

В. Д. Кубенко

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ НАГРУЖЕНИИ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ ул.Нестерова, 3,
03057, Киев, Украина; e-mail: vdk@inmech.kiev.ua*

Abstract: A technique of evaluation of the stress-strain state of an elastic half-plane is developed when the applied to the half-plane boundary non-stationary load acts. The corresponding boundary problem with initial conditions is formulated. Laplace and Fourier integral transforms are utilized. The common inversion of transforms enables to obtain for some kinds of loads the exact analytical expressions for stresses and displacement as a function of time and distance from the boundary.

Key words: elastic plane problem, non-stationary process, stress-strain state, Laplace and Fourier integral transforms, Cagniard's technique.

Введение.

Нестационарная задача теории упругости имеет значительную историю и достаточно интенсивно развивается вследствие практической актуальности, специфике физических процессов и интересным особенностям поиска решений соответствующих краевых задач. Основное внимание обычно уделяется решению задач для полупространства (осесимметричная задача) или полуплоскости (плоская задача). В качестве действующей нагрузки чаще всего рассматривается ударная нагрузка или внезапно приложенное к границе нормальное напряжение. Представление об основных результатах в рассматриваемом направлении можно получить из работ [3, 6, 13]. Некоторые подходы и особенности исследований имеются, например, в публикациях [8 – 10, 12, 14 – 17].

В данной работе получено аналитическое решение плоской нестационарной задачи теории упругости для полуплоскости, к поверхности которой внезапно приложена распределенная нестационарная нагрузка в виде нормального напряжения. Общее решение задачи получено с применением интегральных преобразований Лапласа и Фурье. Обращение преобразований строится при помощи техники Каньяра [9] совместной инверсии преобразований. В результате получено точное аналитическое выражение для нормального напряжения на оси симметрии задачи как функции времени и глубины для двух видов действующей нагрузки, представляющей напряжение, распространяющееся вдоль поверхности полуплоскости по линейному и параболическому закону.

§1. Рассматривается плоская задача о действии нестационарной нагрузки на поверхность упругого полупространства. Вводятся декартовы координаты x, y, z , так что волновой процесс будет происходить в полуплоскости x, z ось x направлена вдоль границы полуплоскости, ось z – вглубь ее (рис.1).

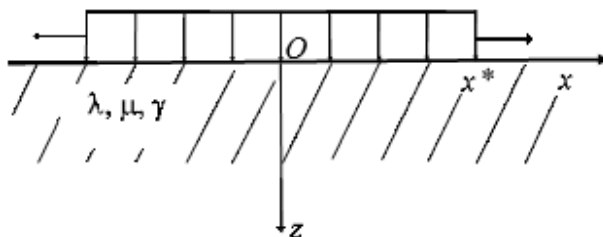


Рис. 1

Предполагается, что симметричная относительно оси z нагрузка в виде нормального напряжения возникает в некоторый начальный момент времени $t = 0$ и в общем случае является функцией времени и координаты x

Вводятся безразмерные обозначения

$$\bar{x} = \frac{x}{R}; \quad \bar{z} = \frac{z}{R}; \quad \bar{u}_j = \frac{u_j}{R}; \quad \bar{t} = \frac{c_0 t}{R}; \quad \bar{w} = \frac{w}{R};$$

$$\bar{\sigma}_{jk} = \frac{\sigma_{jk}}{K}; \quad c_0 = \sqrt{\frac{K}{\gamma}}; \quad \alpha = \frac{c_p}{c_0}; \quad \beta = \frac{c_s}{c_0}; \quad b = \frac{\beta}{\alpha}; \quad j, k = x, z;$$

$$K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}, \quad c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\gamma}}, \quad c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\gamma}},$$

причем ниже черта над обозначениями будет опущена. Здесь R – некоторый характерный линейный размер, c_p, c_s – соответственно, скорости распространения волн расширения и волн сдвига в материале; γ – его плотность; K – модуль всестороннего сжатия; u_j, σ_{jk} , соответственно, компоненты перемещений и напряженного состояния; λ и μ – постоянные Ламе.

Поведение упругой среды описывается волновыми потенциалами Φ и Ψ , которые в случае плоской задачи удовлетворяют волновым уравнениям [4]

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

и связаны с упругими перемещениями и напряжениями соотношениями

$$u_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial z}; \quad u_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial x};$$

$$\sigma_{zz} = (1 - 2b^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2\beta^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} \right);$$

$$\sigma_{xz} = \beta^2 \left(2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right). \quad (1.2)$$

Условия на границе полуплоскости $z = 0$ будут состоять в задании нормального напряжения и отсутствии касательного напряжения, а именно:

$$\sigma_{zz}|_{z=0} = Q(x, t); \quad \sigma_{xz}|_{z=0} = 0. \quad (1.3)$$

Начальные условия для потенциалов нулевые

$$\Phi|_{t=0} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}|_{t=0} = \Psi|_{t=0} = \frac{\partial \Psi}{\partial t}|_{t=0} = 0. \quad (1.4)$$

Кроме того, имеют место условия затухания порожденных нестационарной нагрузкой волновых возмущений на бесконечности.

Если волновые уравнения (1.1) подвергнуть преобразованию Лапласа по времени (с учетом нулевых начальных условий) и преобразованию Фурье по координате x [1]

(с учетом того, что при $|x| \rightarrow \infty$ потенциалы и их первые производные стремятся к нулю), они приобретут вид

$$\frac{\partial^2 \Phi^{LF}}{\partial z^2} - \left(\frac{s^2}{\alpha^2} + \xi^2 \right) \Phi^{LF} = 0; \quad \frac{\partial^2 \Psi^{LF}}{\partial z^2} - \left(\frac{s^2}{\beta^2} + \xi^2 \right) \Psi^{LF} = 0. \quad (1.5)$$

Общее решение уравнений (1.5) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Phi^{LF} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[A(s, \xi) e^{-\frac{z}{\alpha} \tilde{P}} + \tilde{A}(s, \xi) e^{\frac{z}{\alpha} \tilde{P}} \right]; \\ \Psi^{LF} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[B(s, \xi) e^{-\frac{z}{\beta} \tilde{S}} + \tilde{B}(s, \xi) e^{\frac{z}{\beta} \tilde{S}} \right]; \\ \tilde{P} &= \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2}; \quad \tilde{S} = \sqrt{s^2 + \beta^2 \xi^2}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь s – параметр преобразования Лапласа; ξ – параметр преобразования Фурье. Верхние индексы L и F обозначают, соответственно, изображение данной функции в пространстве преобразований Лапласа и преобразований Фурье; $A(s, \xi)$, $\tilde{A}(s, \xi)$, $B(s, \xi)$, $\tilde{B}(s, \xi)$ – функции, подлежащие определению из граничных условий. Очевидно, что в силу условий затухания при $z \rightarrow \infty$ имеем $\tilde{A} = \tilde{B} = 0$ и тогда выражения для изображений перемещений и напряжений имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{LF} &= (s^2 + 2\beta^2 \xi^2) A e^{-\frac{z}{\alpha} \tilde{P}} - i2\beta S \xi B e^{-\frac{z}{\beta} \tilde{S}}; \quad u_x^{LF} = i\xi A e^{-\frac{z}{\alpha} \tilde{P}} - \frac{\tilde{S}}{\beta} B e^{-\frac{z}{\beta} \tilde{S}}; \\ \sigma_{xz}^{LF} &= \beta^2 \left[-2i\xi \frac{\tilde{P}}{\alpha} A e^{-\frac{z}{\alpha} \tilde{P}} + \left(\frac{\tilde{S}^2}{\beta^2} + \xi^2 \right) B e^{-\frac{z}{\beta} \tilde{S}} \right]; \\ u_z^{LF} &= -\frac{\tilde{P}}{\alpha} A e^{-\frac{z}{\alpha} \tilde{P}} - i\xi B e^{-\frac{z}{\beta} \tilde{S}}. \end{aligned}$$

Граничные условия (1.3) в изображениях позволяют определить $A(s, \xi)$, $B(s, \xi)$. В результате выражения для изображений напряжений и перемещений имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{LF} &= Q^{LF} \left[\frac{(s^2 + 2\beta^2 \xi^2)^2}{\Delta} e^{-\frac{z}{\alpha} \tilde{P}} - \frac{4\xi^2 \beta^3 P S}{\alpha \Delta} e^{-\frac{z}{\beta} \tilde{S}} \right]; \\ \sigma_{xz}^{LF} &= \beta^2 Q^{LF} (s^2 + 2\beta^2 \xi^2) \frac{2i\xi P}{\alpha \Delta} \left[-e^{-\frac{z}{\alpha} \tilde{P}} + e^{-\frac{z}{\beta} \tilde{S}} \right]; \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} u_z^{LF} &= Q^{LF} \frac{P}{\alpha} \left[-\frac{s^2 + 2\beta^2 \xi^2}{\Delta} e^{-\frac{z}{\alpha} \tilde{P}} + \frac{2\xi^2 \beta^2}{\Delta} e^{-\frac{z}{\beta} \tilde{S}} \right]; \\ \Delta &= (s^2 + 2\beta^2 \xi^2)^2 - 4 \frac{\beta^3}{\alpha} \xi^2 P S \end{aligned} \quad (1.8)$$

и задача теперь состоит в обращении полученных выражений относительно интегральных преобразований. В общем случае это непростая задача, причем методика обращения зависит также и от свойств функции $Q(x, t)$, задающей действующую нагрузку; поэтому ее необходимо конкретизировать. Если задаться целью получить аналитическое решение данной задачи, которое также могло бы служить ориентиром для других подходов, ограничимся некоторыми видами нагрузки, которые позволяют сохранить однородность функций, представляющих правую часть выражений (1.7), (1.8) относительно параметров преобразований s, ξ . В этом случае может быть применена техника Каньяра [6, 7, 11] совместного обращения интегральных преобразований.

§2. Предположим, что нагрузка имеет вид

$$Q(t, x) = Q_0 H(kt - |x|), \quad (2.1)$$

где $H(t)$ – единичная функция Хевисайда [5]

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Функция (2.1) задает внезапно возникающее и распространяющееся с постоянной скоростью k вдоль поверхности полуплоскости напряжение. Нетрудно определить преобразование Фурье и Лапласа этой функции

$$Q^F(t, \xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} Q_0 \frac{\sin kt\xi}{\xi}; \quad Q^{LF}(s, \xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} Q_0 \frac{k}{s^2 + k^2 \xi^2}. \quad (2.2)$$

Тогда изображение (1.7) нормального напряжения σ_{zx}^{LF} и перемещения u_z^{LF} представляются в виде

$$\sigma_{zz}^{LF} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} Q_0 k \frac{1}{s^2 + k^2 \xi^2} \left[\frac{(s^2 + 2\beta^2 \xi^2)^2}{\Delta} e^{-\frac{z}{\alpha} P} - \frac{4\xi^2 \frac{\beta^3}{\alpha} PS}{\Delta} e^{-\frac{z}{\beta} S} \right]; \quad (2.3)$$

$$u_z^{LF} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} Q_0 k \frac{1}{s^2 + k^2 \xi^2} \frac{P}{\alpha} \left[-\frac{s^2 + 2\beta^2 \xi^2}{\Delta} e^{-\frac{z}{\alpha} P} + \frac{2\xi^2 \beta^2}{\Delta} e^{-\frac{z}{\beta} S} \right].$$

Далее ограничимся определением искомых величин на оси z . С учетом того, что выражение (2.3) есть однородная функция параметров s, ξ , используем методику совместного обращения интегральных преобразований. С этой целью запишем обращение выражения (2.3) на оси z , для чего положим в операторе обращения Фурье $x = 0$ и учтем, что напряжение σ_{zz} есть четная функция x . Тогда имеем

$$\sigma_{zz}(t, z) = \frac{2}{\pi} Q_0 k \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} e^{st} ds \int_0^{\infty} \frac{1}{s^2 + k^2 \xi^2} \left[\frac{(s^2 + 2\beta^2 \xi^2)^2}{\Delta} e^{-\frac{z}{\alpha} P} - \frac{4\frac{\beta^3}{\alpha} \xi^2 PS}{\Delta} e^{-\frac{z}{\beta} S} \right] d\xi.$$

Здесь $\text{Re } \varepsilon > 0$ и абсцисса интегрирования в комплексной плоскости s лежит справа от полюсов подынтегральной функции.

Выполним в подынтегральном выражении замену переменной $\xi = s\eta$, $d\xi = s d\eta$. Тогда, полагая s вещественным [6], будем иметь

$$\sigma_{zz}(t, z) = \frac{2}{\pi} Q_0 k \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} e^{st} ds \int_0^{\infty} \frac{1}{s} \left[R_{\alpha}(\eta) e^{-s \frac{z}{\alpha} \sqrt{1+\alpha^2 \eta^2}} - 4 \frac{\beta^3}{\alpha} R_{\beta}(\eta) e^{-s \frac{z}{\beta} \sqrt{1+\beta^2 \eta^2}} \right] d\eta; \quad (2.4)$$

$$R_{\alpha}(\eta) = \frac{(1+2\beta^2 \eta^2)^2}{(1+k^2 \eta^2) \left[(1+2\beta^2 \eta^2)^2 - 4 \frac{\beta^3}{\alpha} \eta^2 \sqrt{1+\alpha^2 \eta^2} \sqrt{1+\beta^2 \eta^2} \right]};$$

$$R_{\beta}(\eta) = \frac{\eta^2 \sqrt{1+\alpha^2 \eta^2} \sqrt{1+\beta^2 \eta^2}}{(1+k^2 \eta^2) \left[(1+2\beta^2 \eta^2)^2 - 4 \frac{\beta^3}{\alpha} \eta^2 \sqrt{1+\alpha^2 \eta^2} \sqrt{1+\beta^2 \eta^2} \right]}.$$

Предполагая допустимость перемены порядка интегрирования, выполним обращение преобразования Лапласа, учитывая следующие табличные соотношения [1];

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} e^{-s \frac{z}{\alpha} \sqrt{1+\alpha^2 \eta^2}} \right\} = H \left(t - \frac{z}{\alpha} \sqrt{1+\alpha^2 \eta^2} \right); \quad L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} e^{-s \frac{z}{\beta} \sqrt{1+\beta^2 \eta^2}} \right\} = H \left(t - \frac{z}{\beta} \sqrt{1+\beta^2 \eta^2} \right).$$

Здесь L^{-1} обозначает инверсию преобразования Лапласа. В результате из (2.4) получим выражение для нормального напряжения $\sigma_{zz}(t, z)$ в аналитическом виде

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(t, z) = \frac{2}{\pi} Q_0 [kH \left(t - \frac{z}{\alpha} \right) \int_0^{\frac{\alpha z}{\sqrt{\alpha^2 t^2 - z^2}}} R_{\alpha}(\eta) d\eta - \\ - 4 \frac{\beta^3}{\alpha} H \left(t - \frac{z}{\beta} \right) \int_0^{\frac{\beta z}{\sqrt{\beta^2 t^2 - z^2}}} R_{\beta}(\eta) d\eta]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Если аналогичную процедуру обращения выполнить для изображения перемещения u_z^{LF} , получим значение перемещения $u_z(t, z)$ в произвольной точке оси z в следующем виде:

$$u_z(t, z) = \frac{2k}{\pi \alpha} Q_0 [H \left(t - \frac{z}{\alpha} \right) \int_0^{\frac{\alpha z}{\sqrt{\alpha^2 t^2 - z^2}}} S_{\alpha}(\eta) d\eta - 4 \frac{\beta^3}{\alpha} H \left(t - \frac{z}{\beta} \right) \int_0^{\frac{\beta z}{\sqrt{\beta^2 t^2 - z^2}}} S_{\beta}(\eta) d\eta]; \quad (2.6)$$

$$S_{\alpha}(\eta) = \frac{\sqrt{1+\alpha^2 \eta^2} (1+2\beta^2 \eta^2)^2}{(1+k^2 \eta^2) \left[(1+2\beta^2 \eta^2)^2 - 4 \frac{\beta^3}{\alpha} \eta^2 \sqrt{1+\alpha^2 \eta^2} \sqrt{1+\beta^2 \eta^2} \right]};$$

$$S_{\beta}(\eta) = 2\beta^2 \frac{\eta^2 \sqrt{1+\alpha^2 \eta^2}}{(1+k^2 \eta^2) \left[(1+2\beta^2 \eta^2)^2 - 4 \frac{\beta^3}{\alpha} \eta^2 \sqrt{1+\alpha^2 \eta^2} \sqrt{1+\beta^2 \eta^2} \right]}.$$

Таким образом, распределение напряжения σ_{zz} и перемещения u_z вдоль оси z в произвольный момент времени определяется формулами (2.5), (2.6).

Приведем некоторые вычисления, в частности, для напряжения σ_{zz} . При вычислениях были выбраны следующие значения параметров материала упругой полуплоскости: $\alpha = 1,28$; $\beta = 0,69$; параметр нагрузки $Q_0 = 1$. Скорость расширения нагрузки $\bar{k} = k / \alpha$ варьировалась. При вычислении интегралов использована квадратурная формула трапеций.

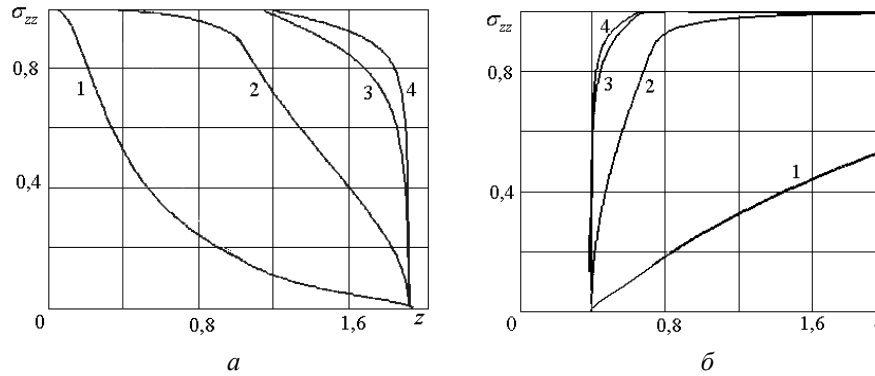


Рис. 2

Рис. 2, *a* показывает напряжение σ_{zz} как функцию z ($0 < z < 2$) в момент времени $t = 1,5$, тогда как рис. 2, *б* представляет зависимость напряжения σ_{zz} от времени ($0 < t < 2$) в точке $z = 0,5$ для нескольких значений безразмерного параметра k : 1 – $k = 0,1$; 2 – $k = 1,0$; 3 – $k = 5,0$; 4 – $k = 10,0$. Как и следовало ожидать, характер распределения и развития напряжения существенно зависит от скорости расширения нагрузки k , т. е. от степени загруженности границы полуплоскости. Можно заметить, что с увеличением значения k возрастает также величина скачка напряжения на фронте волны.

На рис. 3, *a* сплошной линией для $k = 1,0$ представлено распределение напряжения вдоль оси z ($0 < z < 20$) в фиксированные моменты времени: 1 – $t = 1,0$; 2 – $t = 5,0$; 3 – $t = 10,0$; 4 – $t = 15,0$. Пунктиром в те же моменты времени показано распределение напряжения при скорости расширения нагрузки $k = 0,1$.

Рис. 3, *б* иллюстрирует развитие напряжения во времени ($0 < t < 20$) в нескольких точках оси z : 1 – $z = 1,0$; 2 – $z = 5,0$; 3 – $z = 10,0$; 4 – $z = 20,0$. Здесь сплошные линии соответствуют значению $k = 1,0$, пунктирные – $k = 10,0$. Видно, что при меньшем k нарастание напряжения в конкретной точке с увеличением значения z становится все менее резким; время достижения значения, близкого к значению на границе, увеличивается. При большом k этот эффект, естественно, менее выражен.

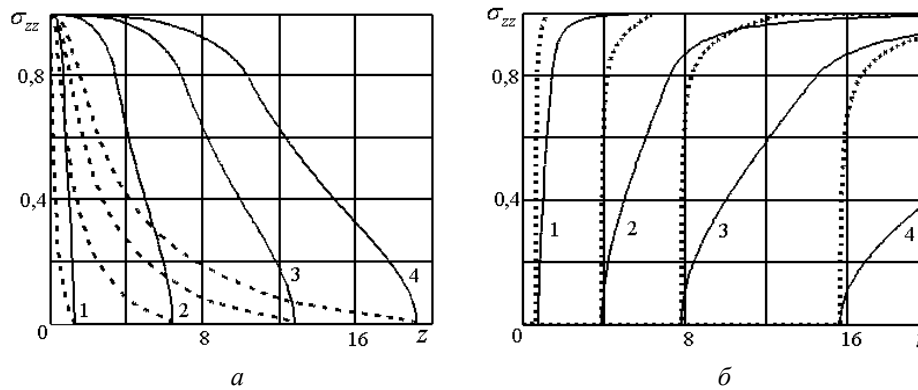


Рис. 3

§3. Пусть нагрузка имеет вид растекающегося с переменной скоростью по поверхности $z = 0$ напряжения (параболический закон)

$$Q(t, x) = Q_0 H(kt - x^2). \quad (3.1)$$

Здесь, как и ранее, $H(t)$ – единичная функция Хевисайда.

Преобразование Лапласа и Фурье функции $Q(t, x)$ имеет вид [1]

$$Q^L(s, x) = Q_0 \frac{1}{s} e^{-\frac{x^2}{k}s}; \quad Q^{LF}(s, \xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} Q_0 \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2s}\sqrt{s}} e^{-\frac{\xi^2 k}{4s}}.$$

Выражение для напряжения (1.7) в этом случае приобретет вид

$$\sigma_{zz}^{LF}(s, \xi, z) = \frac{\sqrt{\pi k}}{2} Q_0 \frac{1}{s^{3/2}} e^{-\frac{\xi^2 k}{4s}} \left[\frac{(s^2 + 2\beta^2 \xi^2)^2}{\Delta} e^{-\frac{z}{\alpha} P} - \frac{4\xi^2 \frac{\beta^3}{\alpha} PS}{\Delta} e^{-\frac{z}{\beta} S} \right]. \quad (3.2)$$

Обращение преобразования Фурье вновь выполним на оси z , для чего в операторе обращения положим $x = 0$. Учитывая, что σ_{zz} есть четная функция, получим

$$\sigma_{zz}^L(s, z, x=0) = \sqrt{\frac{\pi k}{s^3}} Q_0 \int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2 k}{4s}} \frac{(s^2 + 2\beta^2 \xi^2)^2 e^{-\frac{z}{\alpha} P} - 4\xi^2 \frac{\beta^3}{\alpha} PS e^{-\frac{z}{\beta} S}}{(s^2 + 2\beta^2 \xi^2)^2 - 4\xi^2 \frac{\beta^3}{\alpha} PS} d\xi.$$

Как и в предыдущем примере, введем в подынтегральном выражении замену переменного $\xi = s\eta$, предполагая s вещественным; получим

$$\sigma_{zz}^L(s, z) \Big|_{x=0} = \sqrt{\frac{\pi k}{s}} Q_0 [R_1^L(s, z) - R_2^L(s, z)] \quad (3.3)$$

$$\left(R_1^L(s, z) = \int_0^\infty e^{-s \left(\frac{\eta^2 k}{4} + \frac{z}{\alpha} \sqrt{1 + \alpha^2 \eta^2} \right)} \frac{(1 + 2\beta^2 \eta^2)^2}{(1 + 2\beta^2 \eta^2)^2 - 4 \frac{\beta^3}{\alpha} \eta^2 \sqrt{1 + \alpha^2 \eta^2} \sqrt{1 + \beta^2 \eta^2}} d\eta; \quad (3.4) \right.$$

$$\left. R_2^L(s, z) = 4 \frac{\beta^3}{\alpha} \int_0^\infty e^{-s \left(\frac{\eta^2 k}{4} + \frac{z}{\beta} \sqrt{1 + \beta^2 \eta^2} \right)} \frac{\eta^2 \sqrt{1 + \alpha^2 \eta^2} \sqrt{1 + \beta^2 \eta^2}}{(1 + 2\beta^2 \eta^2)^2 - 4 \frac{\beta^3}{\alpha} \eta^2 \sqrt{1 + \alpha^2 \eta^2} \sqrt{1 + \beta^2 \eta^2}} d\eta \right). \quad (3.5)$$

Проведем отдельно некоторые преобразования для R_1 и R_2 . В частности, в подынтегральном выражении (3.4) для R_1^L выполним замену переменного $\frac{\eta^2 k}{4} + \frac{z}{\alpha} \sqrt{1 + \alpha^2 \eta^2} = t$, а в выражении (3.5) для R_2^L – замену переменного $\frac{\eta^2 k}{4} + \frac{z}{\beta} \sqrt{1 + \beta^2 \eta^2} = t$. Если теперь обозначить

$$T_1^{(\alpha)}(t, z) = \sqrt{4tk + 4z^2 + \alpha^{-2}k^2}; \quad T_2^{(\alpha)}(t, z) = tk + 2z^2 - zT_1^{(\alpha)}(t, z);$$

$$T_1^{(\beta)}(t, z) = \sqrt{4tk + 4z^2 + \beta^{-2}k^2}; T_2^{(\beta)}(t, z) = tk + 2z^2 - zT_1^{(\beta)}(t, z),$$

то функцию $R_1^L(s, z)$ можно записать в виде

$$R_1^L(s, z) = - \int_{z/\alpha}^{\infty} e^{-st} \bar{R}_1(t, z) dt, \quad (3.6)$$

$$\bar{R}_1(t, z) = \frac{\left[1 + 2\beta^2 \frac{4}{k^2} T_2^{(\alpha)}(t, z)\right]^2}{Z(t, z) \sqrt{T_2^{(\alpha)}(t, z)}} \left(1 - \frac{2z}{T_1^{(\alpha)}(t, z)}\right),$$

$$Z(t, z) = \left[1 + 2\beta^2 \frac{4}{k^2} T_2^{(\alpha)}(t, z)\right]^2 - \frac{16\beta^3}{\alpha k^2} T_2^{(\alpha)}(t, z) \sqrt{1 + \alpha^2 \frac{4}{k^2} T_2^{(\alpha)}(t, z)} \sqrt{1 + \beta^2 \frac{4}{k^2} T_2^{(\alpha)}(t, z)}.$$

Аналогично представим функцию $R_2^L(s, z)$

$$R_2^L(s, z) = - \int_{z/\beta}^{\infty} e^{-st} \bar{R}_2(t, z) dt, \quad (3.7)$$

$$\bar{R}_2(t, z) = \frac{\sqrt{T_2^{(\beta)}(t, z) \left(1 + \alpha^2 \frac{4}{k^2} T_2^{(\beta)}(t, z)\right) \left(1 + \beta^2 \frac{4}{k^2} T_2^{(\beta)}(t, z)\right)}}{Z(t, z)} \left(1 - \frac{2z}{T_1^{(\beta)}(t, z)}\right).$$

Интегралы в правой части соотношений (3.6), (3.7) есть не что иное, как преобразование Лапласа; следовательно, оригинал левой части равен подынтегральному выражению (с учетом теоремы запаздывания операционного исчисления). Тогда имеем

$$R_1(t, z) = H\left(t - \frac{z}{\alpha}\right) \bar{R}_1(t, z); \quad (3.8)$$

$$R_2(t, z) = H\left(t - \frac{z}{\beta}\right) \frac{16\beta^3}{\alpha k^2} \bar{R}_1(t, z). \quad (3.9)$$

Наконец, если принять во внимание, что присутствующий в выражении (3.3) множитель $1/\sqrt{s}$ имеет оригинал $1/\sqrt{\pi t}$, и применить правило свертки оригиналов [2], окончательно получим следующее выражение для нормального напряжения $\sigma_{zz}(t, z)$ в случае, когда к поверхности полуплоскости приложена нагрузка в виде (3.1):

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(t, z, x=0) = & -Q_0 \sqrt{k} \left\{ H\left(t - \frac{z}{\alpha}\right) \int_{\frac{z}{\alpha}}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} R_1(\tau, z) d\tau + \right. \\ & \left. + H\left(t - \frac{z}{\beta}\right) \int_{\frac{z}{\beta}}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} R_2(\tau, z) d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Вычисления распределения напряжения σ_{zz} вдоль оси z в зависимости от времени и параметра k для нагрузки вида (3.1) иллюстрируются нижеприведенными рис. 4, а, б. На рис.4, а представлено распределение напряжения вдоль оси z ($0 < z < 20$) в фиксированные моменты времени $1-t=1,0$; $2-t=5,0$; $3-t=10,0$; $4-t=15,0$. Сплошные кривые отвечают параметру $k=1,0$, пунктирные – $k=10,0$.

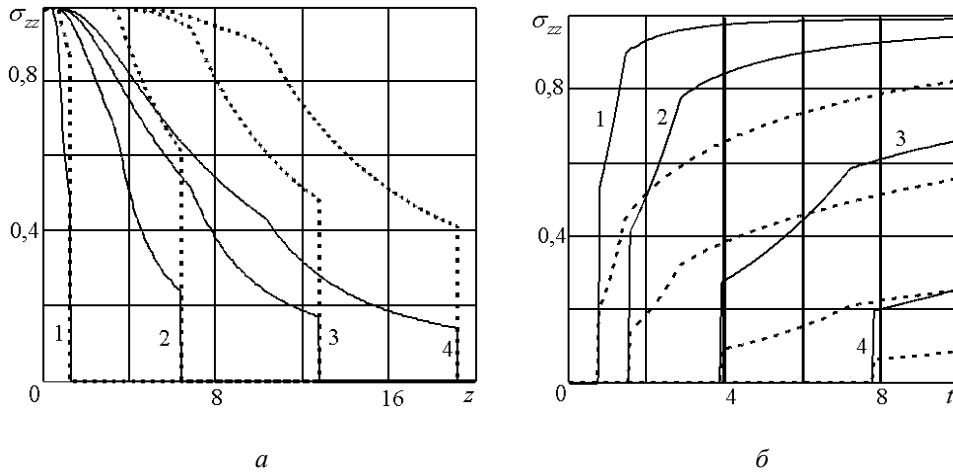


Рис. 4

Рис. 4, б иллюстрирует развитие напряжения во времени ($0 < t < 10$) в нескольких точках на оси z : $1-z=1,0$; $2-z=2,0$; $3-z=5,0$; $4-z=10,0$. Существенное отличие данных графиков от аналогичных для линейно расширяющейся нагрузки состоит в наличии четко выраженного скачка напряжения на фронте волны. Это обусловлено тем обстоятельством, что при нагрузке типа (3.1) имеется начальный отрезок времени, в течение которого скорость ее расширения вдоль границы полуплоскости выше скорости распространения упругих волн в среде.

Полученные результаты будут использованы в качестве ориентира при разработке численно-аналитического подхода к решению аналогичных задач при широком ассортименте внешних нагрузок.

Заключение.

В данной работе развита методика вычисления напряженно-деформированного состояния упругой полуплоскости при действии нестационарной нагрузки, приложенной к ее границе. Сформулирована соответствующая краевая задача с начальными условиями. Применены интегральные преобразования Лапласа и Фурье. Совместное обращение интегральных преобразований позволило для некоторых видов нагрузки получить точные аналитические выражения для напряжения и перемещения как функции расстояния от границы и времени.

РЕЗЮМЕ. Розвинуто методику обчислення напружено-деформівного стану пружної напівплощини при дії нестационарного навантаження, прикладеного до її границі. Сформульовано відповідну граничну задачу з початковими умовами. Застосовуються інтегральні перетворення Лапласа і Фур'є. Спільне обернення перетворень дозволило для деяких видів навантаження отримати точні аналітичні вирази для напруження і переміщення як функції відстані від границі і часу.

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований: в 2-х т. – М.: Наука, 1969. – Т. 1. Преобразование Фурье, Лапласа, Меллина. – М.: Наука, ГИФМЛ, 1969. – 344 с.
2. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 524 с.
3. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. – М.: Физматгиз, 1995. – 352 с.
4. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. – К.: Наук. думка, 1978. – 300 с.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. – 831 с.
6. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. – М.: Наука, 1986. – 328 с.
7. Слепян Л.И. Нестационарные упругие волны. – Л.: Судостроение, 1972. – 374 с.
8. Anik'ev I.I., Maksimuk V.A., Mikhailova M.I., Sushchenko E.A. Incidence of a Shock Wave on a Cantilever Plate Coupled with an Elastic Rod // Int. Appl. Mech. –2013. – **49**, N 4. – P. 482 – 487.
9. Anik'ev I. I., Maksimuk V.A., Mikhailova M.I., Sushchenko E.A. Nonstationary Behavior of a Cantilever – Rod System under Nearly Critical Loads // Int. Appl. Mech. –2013. – **49**, N 5. – P. 570 – 575.
10. Bakker M.C.M., Koopij B.J., Verweij M.D. A knife-edge load traveling on the surface of an elastic half-space // Wave Motion. – 2012. – **49**. – P. 165 – 180.
11. Cagniard L. Reflexion et refraction des ondes seismiques. – Paris: Gauthiers Villars, 1939. – 255 p.
12. In-Mo L. Transient groundmotion in an elastic homogeneous halfspace to blasting loading // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. – 1996. – **15**, N 3. – P. 151– 159.
13. Kubenko V.D. Nonstationary Contact of a Rigid Body with an Elastic Medium. Plane Problem // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 5. – P. 487 – 551.
14. Mesquita E., Antes H., Thomazo L.H., Adolph M. Transient wave propagation phenomena at visco-elastic half-spaces under distributed surface loadings // Lat. Am. J. Solids Struct. – 2012. – **9**, N 4. – Online version ISSN 1679 – 7825.
15. Payton R.G. Transient motion of an elastic half-space due to a moving surface line load // Int. J. Eng. Science. – 1967. – **5**, N 1. – P. 40 – 79.
16. Robinson A. R., Thompson J. C. Transient Stresses in an Elastic Half Space Resulting from the Frictionless Indentation of a Rigid Wedge-Shaped Die // ZAMM. – 1974. – **54**, N 3. – P. 139 – 144.
17. Zhao X., Meguid S.A., Liew K.M. The transient response of bonded piezoelectric and elastic half space with multiple interfacial collinear cracks // Acta Mech. – 2002. – **159**. – P. 11 – 27.

Поступила 21.05.2013

Утверждена в печать 30.09.2014