

Г. М. Улитин, С. Н. Царенко

**О ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ  
УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ**

*ГВУЗ «Донецкий национальный технический университет»,  
ул. Артема, 58, 83001, Донецк, Украина, e-mail: tzarenko@rambler.ru*

**Abstract.** A problem of longitudinal vibrations of conical rods of solid and hollow cross-section is considered. This problem models the constructions of backup abutments. Basing on analysis of effect of the rod parameters on the value of master frequency, the recommendations are given for the approximate methods of analysis. An analysis of the stress-strain state arising under impact on the rod shows that location of the dangerous cross-section depends in each particular case on values of the rod parameters.

**Key words:** conical rod, longitudinal vibrations, longitudinal impact, stress-strain state.

**Введение.**

Стержни переменного сечения имеют разнообразное применение, как элементы сложных сооружений, так и отдельно взятые конструкции. Примером таких конструкций являются многогранные гнутые стойки, которые за последнее время получили широкое применение в различных отраслях промышленности: городском хозяйстве (осветительные опоры), энергетике (опоры ЛЭП, стойки ветрогенераторов), теле-радио связи (антенные опоры) и т.д. Стальные многогранные стойки представляют собой конические трубы коробчатого многогранного сечения, высота стоек достигает 80 м, толщина до 20 мм, диаметр в основании находится в пределах 250 – 3000 мм, а в вершине – 200 – 500 мм.

При установке на фундамент стоек переменного поперечного сечения, несущих на верхнем конце оборудование, возникает явление продольного удара, которое приводит к значительному возрастанию динамических нагрузок. Для исследования работы различного рода конструкций и оборудования широко используется модель упругого стержня, так например, в статьях [7, 8, 13] для бурильной колоны используется математическая модель упругого гибкого стержня, а в работе [12] напряженно-деформированное состояние при продольно-поперечном изгибе в металлоконструкциях башенного типа рассмотрено с использованием модели стержня переменной жесткости. В задачах динамики упругих систем исследование строится на основе классической теории упругости, аналитическое решение в этом случае позволяет провести анализ влияния различных факторов на динамический процесс или дать обоснование упрощенным и приближенным методам расчета. Так, в работах [6, 9] данный подход используется применительно к вопросам исследования колебаний струн и оболочек. В статье [5] рассмотрен обзор различных методов решения задач колебаний балок и пластин, и в частности, указано на актуальность нахождения точных решений. Аналитическое решение волнового уравнения может быть получено с использованием методов Даламбера или Фурье. Применение метода Даламбера ограничивается условием однородности структуры стержня [3] и поэтому на практике его используют для относительно простых схем. Так, в работе [2], с использованием данного

метода, исследуется устойчивость при продольном ударе стержневой системы, состоящей из стержня постоянного и ступенчато-переменного сечения. Напряженное состояние стержня при ударе об упругий ограничитель исследовалось в статье [15], аналогичная задача рассмотрена в работе [10] с использованием аналитического и численного решений. Сравнение результатов, полученных аналитическим и численным методами, в задаче удара массы об упругую балку с различными условиями закрепления приведены в работе [17], а в статье [16] показано, что численные результаты расчета удара сферической массы о неоднородный стержень хорошо согласуются с экспериментальными данными. Продольные колебания однородного усеченного конуса рассмотрены в работе [14], а сравнение теоретических и экспериментальных результатов исследования удара конического стержня о жесткий ограничитель представлено в статье [4].

В настоящей работе, в отличие от рассмотренных, исследована задача продольного удара упругого стержня переменного сечения, несущего на верхнем конце массу. Для решения задачи используется метод Фурье.

### §1. Постановка задачи и основные соотношения.

В качестве математической модели рассматриваемого объекта примем упругий стержень переменного сечения длиной  $l$  (высота стойки) с массой  $M$  (масса оборудования) на верхнем конце (рис. 1).

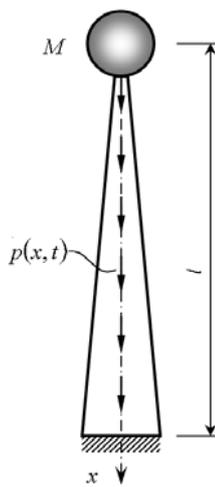


Рис. 1

Для изучения продольных колебаний  $u(x, t)$  такой системы, если выбрать систему координат на верхнем конце стержня, следует решить граничную задачу

$$E \frac{\partial}{\partial x} \left( F(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \gamma F(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p(x, t); \quad (1.1)$$

$$u(l, t) = 0; \quad (1.2)$$

$$M \ddot{u}(0, t) - EF(0)u'_x(0, t) = 0 \quad (1.3)$$

при начальных условиях вида

$$u(x, 0) = 0; \quad \dot{u}(x, 0) = v_0 e(x), \quad (1.4)$$

где  $E$  – модуль упругости;  $F(x)$  – площадь поперечного сечения конструкции;  $\gamma$  – плотность материала;  $p(x, t)$  – интенсивность внешней нагрузки;  $v_0$  – скорость опускания конструкции;  $e(x)$  – единичная функция.

В зависимости от типа конструкции  $F(x) = (ax + b)^2$  – для сплошного сечения и  $F(x) = (ax + b)d$  – для полого, где коэффициенты  $a$  и  $b$  определяются геометрией сечения, а  $d$  – толщина стенки полого сечения.

Вначале рассмотрим случай свободных колебаний и для уравнения (1.1) выполним замену  $z = (ax + b)/al$ . Тогда для первого типа конструкций оно примет вид

$$z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2z \frac{\partial u}{\partial z} = \tilde{\gamma} z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (1.5)$$

а для второго –

$$z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial u}{\partial z} = \tilde{\gamma} z \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\tilde{\gamma} = \gamma l^2 / E). \quad (1.6)$$

Из первого начального условия (1.4) следует

$$u_1(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n Z_n(z) \sin \omega_n t, \quad (1.7)$$

где  $u_1(z, t)$  – перемещения, вызванные сообщением системе скорости  $v_0$ ;  $A_n$  – произвольные постоянные;  $Z_n(z)$  – собственные функции соответствующих граничных задач;  $\omega_n$  – частота собственных колебаний.

Дифференциальный оператор уравнения (1.1) является самосопряженным и, следовательно, функции  $Z_n(z)$  – ортогональны с весом  $\rho(z) = F(z)$  на промежутке  $[z_1; z_2]$ , где  $z_1 = k$ ;  $z_2 = 1+k$ ,  $k = b/al$  [13].

Для определения собственных функций задач (1.5) и (1.6) получаем, соответственно, уравнения

$$zZ_n'' + 2Z_n' + \lambda_n^2 z Z_n = 0; \quad (1.8)$$

$$zZ_n'' + Z_n' + \lambda_n^2 z Z_n = 0, \quad (1.9)$$

где  $\lambda_n = \omega_n \sqrt{\tilde{\gamma}}$  – собственные значения.

Общие решения уравнений (1.8) и (1.9) имеют, соответственно, вид

$$Z_n(z) = C_1 \frac{\sin \lambda_n z}{z} + C_2 \frac{\cos \lambda_n z}{z}; \quad Z_n(z) = C_1 J_0(\lambda_n z) + C_2 Y_0(\lambda_n z). \quad (1.10)$$

## §2. Продольные колебания полого конического стержня.

Рассмотрим вариант уравнений (1.6) – случай полой конструкции как наиболее распространенной в технических задачах.

Если удовлетворить граничным условиям (1.2) и (1.3), то с учетом решения (1.10) получим уравнение для определения собственных значений

$$\begin{aligned} \zeta \lambda_n \left(1 + \frac{1}{2k}\right) & \left( Y_0(\lambda_n z_2) J_0(\lambda_n z_1) - J_0(\lambda_n z_2) Y_0(\lambda_n z_1) \right) + \\ & + \left( Y_1(\lambda_n z_1) J_0(\lambda_n z_2) - J_1(\lambda_n z_1) Y_0(\lambda_n z_2) \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\zeta = M / (\gamma d(0,5al^2 + bl))$  – безразмерная масса.

Выражение для собственных функций представим в виде

$$Z_n(z) = J_0(\lambda_n z) - \alpha_n Y_0(\lambda_n z); \quad \alpha_n = \frac{J_0(\lambda_n z_2)}{Y_0(\lambda_n z_2)}, \quad (2.2)$$

которые ортогональны с весом  $\rho(z) = z + \zeta \frac{2+k}{2k} \delta(z - z_1)$ , где  $\delta(z)$  – дельта функция Дирака.

Оценим влияние безразмерных параметров  $k$  и  $\zeta$  на значения первого собственного числа частотного уравнения (2.1)  $\lambda_1$  (первой собственной частоты  $\omega_1 = \lambda_1 / \sqrt{\tilde{\gamma}}$ ).

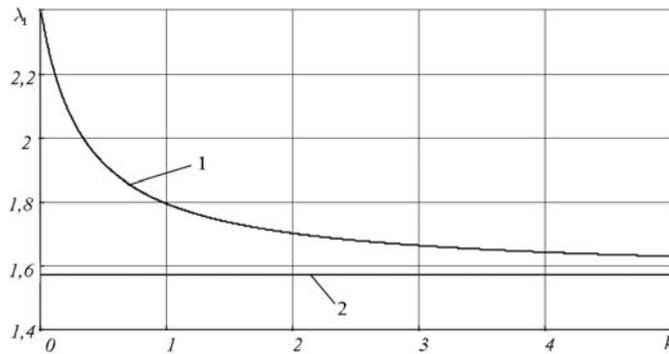


Рис. 2

На графике рис. 2 показана зависимость  $\lambda_1$  от величины параметра относительного поперечного размера  $k$  при отсутствии сосредоточенной массы ( $\zeta = 0$ ); 1 – стержень переменного сечения; 2 – стержень постоянного сечения ( $\lambda_1 = 1,571$ ), из графика следует, что при значении  $k > 4$ , что соответствует соотношению размеров нижнего и верхнего оснований менее, чем 1,25:1, значение первой собственной частоты отличается от частоты, полученной для модели стержня постоянного сечения не более, чем на 5%.

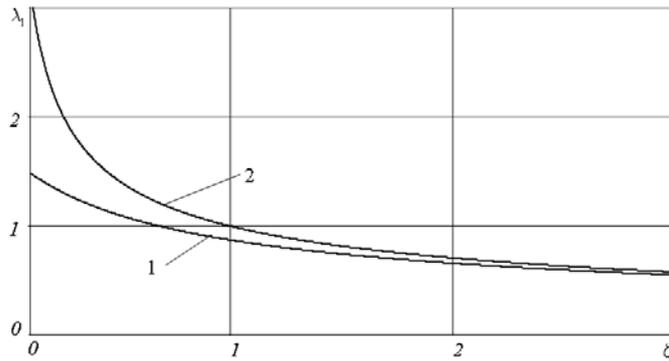


Рис. 3

На графике рис. 3 представлена зависимость  $\lambda_1$  от коэффициента  $\zeta$  при  $k = 4$  (1 – для весомого стержня; 2 – для невесомого стержня). Из графиков следует, что при  $\zeta > 3$  первая собственная частота практически полностью определяется наличием сосредоточенной массы на свободном конце стержня и может быть определена из решения для одномассовой системы.

Таким образом, если конструкция имеет параметры:  $k > 4$  и  $\zeta > 3$ , то в качестве расчетной модели можно принимать невесомый стержень постоянного сечения с одной сосредоточенной массой.

### §3. Динамические нагрузки при продольном ударе.

Вычисление непосредственно квадрата нормы собственных функций довольно затруднительно, поэтому перейдем к пределу при  $m \rightarrow n$  в выражении от произведения собственных функций с различными индексами, в результате чего получаем

$$\int_{z_1}^{z_2} z Z_n^2(z) dz = \frac{z}{2\lambda_n} \left( Z_n' \frac{\partial Z_n}{\partial \lambda_n} - Z_n \frac{\partial Z_n'}{\partial \lambda_n} \right) \Bigg|_{z_1}^{z_2}. \quad (3.1)$$

Тогда из соотношения (3.1) квадрат нормы собственных функций с учетом веса определяется по формуле

$$\Delta_n^2 = \frac{z^2}{2} \left( (J_1(\lambda_n z) - \alpha_n Y_1(\lambda_n z))^2 + (J_0(\lambda_n z) - \alpha_n Y_0(\lambda_n z))^2 \right) \Big|_{z_1}^{z_2} + \zeta \frac{2+k}{2k} (J_0(\lambda_n z_1) - \alpha_n Y_0(\lambda_n z_1))^2. \quad (3.2)$$

Если удовлетворить второму начальному условию (1.4), то в выражении (1.7) коэффициенты  $A_n$  примут вид

$$A_n = \frac{v_0 \sqrt{\tilde{\gamma}}}{\lambda_n \Delta_n^2} \left( \frac{z}{\lambda_n} (J_1(\lambda_n z) - \alpha_n Y_1(\lambda_n z)) \Big|_{z_1}^{z_2} + \zeta \frac{2+k}{2k} (J_0(\lambda_n z_1) - \alpha_n Y_0(\lambda_n z_1)) \right). \quad (3.3)$$

Решение (1.7) при значениях коэффициентов (3.3) определяет упругие перемещения конструкции (при условии  $p(x, t) = 0$ ).

Необходимо учесть решение на внезапное приложение веса конструкции, т.е. при  $p(z, t) = dal\gamma gz$ . Для этого требуется получить решение  $u_2(z, t)$  неоднородного уравнения

$$z u_2'' + u_2' - \tilde{\gamma} z \ddot{u}_2 = \beta z, \quad (3.4)$$

где  $\beta = l^2 \gamma g / E$ , с однородными начальными условиями  $u_2(z, 0) = 0$ ;  $\dot{u}_2(z, 0) = 0$ .

Решение уравнения (3.4) представим в виде ряда по собственным функциям

$$u_2(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) Z_n(z). \quad (3.5)$$

Если выражение (3.5) подставить в уравнение (3.4) и применить метод Фурье с учетом, что собственные функции ортогональны с весом, то для определения коэффициентов  $w_n(t)$  получим уравнение

$$\dot{w}_n + \omega_n^2 w_n = -\frac{A_n \lambda_n \beta}{v_0 \tilde{\gamma}^{3/2}}. \quad (3.6)$$

Решение уравнения (3.6) имеет вид  $w_n(t) = -\frac{A_n \beta}{\lambda_n v_0 \sqrt{\tilde{\gamma}}} (1 - \cos \omega_n t)$ .

Тогда уравнение перемещений сечений стержня определяется зависимостью

$$u(z, t) = u_1(z, t) + u_2(z, t). \quad (3.7)$$

Введя обозначения:  $c = \sqrt{E/\gamma}$  – скорость волны продольных колебаний стержня;

$\sigma_0 = \gamma g l (1 + \zeta) \frac{1 + 2k}{2(1 + k)}$  – напряжения от статической нагрузки в основании стержня;

$B_n = \frac{z}{\lambda_n} (J_1(\lambda_n z) - \alpha_n Y_1(\lambda_n z)) \Big|_{z_1}^{z_2} + \zeta \frac{2+k}{2k} (J_0(\lambda_n z_1) - \alpha_n Y_0(\lambda_n z_1))$ , получаем, соответ-

ственно, зависимости для определения напряжений от скорости волны и от внезапного приложения нагрузки:

$$\sigma_1(z, t) = E \frac{v_0}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\Delta_n^2} (J_1(\lambda_n z) - \alpha_n Y_1(\lambda_n z)) \sin \omega_n t; \quad (3.8)$$

$$\sigma_2(z, t) = \sigma_0 \frac{2(1+k)}{(1+2k)(1+\zeta)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\lambda_n \Delta_n^2} (J_1(\lambda_n z) - \alpha_n Y_1(\lambda_n z)) (\cos \omega_n t - 1). \quad (3.9)$$

Представленный график безразмерных напряжений  $\tilde{\sigma}_1 = (\sigma_1/E) \cdot (c/v_0)$  в основании колонны от безразмерного времени  $\tau = c/4l * t$ , которые возникают от внезапного приложения скорости, для случая  $\zeta = 0, k = 1$ , (рис. 4) имеет существенное отличие от зависимости, полученной для стержней постоянного сечения [11], и характеризуется наличием экстремума в момент, когда напряжения меняют знак. На рис. 5 представлен график изменения безразмерных напряжений  $\tilde{\sigma}_1$  по длине стержня для случая  $\zeta = 0, k = 1$ . Из его анализа следует, что в отличие от стержней постоянной жесткости, опасное сечение находится не в основании, а его положение определяется геометрическими параметрами конструкции и наличием сосредоточенной массы на конце.

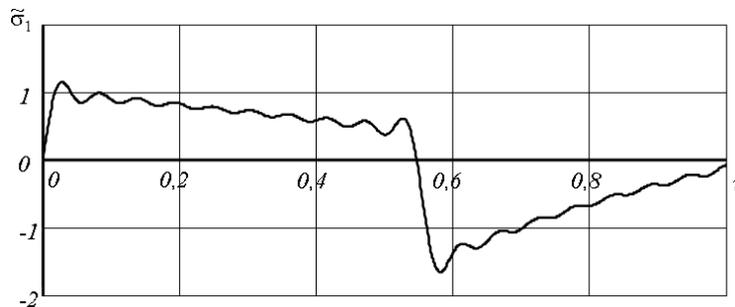


Рис. 4

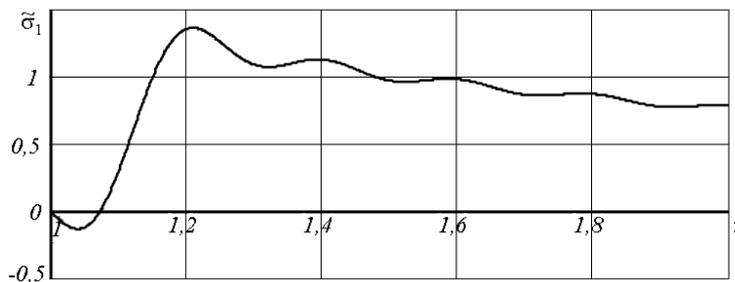


Рис. 5

Для случая внезапного приложения нагрузки, при отсутствии сосредоточенной массы, опасное сечение, как и для стержня постоянной жесткости, будет в основании опоры; при этом динамический коэффициент в зависимости от параметров конструкции будет принимать значения 1,83; ... ; 2.

#### Заключение.

Получено решение задачи о продольных колебаниях конических стержней сплошного и полого сечений, моделирующих конструкции несущих опор. На основании анализа влияния параметров конструкции на значение главной частоты колебаний, даны рекомендации об использовании приближенных методов расчета. Выполненные расчеты напряженно-деформированного состояния, возникающего при ударе конструкции, показывают, что положение опасного сечения для каждого конкретного случая определяется в зависимости от значений параметров опоры.

РЕЗЮМЕ. Досліджено задачу поздовжніх коливань конструкцій несучих опор, в яких на верхньому кінці встановлено обладнання. Розв'язано задачу поздовжнього удару при їх посадці на фундамент із заданою швидкістю та раптове прикладення ваги такої конструкції. Досліджено власні частоти коливань і загальні напруження такої механічної системи. Показано при яких параметрах системи можна застосовувати наближені теорії розрахунку.

1. *Арсенин В.Я.* Методы математической физики и специальные функции – М.: Наука, 1974. – 432 с.
2. *Bityurin A.A.* Calculation of the critical velocity of a stepwise rod system under a longitudinal impact // J. of Appl. Mech. and Techn. Physics. – 2011. – **52**, N 4. – P. 530 – 535.
3. *Doyle J.F.* Longitudinal Waves in Rods // Wave Propagation in Structures – 1989. – P. 58 – 87.
4. *Eberhard P., Hu B., Schiehlen W.* Longitudinal Wave Propagation in Conical Rods Subject to Impacts // Multifield Problems. – 2000. – P. 246 – 253.
5. *Elishakoff I.* Vibrations of Beams and Plates: Review of First Closed-Form Solutions in the Past 250 Years. In: “Mechanical Vibration: Where Do We Stand?” – Vienna: Springer, 2007. – **488**. – P. 389 – 453.
6. *Gulgazaryan G.R., Gulgazaryan R.G., Khachanyan A.A.*, Vibrations of an Orthotropic Cylindrical Panel with Various Boundary Conditions // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 5. – P. 40 – 61.
7. *Gulyaev V.I., Lugovoi P.Z., Borshch E.I.* Self-excited Vibrations of a Drillstring Bit // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 3. – P. 114 – 124.
8. *Gulyaev V.I., Lugovoi P.Z., Andrusenko A.N.*, Numerical Modeling of the Elastic Bending of a Drillstring in a Curved Superdeep Borehole // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 4. – P. 412 – 420.
9. *Legeza V.P., Legeza D.V.* Vibration of a String with Moving End // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 1. – P. 87 – 91.
10. *Schwarz C., Fischer F.D., Werner E., et al.*, Impact of an elastic rod on a deformable barrier: analytical and numerical investigations on models of a valve and a rod-shaped stamping tool // Archive of Appl. Mech. – 2009. – **80**, N 1. – P. 3 – 24.
11. *Shevchenko F.L., Ulitin G.M., Pettik U.V., Rusanova O.A.* Calculation of dynamic strength of elastic deformed systems // Proc. of Donetsk Nation. Techn. Univ. – 2010. – N 1. – P. 55 – 62.
12. *Tsarenko S.N., Ulitin G.M.* Investigation of strained deformed state of variable stiffness rod // Springer-Plus. – 2014. – **3**. – P. 367.
13. *Ulitin G.M.*, The Longitudinal Vibrations of an Elastic Rod Simulating a Drilling Rig // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, N 10. – P. 1380 – 1384.
14. *Vodička V.* Longitudinal vibrations of a conical bar // Applied Scientific Research, Section A. – 1963. – **11**, N 1. – P. 13 – 16.
15. *Werner E.A., Fischer F.D.* The stress state in a moving rod suddenly elastically fixed at its trailing end // Acta Mech. – 1995. – **111**. P. 171 – 179.
16. *Werner S., Hu B., Eberhard P.* Longitudinal Waves in Elastic Rods with Discontinuous Cross Sections // Contact Mechanics. Solid Mechanics and Its Applications. – 2002. – **103**. – P. 117 – 124.
17. *Xing, Y.F., Qiao, Y.S., Zhu, D.C., et al.*, Elastic impact on finite Timoshenko beam // Acta Mech. Sinica. – 2002. – **18**. – P. 252 – 263.

Поступила 13.09.2012

Утверждена в печать 30.09.2014