g_b=(17,0...18,5) g_0$  реализуется лишь одна окружная форма  $n = 3$  в пределах  $t = (10...11)$  сек, а при достижении уровней амплитуды  $g_b=(18,5...20,0) g_0$  – суммарная двухмодовая окружная форма деформирования верхнего свободного торца оболочки – ( $n = 3 + n = 5$ ) в пределах  $t = (3...4)$  сек. При данном варианте возбуждения циклическое изменение амплитуды колебаний свободного торца оболочки («сухой») в пучностях происходит в пределах  $2A = (7,0...13,0)$  мм (табл. 4). При одночастотном вибровозбуждении амплитуды деформирования стенки оболочки при  $g_b = 20 g_0$  на этих частотах достигают: на  $n = 3 - 2A = 8,0$  мм;  $n = 5 - 2A = 7,0$  мм.

При наличии в оболочке заполнителя с уровнем  $N_3 = 0,5 N_{об}$  процесс деформирования реализуется только при разнице двух частот возбуждения –  $0,1$  Гц, т.е. с частотами  $f_b^1 = 84,5$  Гц ( $n = 3$ ) и  $f_b^2 = 84,6$  Гц ( $n = 5$ ) и при стартовом уровне возбуждения  $g_{вст} = 20,0 g_0$ . При данном варианте возбуждения циклический процесс деформирования оболочки на верхнем торце реализуется в пределах  $t=(7...8)$ сек при изменении амплитуды возбуждения  $g_b=(18,5...20,5) g_0$ . Одна форма деформирования  $n = 3$  реализуется при  $g_b=(18,5...20,0) g_0$  в пределах  $t=(6...7)$ сек, а при уровнях  $g_b=(20,0...20,5) g_0$  имеет место суммарная двухмодовая окружная форма деформирования верхнего свободного торца оболочки – ( $n = 3 + n = 5$ ) в пределах  $t=(1...2)$ сек.

При данном варианте возбуждения циклическое изменение амплитуды колебаний торца оболочки при уровне заполнителя  $N_3 = 0,5 N_{об}$  в пучностях происходит в пределах  $2A=(5...9)$ мм. При одночастотном вибровозбуждении амплитуды деформирования стенки оболочки при  $g_b = 20,0 g_0$  на этих частотах достигают: на  $n = 3 - 2A = 6$  мм;  $n = 5 - 2A = 5$  мм.

### **Заключение.**

Таким образом, в данной работе экспериментально установлено, что в исследуемой упругой цилиндрической оболочке из стеклопластикового материала, реализуются при двухчастотном осевом кинематическом возбуждении довольно сложные динамические процессы деформирования, по сравнению с одночастотным воздействием вибрации. Выявлено, что наиболее интенсивно сложные нелинейные процессы динамического деформирования упругой стенки оболочки реализуются в области резонансных частот и при меньших амплитудах возбуждения.

Из полученных в работе результатов следует, что особенно сложные процессы деформирования происходят при реализации режимов биения и взаимодействия сопряженных окружных форм в определенном диапазоне частот и при определенных уровнях вибровоздействия, которые обуславливают циклическое изменение амплитуды и формы деформирования от бегущей волны к стоячей, а также при взаимодействии разных несопряженных форм ( $n = 3 + n = 5$ ). Обнаружено, что наличие пенопластикового заполнителя в оболочке интенсифицирует процесс демпфирования колебаний.

РЕЗЮМЕ. Наведено результати експериментальних досліджень нелінійних динамічних процесів деформування пружної стінки склопластикової циліндричної оболонки («суха» та з заповнювачем) при кінематичному двочастотному збудженні в результаті реалізації режиму биття. Виявлено, що нелінійні процеси деформування оболонки при осьовому двочастотному періодичному збудженні в результаті реалізації режиму биття, особливо в зоні двох близьких частот форм  $n = 3$  і  $n = 5$ , можуть супроводжуватись циклічною зміною амплітуди та форми деформування від одної ( $n = 3$ ) до двох форм ( $n = 3 + n = 5$ ) в колловому напрямку, а одної форми ( $n = 3$ ) – від біжучої хвилі до стоячої.

1. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Лакіза В.Д. Экспериментальный анализ нелинейных колебаний стеклопластиковых оболочек вращения // Динамика элементов конструкций / Под ред. В.Д.Кубенко. – К.: «АСК», 1999. – С. 298 – 313. – 382 с. – (Механика композитов: В 12-ти т.; Т.9).
2. Amabili M., Paidoussis M.P. Review of studies and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid-structure interaction // Appl. Mech. Rev. – 2003. – **56**, N 4. – P. 349 – 381.
3. Amabili M., Pellicano F., Vakakis A. Nonlinear vibrations and multiple resonances of fluid-filled circular cylindrical shells. Part 1: Equations of motion and numerical results // J. Vibr. and Acoust. – 2000. – **122**. – P. 346 – 354.
4. Bespalova E.I., Urusova G.P. On Dynamical Instability of Shells of Revolution of Alternating Curvature under Periodic Actions // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 5. – P. 521 – 527.
5. Budak V.D., Grigorenko A.Ya., Khorishko V.V., Borisenko M.Yu. Natural Vibrations of Cylindrical Shells of Constant and Varying Thickness using Method of Holographic Interferometry // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 1. – P. 101 – 109.
6. Goncalves P.B., Batista R.C. Nonlinear vibration analysis of fluid-filled cylindrical shells // J. Sound and Vibr. – 1988. – **127**. – P. 133 – 143.
7. Kana D.D., Craig J.R. Parametric oscillations of a longitudinally excited cylindrical shell containing liquid // J. Spaces Rockets. – 1968. – **5**. – P. 13 – 21.
8. Kubenko V.D., Kovalchuk P.S. Experimental Study Stability of Laminated Composite Shells // Int. Appl. Mech. – 2010. – **45**, N 9. – P. 245 – 268.
9. Kubenko V.D., Kovalchuk P.S. On Modeling the Processes of Nonlinear Interaction of Standing and Running Bending Waves in the Cylindrical Shells with a Fluid in Condition of Internal Resonances // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 4. – P. 380 – 392.
10. Kubenko V.D., Kovalchuk P.S., Kruk L.A. Nonlinear Vibrations of Cylindrical Shells Filled with a Fluid and Subjected to Longitudinal and Transverse Periodic Excitation // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 2. – P. 186 – 194.
11. Lakiza V.D. Dynamical Processes of Deformation of Cylindrical Composite Shell with Filler under Radial Two-Frequency Excitation // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 12. – P. 58 – 66.
12. Olson M.D. Some experimental observations on the nonlinear vibration of cylindrical shells // AAA Journal. – 1965. – N 3. – P. 417 – 426.
13. Pellicano F., Amabili M. Stability and vibration of empty and fluid-filled circular cylindrical shells under static and periodic axial loads // Int. J. Solids and Struct. – 2003. – **40**. – P. 3229 – 3251.
14. Pellicano F., Amabili M., Vakakis A.F. Nonlinear vibrations and multiple resonances of fluid-filled circular cylindrical shell. – Part 2: Perturbation analysis // J. Vibr. and Acoust. – 2000. – **122**. – P. 355 – 364.

Поступила 19.12.2012

Утверждена в печать 30.09.2014