

В. П. Шевченко, С. В. Загора

НАПРЯЖЕНИЯ В СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ,
НАГРУЖЕННОЙ ЧЕРЕЗ ЖЁСТКИЕ ВКЛЮЧЕНИЯ

Донецкий национальный университет,
ул. 600-летия, 21, 21021, Винница, Украина; e-mail: zakora41@yandex.ua

Abstract. A problem is solved on the stress state of shallow isotropic spherical shell with the circular rigid inclusions loaded by a force or a moment. The case of two inclusions of unequal radii is studied numerically. An essential increasing of stresses in the shell is detected when the inclusion radius and the bridge between two inclusions are decreased.

Key words: shallow isotropic spherical shell, stress state, circular rigid inclusion, bridge between inclusions.

Введение.

Исследования напряжённого состояния оболочек и пластин с различными концентраторами напряжений в виде отверстий и включений [2 – 12], сосредоточенных [1] и локальных воздействий [3] по-прежнему остаются теоретически и практически актуальными задачами.

Аналитические решения и числовые результаты для сферической оболочки, нагруженной силой или моментом через жёсткую шайбу, получены для случая оболочки с **одним** абсолютно жёстким включением в [3]. Однако исследования оболочек и пластин с двумя круговыми отверстиями или жёсткими включениями показали, что при близком расположении двух контуров может происходить значительное увеличение концентрации напряжений в окрестности их расположения [2, 4 – 12]. Учитывая это, в данной статье рассмотрена задача для сферической оболочки с **двумя** круговыми абсолютно жёсткими включениями, нагруженными силой или моментом. Детально исследовано напряжённое состояние оболочки с двумя неравными жёсткими шайбами, включая случаи их близкого расположения.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим пологую изотропную сферическую оболочку с m круговыми абсолютно жёсткими включениями, центры которых расположены на одной оси Ox . На недеформируемых контурах включений Γ_q ставятся следующие деформационные краевые условия [2]:

$$\varepsilon_{\tau\tau}|_{\Gamma_q} = 0, \quad \kappa_{\tau\tau}|_{\Gamma_q} = 0, \quad \kappa_{\tau\nu}|_{\Gamma_q} = 0, \quad \kappa_{n\tau}|_{\Gamma_q} = 0 \quad (q = \overline{1, m}). \quad (1)$$

Предполагаем, что жёсткие шайбы нагружены поперечными силами, составляющая главного вектора которых $F_z^{(q)} \neq 0$ или – моментами, компонента главного момента которых $B_y^{(q)} \neq 0$.

Возмущённое напряжённое состояние, вносимое включениями, определяем, исходя из однородного разрешающего дифференциального уравнения тонких сферических изотропных оболочек, предложенного в [2]

$$\nabla^2 \nabla^2 U + i \nabla^2 U = 0. \quad (2)$$

Здесь U — искомая комплексная функция; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ – оператор

Лапласа в полярной системе координат ρ, θ ; $\rho = \frac{r}{\sqrt{cR}}$ – относительный безразмерный

радиус-вектор; $re^{i\theta} = x + iy$; $c = h/\sqrt{12(1-\nu^2)}$; ν – коэффициент Пуассона; R – радиус срединной поверхности оболочки; h – толщина оболочки; i – мнимая единица.

2. Методика решения задачи.

Решение однородного дифференциального уравнения (2) представим в виде трёх составляющих: цилиндрической, полигармонической и аналитической

$$U = U_c + U_p + U_a. \quad (3)$$

Решения, удовлетворяющие условиям симметрии напряжённого состояния относительно оси Ox и убывающие по абсолютной величине при удалении от Γ_q , будут иметь вид [2]

$$U_c(\rho_q, \theta_q) = \sum_{q=1}^m \sum_{n=0}^{\infty} c_{qn} H_n^{(1)}(\sigma \rho_q) \cos n\theta_q; \quad (4)$$

$$U_p(\rho_q, \theta_q) = \sum_{q=1}^m \sum_{n=1}^{\infty} a_{qn} \frac{1}{\rho_q^n} \cos n\theta_q. \quad (5)$$

Здесь c_{qn} , a_{qn} – комплексные неизвестные; $H_n^{(1)}(\sigma \rho_q)$ – функция Ханкеля;

$\rho_q = \frac{r_q}{\sqrt{cR}}$ – относительный безразмерный радиус-вектор в полярных координатах

$r_q e^{i\theta_q} = x_q + iy_q$ с началом в центре O_q контура Γ_q ; $\sigma = (1+i)/\sqrt{2}$.

Главный вектор и главный момент внешней нагрузки, приложенной к одной из жёстких шайб Γ_q , определяются согласно [2] равенствами

$$\begin{aligned} F_x^{(q)} &= 2\pi EhcR \operatorname{Im}(\alpha_1^{(q)} - \alpha_2^{(q)}); \\ F_y^{(q)} &= 2\pi EhcR \operatorname{Re}(\alpha_1^{(q)} - \alpha_2^{(q)}); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} B_x^{(q)} &= \pi Ehc \operatorname{Re} \left[\left(\gamma_1^{(q)} - \gamma_2^{(q)} \right) + 2icR(1-\nu)(\alpha_1^{(q)} + \alpha_2^{(q)}) \right]; \\ B_y^{(q)} &= \pi Ehc \operatorname{Im} \left[\left(\gamma_1^{(q)} - \gamma_2^{(q)} \right) - 2icR(1-\nu)(\alpha_1^{(q)} + \alpha_2^{(q)}) \right]; \end{aligned} \quad (7)$$

$$F_z^{(q)} = \pi Ehc \operatorname{Im}(\beta_1^{(q)} - \beta_2^{(q)}); \quad B_z^{(q)} = \pi EhcR \operatorname{Re}(\beta_2^{(q)} - \beta_1^{(q)}). \quad (8)$$

Следуя [2], необходимо также выполнить условия однозначности комплексных смещений на контурах Γ_q :

$$\alpha_1^{(q)} = -\alpha_2^{(q)}; \quad \beta_1^{(q)} = -\beta_2^{(q)}; \quad \gamma_1^{(q)} + \gamma_2^{(q)} = -4icR(1+\nu)\bar{\alpha}_1^{(q)}. \quad (9)$$

Комплексные неизвестные постоянные $\alpha_j^{(q)}$, $\beta_j^{(q)}$, $\gamma_j^{(q)}$ ($j = \overline{1,2}$) определяются из системы уравнений (6) – (9) при задании компонент главного вектора и главного момента внешней нагрузки.

Рассмотрим два варианта нагружений: жёсткие шайбы нагружены поперечными силами, т.е. $F_z^{(q)} \neq 0$, или моментами $B_y^{(q)} \neq 0$, а $F_x^{(q)} = 0$, $F_y^{(q)} = 0$, $B_x^{(q)} = 0$, $B_z^{(q)} = 0$. Тогда, как очевидно из системы уравнений (6) – (9), $\alpha_j^{(q)} = 0$, $\bar{\beta}_2^{(q)} = \beta_1^{(q)}$, $\bar{\gamma}_2^{(q)} = \gamma_1^{(q)}$ и аналитическая часть U_a согласно [2] примет вид

$$U_a(r_q, \theta_q) = -\sum_{q=1}^m \left[\beta_1^{(q)}(1 + \ln r_q) + \gamma_1^{(q)} \frac{1}{r_q} \cos \theta_q \right]. \quad (10)$$

Для разделения переменных в функции U в q -й системе координат применим методику, предложенную в [2] и основанную на использовании теоремы Графа для цилиндрических функций в (4) и разложений в ряд Лорана каждого из членов степенной (5) и аналитической (10) частей решения. В конкретном случае двух жёстких включений (т.е. при $m = 2$) получим следующие выражения:

$$U_c(\rho_q, \theta_q) = \sum_{q=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \times \\ \times \left\{ J_n(\sigma \rho_{0q}) e_n \sum_{p=0}^{\infty} e_{np} c_{3-q,p} \left[H_{n-p}^{(1)}(\sigma l) + (-1)^p H_{n+p}^{(1)}(\sigma l) \right] + c_{qn} H_n(\sigma \rho_{0q}) \right\} \cos n\theta_q; \quad (11)$$

$$U_p(\rho_q, \theta_q) = \sum_{q=1}^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (p+n-1)! \rho_{0q}^n}{(p-1)! n! l_1^{p+n}} a_{3-q,p} \cos n\theta_q + \sum_{n=2}^{\infty} a_{qn} \frac{1}{\rho_{0q}^n} \cos n\theta_q \right]; \quad (12)$$

$$U_a(\rho_q, \theta_q) = -\sum_{q=1}^2 \left\{ \beta_1 \left[2 + \ln \rho_{0q} + \ln l + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot l_1^n} \rho_{0q}^n \cos n\theta_q \right] + \right. \\ \left. + \gamma_1 \left[\frac{1}{\rho_{0q}} \cos \theta_q - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{l_1^{n+1}} \rho_{0q}^n \cos n\theta_q \right] \right\}. \quad (13)$$

Здесь $J_n(\sigma \rho_{0q})$ – функция Бесселя первого рода; $\rho_{0q} = \frac{r_{0q}}{\sqrt{cR}}$ – безразмерный радиус q -го включения; $l = \frac{L}{\sqrt{cR}}$ – относительная безразмерная величина, где L расстояние между центрами круговых контуров $O_1 O_2$ (рис. 1);

$$l_1 = l(-1)^q; e_n = \begin{cases} 1/2 & \text{при } n = 0; \\ 1 & \text{при } n \neq 0; \end{cases} e_{np} = \begin{cases} 1 & \text{при } q = 1; \\ (-1)^{n+p} & \text{при } q = 2. \end{cases}$$

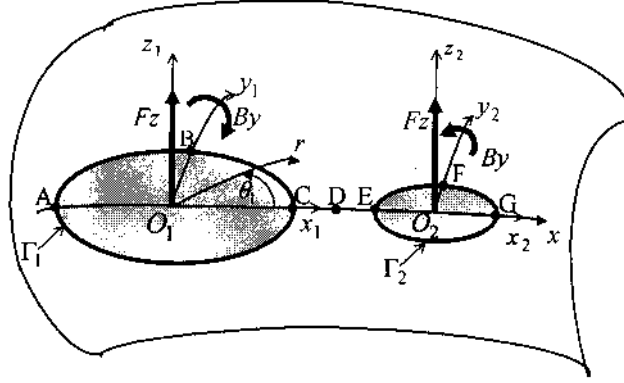


Рис. 1

Выражения для деформационных краевых величин в (1) имеют такой вид:

$$\varepsilon_{\tau\tau} = T_\theta - \nu T_r; \quad \kappa_{\tau\tau} = \frac{6}{h}(G_\theta - \nu G_r); \quad \kappa_{\tau\nu} = \frac{6(1+\nu)}{h} H_{r\theta};$$

$$\kappa_{nr} = \frac{d(T_r + T_\theta)}{dr} - \frac{(1+\nu)}{r} \frac{dS_{r\theta}}{d\theta}. \quad (14)$$

Усилия и моменты, отвечающие решениям (11) – (13), согласно [2, 3], имеют вид

$$T_r = -\frac{1}{\rho} \operatorname{Im} \left(\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right); \quad S_{r\theta} = \operatorname{Im} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right);$$

$$H_{r\theta} = -(1-\nu)c \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right);$$

$$T_\theta = -\operatorname{Im} \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2}; \quad G_r = -c \operatorname{Re} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{\nu}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right);$$

$$G_\theta = -(1+\nu)c \operatorname{Re} \nabla^2 U - G_r. \quad (15)$$

Ограничимся рассмотрением случаев, когда жёсткие шайбы нагружены одинаковыми поперечными силами, т.е. $F_z^{(q)} = F_z$, или одинаковыми моментами $B_y^{(q)} = B_y (-1)^{q+1}$. Тогда для варианта нагружения поперечными силами, когда задано $F_z = \pi E h c$, а остальные компоненты – равными нулю, из системы уравнений (6) – (9) получим

$$\alpha_1^{(q)} = 0; \quad \alpha_2^{(q)} = 0; \quad \beta_1^{(q)} = \frac{i}{2}; \quad \beta_2^{(q)} = -\frac{i}{2}; \quad \gamma_1^{(q)} = 0; \quad \gamma_2^{(q)} = 0, \quad (16)$$

а для варианта $B_y = \pi E h c \sqrt{cR}$ имеем

$$\alpha_1^{(q)} = 0, \quad \alpha_2^{(q)} = 0, \quad \beta_1^{(q)} = 0, \quad \beta_2^{(q)} = 0, \quad \gamma_1^{(q)} = (-1)^{q+1} \frac{i}{2} \sqrt{cR}, \quad \gamma_2^{(q)} = (-1)^q \frac{i}{2} \sqrt{cR}. \quad (17)$$

Подставляя усилия и моменты (15) с учетом (11) – (13) в краевые условия (1), (14) и приравнивая члены при одинаковых гармониках, получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно действительных и мнимых частей неизвестных a_{qn}, c_{qn} . Поскольку комплексные неизвестные постоянные $\alpha_j^{(q)}, \beta_j^{(q)}, \gamma_j^{(q)}$ ($j = \overline{1,2}$) получены (16) – (17), то этим также определяются правые части системы.

Для деформационных краевых величин, записанных в виде (14), между коэффициентами при неизвестных постоянных существуют следующие зависимости:

для 0-й гармоники

$$\rho \kappa_{\tau\tau}^0 \equiv -\sqrt{3(1-\nu^2)} \kappa_{nr}^0; \quad \kappa_{\tau\nu}^0 \equiv 0; \quad (18)$$

для 1-й гармоники

$$\kappa_{\tau\tau}^1 \equiv -\kappa_{\tau\nu}^1;$$

$$\rho^2 \kappa_{\tau\tau}^1 \equiv \sqrt{3(1-\nu^2)} (\varepsilon_{\tau\tau}^1 - \rho \kappa_{nr}^1). \quad (19)$$

При построении системы опускаем уравнения, зависящие в соответствии с тождествами (18) и (19). Так, для 0-й гармоники были оставлены условия $\varepsilon_{\tau\tau}^0|_{\Gamma_1} = 0, \quad \kappa_{\tau\tau}^0|_{\Gamma_1} = 0$, а для 1-й гармоники $\varepsilon_{\tau\tau}^1|_{\Gamma_1} = 0, \quad \kappa_{nr}^1|_{\Gamma_1} = 0$ и $\kappa_{\tau\tau}^1|_{\Gamma_1} = 0$, или $\kappa_{\tau\nu}^1|_{\Gamma_1} = 0$.

Полученную систему решаем методом редукции. Подставляя полученные в результате решения системы значения c_{qn}, a_{qn} в формулы (11) – (13) и (3), определим функцию U . Далее по формулам (15) получим в задаваемых точках усилия и моменты, которые ещё при переходе к направлениям $\vec{\sigma}, \vec{\tau}$ преобразуются по известным формулам поворота [2]. В результате получены коэффициенты концентрации мембранных и изгибных напряжений

$$k_{\theta}^T = T_{\theta}/d; \quad k_r^T = T_r/d; \quad k_{\theta}^B = 6G_{\theta}/dh; \quad k_r^B = 6G_r/dh;$$

$$\tau_{r\theta}^T = S_{r\theta}/d; \quad \tau_{r\theta}^B = 6H_{r\theta}/dh, \quad (20)$$

а по ним – определены и относительные эквивалентные напряжения по энергетической теории прочности [2]:

$$k_{\theta} = k_{\theta}^T \pm k_{\theta}^B; \quad k_r = k_r^T \pm k_r^B; \quad k_{r\theta} = \tau_{r\theta}^T \pm \tau_{r\theta}^B; \quad k_{eq} = \sqrt{k_r^2 + k_{\theta}^2 - k_r k_{\theta} + 3k_{r\theta}^2}.$$

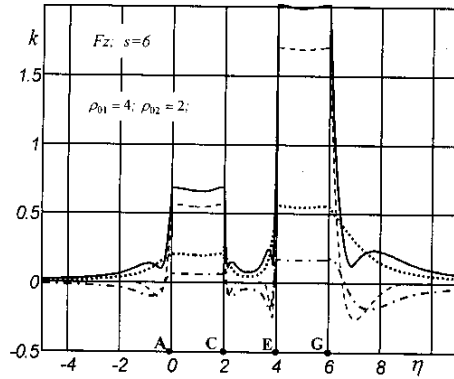


Рис. 2

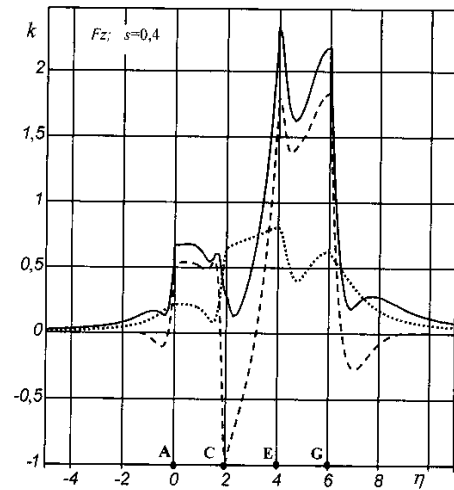


Рис. 3

Относительным эквивалентным напряжениям на наружной поверхности оболочки k_{eq}^{Ext} соответствует знак «+», а на внутренней k_{eq}^{Int} – знак «-». В таблицах и на графиках приведены значения коэффициентов концентрации в увеличенном масштабе 10:1 и поэтому в формулах (20) принято $d = 0,1Eh$.

3. Числовые результаты и их анализ.

Численные исследования проведены для изотропной сферической оболочки (коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$) с двумя жёсткими шайбами радиусами $\rho_{01} = 4$ и $\rho_{02} = 2$ при различных значениях относительной ширины перемычки s . Здесь и далее приняты следующие обозначения относительных безразмерных величин: ρ_{0q} – радиусы включений, $s = \frac{S}{r_{01}}$, где S – ширина перемычки между контурами включений (CE на рис. 1).

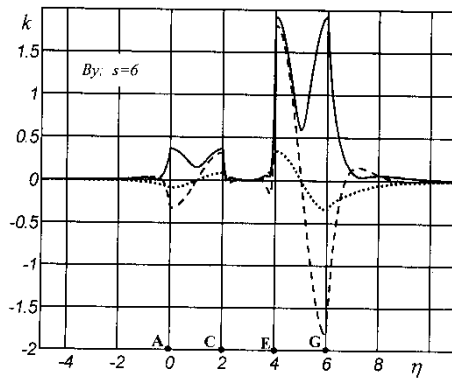


Рис. 4

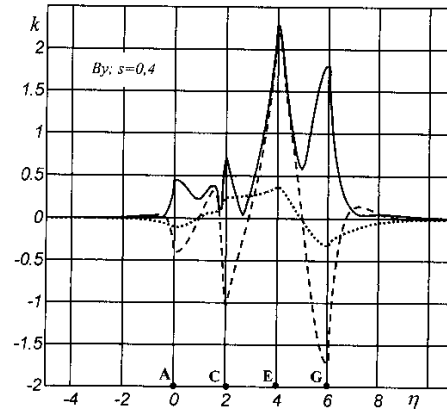


Рис. 5

На рис. 2 – 5 параметр η , откладываемый по горизонтальной оси графиков, принимает следующие значения: 1) $\eta = 4q - 4 + \frac{2\theta_q^*}{\pi}$ при $4(q-1) \leq \eta \leq 4q - 2$ описывает половину контура Γ_q включения, т.е. в случае симметрии относительно оси Ox $0 \leq \theta_q^* \leq \pi$, где $\theta_q^* = \pi - \theta_q$ (рис. 1); 2) $\eta = 2 \left(1 + \frac{x_1 - r_{01}}{S} \right)$ при $2 \leq \eta \leq 4$ – по перемычке s , т.е. когда $r_{01} \leq x_1 \leq r_{01} + S$; 3) $\eta = 4q - 3 + \frac{x_q}{r_{0q}}$ – при удалении от контура Γ_q по оси Ox_q на расстояние до $5r_{0q}$, т.е. когда $-5 \leq x_1 \leq 0$ или $6 \leq x_2 \leq 11$.

По вертикальной оси графиков отложены значения относительных напряжений: эквивалентных на наружной поверхности оболочки k_{eq}^{Ext} – сплошной линией, относительных тангенциальных k_r^T – пунктирной, k_θ^T – штрих - пунктирной и изгибных k_r^B – штриховой.

На рис. 2, 3 приведены графики распределения напряжений, а в табл. 1, 2 – их значения для варианта F_z при значениях относительной ширины перемычки $s = 6$ (рис. 2) и $s = 0,4$ (рис. 3); в табл. 1, 2 – для $s = 7,5$ и $s = 0,2$. Аналогично для варианта B_y на рис. 4, 5 и в табл. 3.

Из анализа результатов рисунков и таблиц следует, что концентрация напряжений на контуре меньшей шайбы и вблизи неё значительно больше, чем на шайбе большего радиуса. Так, из рис. 2 и табл. 1 для случая F_z следует, что на контуре Γ_2 радиуса $\rho_{02} = 2$ наибольшие напряжения k_{eq}^{Ext} , $k_{eq}^{Int} \approx$ в 3 раза больше, чем на контуре Γ_1 радиуса $\rho_{01} = 4$, а для V_y на рис. 4 и в табл. 3, а – соответственно, в 5 – 6 раз. При этом получено, что наибольший вклад вносят изгибные напряжения k_r^B . Также при уменьшении радиуса жёсткого включения наблюдается увеличение зоны затухания концентрации напряжений.

Из рис. 3, 5 и табл. 2, 3, б видно, что при уменьшении ширины перемычки s происходит увеличение относительных эквивалентных напряжений в точках вблизи перемычки и на ней, а также увеличение зоны затухания напряжений при удалении от контуров по осям $-Ox_1, Ox_2$.

О достоверности полученных результатов. 1) Проверена точность удовлетворения граничных условий путём непосредственного вычисления заданных усилий и моментов в точках контуров с использованием рядов (4), (5), (10), т.е. без применения теоремы Графа и ряда Лорана. Вычисления проведены на РС в среде пакета Maple. Точность вычислений можно регулировать, задавая значение системной переменной Digits, а также – число гармоник n в решениях (9), (10). Так, при $n = 30$ и Digits = 50 для случаев, представленных в табл. 1, 3, а при численной реализации абсолютная погрешность выполнения граничных условий не превышала 10^{-47} , а в случаях, представленных в табл. 2, 3, б, соответственно, – 10^{-4} (при этом максимальное значение напряжений не превышало 3).

2). Для сравнения с результатами других авторов для сферической оболочки с одним жёстким включением проведены расчёты при $s = 7,5$, т.е. когда взаимовлияние жёстких включений отсутствует. Получено хорошее совпадение с результатами, полученными при расчётах, приведенных в [3].

3). При расчётах наблюдалось также, что с уменьшением радиуса жёсткого включения напряжённое состояние в рассмотренных здесь случаях (с распределённой по шайбе нагрузкой) качественно приближается к случаю сосредоточенной силы, рассмотренному в [1].

4). Проверена точность выполнения дифференциального уравнения (1) функциями U с коэффициентами, определёнными после решения системы. Абсолютная погрешность не превышала 10^{-46} при Digits = 50.

Таблица 1

Вариант F_z а)	Точки k_r, k_θ, k_{eq}	$\rho_{01} = 4$ От точки А до т. С $0 \leq \theta_1^* \leq \pi$	$s = 7,5$ Точка D $s / 2$	$\rho_{02} = 2$ От точки Е до т. G $0 \leq \theta_2^* \leq \pi$
	k_r^T		0,203	0,003
k_θ^T		0,061	-0,003	0,166
k_r^B		0,556	0,000	1,700
k_θ^B		0,167	0,000	0,510
k_{eq}^{Ext}		0,675	0,004	2,002
k_{eq}^{Int}		0,314	0,004	1,019

Таблица 2

Вариант	$k_r, k_\theta,$ k_{eq}	$\rho_{01} = 4$			$s = 0,2$	$\rho_{02} = 2$		
		Точка А $\theta_1^* = 0$	Точка В $\theta_1^* = \pi/2$	Точка С $\theta_1^* = \pi$	Точка D $s/2$	Точка Е $\theta_2^* = 0$	Точка F $\theta_2^* = \pi/2$	Точка G $\theta_2^* = \pi$
F _z б)	k_r^T	0,198	0,208	0,851	0,904	0,926	0,391	0,649
	k_θ^T	0,059	0,062	0,255	0,163	0,278	0,117	0,195
	k_r^B	0,438	0,569	-1,789	-0,101	2,039	1,365	1,956
	k_θ^B	0,131	0,171	-0,537	0,003	0,612	0,409	0,587
	k_{eq}^{Ext}	0,565	0,733	0,834	0,734	2,636	1,564	2,316
	k_{eq}^{Int}	0,214	0,404	2,347	0,935	0,989	0,870	1,161

Таблица 3

Вариант	$k_r, k_\theta,$ k_{eq}	Точка А $\theta_1^* = 0$	Точка В $\theta_1^* = \pi/2$	Точка С $\theta_1^* = \pi$	Точка D $s/2$	Точка Е $\theta_2^* = 0$	Точка F $\theta_2^* = \pi/2$	Точка G $\theta_2^* = \pi$
		$\rho_{01} = 4$			$s=7,5$	$\rho_{02} = 2$		
B _y а)	k_r^T	-0,087	0,000	0,087	0,000	0,342	0,000	-0,342
	k_θ^T	-0,026	0,000	0,026	0,000	0,102	0,000	-0,102
	k_r^B	-0,325	0,000	0,325	0,000	1,820	0,000	-1,820
	k_θ^B	-0,098	0,000	0,098	0,000	0,546	0,000	-0,546
	k_{eq}^{Ext}	0,367	0,151	0,367	0,000	1,922	0,592	1,922
	k_{eq}^{Int}	0,212	0,151	0,212	0,000	1,314	0,592	1,314

Вариант	$k_r, k_\theta,$ k_{eq}	$\rho_{01} = 4$			$s = 0,2$	$\rho_{02} = 2$		
		Точка А $\theta_1^* = 0$	Точка В $\theta_1^* = \pi/2$	Точка С $\theta_1^* = \pi$	Точка D $s/2$	Точка Е $\theta_2^* = 0$	Точка F $\theta_2^* = \pi/2$	Точка G $\theta_2^* = \pi$
B _y б)	k_r^T	-0,122	0,042	0,318	0,335	0,370	-0,078	-0,300
	k_θ^T	-0,037	0,013	0,095	0,099	0,111	-0,023	-0,090
	k_r^B	-0,482	0,104	-1,364	0,477	2,712	-0,177	-1,589
	k_θ^B	-0,145	0,031	-0,409	0,211	0,814	-0,053	-0,477
	k_{eq}^{Ext}	0,537	0,294	0,930	0,709	2,739	0,573	1,680
	k_{eq}^{Int}	0,320	0,269	1,496	0,130	2,081	0,533	1,146

5). После решения системы вычислены составляющие главного вектора и главного момента, определяемые как интегралы в соответствии с [2] (например:

$$B_z = \rho^2 \int_0^{2\pi} S_{r\theta} d\theta \text{ и т.д.). Получено хорошее совпадение с заданными компонентами:}$$

при Digits = 10 абсолютная погрешность не превышала 10^{-8} (при этом максимальное значение не превышало 20π).

Заключение.

В данной работе дана методика и проведены численные исследования напряжённого состояния сферической оболочки с двумя круговыми жёсткими включениями, нагруженными поперечными силами или моментами. Получено, что при уменьшении

радиуса включения относительные эквивалентные напряжения на его контуре возрастают и могут увеличиться в несколько раз (в рассмотренных выше примерах в 3–6 раз). При этом наибольший вклад вносят радиальные изгибные напряжения. При уменьшении радиуса жёсткого включения также наблюдается увеличение зоны затухания концентрации напряжений.

Результаты вместе с разработанной в среде Maple программой расчетов могут быть использованы в инженерной практике для определения величины напряжений и зоны их затухания в сферической оболочке, нагруженной через жёсткие шайбы.

РЕЗЮМЕ. Розв'язано задачу про напружений стан положої ізотропної сферичної оболонки з круговими абсолютно жорсткими включеннями, навантаженими силою або моментом. Чисельно досліджено випадок двох жорстких включень різних радіусів. Виявлено значне збільшення напружень в оболонці при зменшенні радіуса включення і перемички між двома жорсткими включеннями.

1. *Величко П.М., Шевченко В.П.* О действии сосредоточенных сил и моментов на оболочку положительной кривизны // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. – 1969. – №2. – С.147 – 151.
2. *Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов Вал.Н., Чехов Вик.Н., Шнеренко К.И.* Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями. – К.: Наук. думка, 1980. – 636 с. – (Методы расчета оболочек: В 5-ти т.; Т. 1).
3. *Прочность, устойчивость, колебания.* – М.: Машиностроение, 1968. – 831с. – (Справочник: В 3-х т.; Т 1, гл. 24).
4. *Deryugin Y. Y., Lasko G. V.* Field of stresses in an isotropic plane with circular inclusion under tensile stress // *Engineering.* – 2012. – 4, N 9. – P. 583 – 589.
5. *Fuad Kh., Siregar R. A., Rangkuti Ch., Ariwahjoedi B., Firdaus M.* Stress concentration factors of various adjacent holes configurations in a spherical pressure vessel // *Proc. 5th Australasian Congr. on Appl. Mech. ACAM-2007, 10–12 Dec. 2007, Brisbane, Australia.* – P. 68 – 73.
6. *Li F., He Y., Fan C., Li H., Zhang H.* Investigation on three-dimensional stress concentration of LY12-CZ plate with two equal circular holes under tension // *Mater. Sci. and Eng. A.* – 2008. – 483 – 484, N 1 – 2. – P. 474 – 476.
7. *Kubair D. V., Bhanu-Chandar B.* Stress concentration factor due to a circular hole in functionally graded panels under uniaxial tension // *Int. J. Mech. Sci.* – 2008. – 50, N 4. – P. 732 – 742.
8. *Maximuk V. A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I. S.* Stress State of Flexible Composite Shells with Reinforced Holes // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – 50, N 5. – P. 558 – 565.
9. *Maximuk V. A., Storozhuk E. A., Chernyshenko I. S.* Nonlinear Deformation of Thin Isotropic and Orthotropic Shells of Revolution with Reinforced Holes and Rigid Inclusions // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – 49, N 6. – P. 685 – 692.
10. *Maximuk V. A., Storozhuk E. A., Chernyshenko I. S.* Variational Finite-Difference Methods in Linear and Nonlinear Problems of the Deformation of Metallic and Composite Shells // *Int. Appl. Mech.* – 2012. – 48, N 6. – P. 613 – 687.
11. *Miyagawa M., Suzuki T., Shimura J.* Analysis of in-plane problems with singular disturbances for an isotropic elastic medium with two circular holes or rigid inclusions // *J. Envir. and Eng.* – 2011. – 6, N 4. – P. 778–791.
12. *Yahnioglu N., Babuscu Y. U.* Stress concentration in two neighboring circular holes in a composite plate // *An. Univ. Oradea, Fasc. Mat.* – 2006. – 13. – P. 261 – 272.

Поступила 24.05.2012

Утверждена в печать 30.09.2014