

П. С. Ковальчук<sup>1</sup>, Л. А. Крук<sup>2</sup>, В. А. Пельх<sup>1</sup>

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОМПОЗИТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК,  
ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ПРОТЕКАЮЩЕЙ ЖИДКОСТЬЮ ПРИ  
РАЗЛИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ЗАКРЕПЛЕНИЯ**

<sup>1</sup>Институт механики им. С. П. Тимошенко НАНУ, ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: volna@inmech.kiev.ua; <sup>2</sup>Национальный транспортный университет, ул. Суворова, 1, 01010, Киев, Украина; e-mail: krukles@ukr.net

**Abstract.** A problem is considered on stability of the filled by moving fluid pipeline, which is modeled by the composite orthotropic cylindrical shell of finite length under different conditions of fastening at ends. Besides the hydrodynamic pressure, the omni-directional eternal static load acts on the shell. An effect of boundary conditions under the external loading on the qualitatively different types of stability loss – “quasi-static” (divergence type) and dynamic (flutter type) – that are realized under some “critical” velocities of fluid motion is studied.

**Key words:** composite orthotropic cylindrical shell, shell finite length, boundary condition at ends, ideal incompressible fluid, stability loss, divergence type, flutter type.

**Введение.**

Проблеме устойчивости и колебаний разнообразных, транспортирующих жидкость трубопроводных систем, моделируемых упругими оболочками цилиндрической формы конечной длины, уделяется в последние годы все большее внимание [8 – 13, 15, 16, 18, 19 и др.]. Преобладающее большинство исследований при этом посвящено вопросам построения и последующего анализа критериев потери устойчивости различного («квазистатического», типа дивергенция, или динамического, типа флаттер) вида, на основании которых устанавливаются значения соответствующих критических скоростей движения жидкости, определяются законы деформирования несущих оболочек в областях, прилегающих непосредственно к границам потери устойчивости. В работе [14] исследованы особенности хаотических режимов взаимодействия упругих пластин с протекающей жидкостью. Вопрос о взаимодействии цилиндрического резервуара с жидкостью при наличии свободной поверхности рассмотрен в [17].

Следует отметить, что в большинстве случаев при исследовании устойчивости и колебаний оболочек, несущих жидкость, рассматривались простейшие краевые условия на торцах, а именно, шарнирное закрепление или свободное опирание. Между тем, в практике нередко встречаются случаи применения других краевых условий, в частности, жесткого защемления на обоих торцах, а также варианты комбинированных, иначе «несимметричных» условий, когда на одном краю реализован один способ крепления (например, жесткое защемление), на другом – качественно иной (например, шарнирное закрепление или свободное опирание) и т.д. Некоторые задачи о влиянии различных как «симметричных», так и «несимметричных» граничных условий на процессы взаимодействия цилиндрических оболочек с внутренним и внешним потоком жидкости детально рассматривались в работах [4, 5]. Решение задач об устойчивости несущих оболочек проводилось в этих работах на основе полубезмоментной теории с использованием некоторых математических упрощений при вычислении собственных частот. При аппроксимации прогибов применялись балочные функции.

В данной работе для расчёта устойчивости заполненных подвижной жидкостью цилиндрических оболочек с ортотропной структурой строения материала используются уравнения классической теории. Для различных краевых условий построены аналитические формулы, позволяющие определять значения критических скоростей потока жидкости, при которых происходит та или иная формы потери устойчивости несущих оболочек. Проанализирована зависимость величин критических скоростей от собственных частот оболочек с жидкостью, параметров волнообразования, а также всестороннего статического нагружения.

### §1. Постановка задачи. Исходные динамические уравнения.

Рассмотрим замкнутую, подвергнутую действию равномерно распределённого по боковой поверхности внешнего давления  $q_0$  ортотропную цилиндрическую оболочку конечной длины, полностью заполненную жидкостью, которая движется с некоторой постоянной скоростью  $U$ . Соответствующие геометрические размеры оболочки и система отсчета показаны на рис. 1.

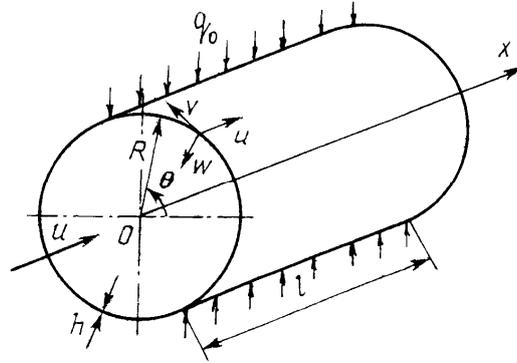


Рис. 1

Для изучения процессов потери устойчивости несущей оболочки используем линеаризованные уравнения, представленные в перемещениях  $u, v, w$  [1 – 3]:

$$\begin{aligned} \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{12} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + C_{66} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right); \\ \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= C_{22} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + C_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_{66} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right); \\ \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= - \left[ D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_G) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] + C_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + \\ &+ \frac{1}{R} C_{22} \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{R} w \right) + q - P_z. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь использованы традиционные в теории композитных (ортотропная модель) цилиндрических оболочек обозначения [1]:  $\rho$  – плотность материала оболочки;

$$D_{kk} = \frac{E_k h^3}{12(1 - \mu_1 \mu_2)}, \quad C_{kk} = \frac{E_k h}{1 - \mu_1 \mu_2} \quad (k = 1, 2); \quad C_{12} = C_{21} = \frac{E_1 \mu_2 h}{1 - \mu_1 \mu_2} = \frac{E_2 \mu_1 h}{1 - \mu_1 \mu_2}; \quad C_{66} = Gh;$$

$D_{12} = D_{11}\mu_2 + 2D_G$ ;  $D_G = \frac{Gh^3}{12}$  ( $E_1$  и  $E_2$  – модули упругости в направлении осей  $x$  и  $y$ , соответственно,  $G$  – модуль сдвига,  $\mu_1, \mu_2$  – коэффициенты Пуассона), а также обозначено  $q = -\varepsilon_0\rho\frac{\partial w}{\partial t} - q_0R\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ , где  $\varepsilon_0$  – коэффициент конструкционного демпфирования;  $P_2$  – гидродинамическое давление на оболочку со стороны жидкостного потока, связанное с потенциалом скоростей  $\varphi$  посредством известного соотношения [2, 3, 10 и др.]

$$P_2 = -\rho_0\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + U\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{r=R} \quad (\rho_0 \text{ – плотность жидкости}). \quad (1.2)$$

Выражение потенциала  $\varphi$  (жидкость предполагается идеальной и несжимаемой) находим исходя из решения представленной в цилиндрических координатах  $x, r, \Theta$  краевой задачи [3]

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\Theta^2} = 0; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{r=R} = -\left(\frac{\partial w}{\partial t} + U\frac{\partial w}{\partial x}\right); \quad \frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{r=0} < \infty$$

$$(0 \leq x \leq l; 0 \leq r \leq R; 0 \leq \Theta \leq 2\pi). \quad (1.3)$$

Функция прогиба  $w$  в (1.3) определяется видом задаваемых на краях граничных условий. В последующем рассмотрим четыре варианта данных условий, наиболее часто встречающихся на практике: 1) свободное опирание на обоих торцах; 2) жесткое защемление на обоих торцах; 3) свободное опирание – жесткое защемление (жидкость протекает от опертого края к защемленному); 4) жесткое защемление – свободное опирание (поток жидкости осуществляется от защемленного края к опертому). При этом, учитывая замкнутость оболочки, ее радиальный динамический прогиб  $w$  в общем случае можно представить в виде разложения

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f_{nm}(t) X_m(x) \cos s_n y, \quad (1.4)$$

где  $f_{nm}$  – неизвестные функции времени, имеющие смысл обобщенных координат оболочки;  $X_m(x)$  – собственные осевые формы;  $s_n = n/R$  – параметр окружного волнообразования. Для определения функций  $X_m(x)$  используем граничные условия, которые для перечисленных выше 4-х вариантов крепления оболочек можно представить в таком виде [1, 2, 6]:

- 1)  $v = 0, w = 0, M_x = 0, N_x = 0$  при  $x = 0, x = l$ ;
- 2)  $v = 0, w = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0, N_x = 0$  при  $x = 0, x = l$ ;
- 3)  $v = 0, w = 0, N_x = 0$  при  $x = 0, x = l$ ;  $M_x = 0$  при  $x = 0$ ;  $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$  при  $x = l$ ; (1.5)
- 4)  $v = 0, w = 0, N_x = 0$  при  $x = 0, x = l$ ;  $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$  при  $x = 0$ ;  $M_x = 0$  при  $x = l$ .

Здесь обозначено:  $M_x$  – изгибающий момент,  $N_x$  – продольное усилие, приходящееся на единицу длины оболочки. Соответствующие этим условиям осевые формы с использованием тригонометрических функций зададим в форме:

$$\begin{aligned}
& 1) X_m(x) = C_m \sin \lambda_m x; \quad 2) X_m(x) = C_m \sin^2 \lambda_m x; \quad 3) X_m(x) = C_m \left( \sin 2\lambda_m x - \frac{1}{2} \sin 4\lambda_m x \right); \\
& 4) X_m(x) = C_m \left( \sin \lambda_m x - \frac{1}{2} \sin 2\lambda_m x \right) \quad (C_m = \text{const}) \quad (\lambda_m = m\pi / l). \quad (1.6)
\end{aligned}$$

Потенциалы скоростей жидкости для каждой из этих форм имеют, соответственно, вид:

$$\begin{aligned}
& 1) \varphi = - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{T_{nm}}{\lambda_m} (f_{nm} \sin \lambda_m x + f_{nm} \lambda_m U \cos \lambda_m x) \cos s_n y; \\
& 2) \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( f_{nm} \frac{Q_{nm}}{4\lambda_m} \cos 2\lambda_m x - \frac{1}{2} f_{nm} Q_{nm} U \sin 2\lambda_m x - f_{nm} \frac{r^n}{2nR^{n-1}} \right) \cos s_n y; \\
& 3) \varphi = - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ f_{nm} \left( \frac{Q_{nm}}{2\lambda_m} \sin 2\lambda_m x - \frac{F_{nm}}{8\lambda_m} \sin 4\lambda_m x \right) + \right. \\
& \quad \left. + f_{nm} \left( Q_{nm} \cos 2\lambda_m x - \frac{F_{nm}}{2} \cos 4\lambda_m x \right) U \right] \cos s_n y; \quad (1.7) \\
& 4) \varphi = - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \left( f_{nm} \frac{T_{nm}}{\lambda_m} \sin \lambda_m x - \frac{Q_{nm}}{4\lambda_m} \sin 2\lambda_m x \right) + \right. \\
& \quad \left. + f_{nm} \left( T_{nm} \cos \lambda_m x - \frac{Q_{nm}}{2} \cos 2\lambda_m x \right) U \right] \cos s_n y,
\end{aligned}$$

где функции  $Q_{nm}$ ,  $T_{nm}$  и  $F_{nm}$  выражаются так:

$$T_{nm} = \frac{I_n(\lambda_m r)}{I'_n(\lambda_m R)}; \quad Q_{nm} = \frac{I_n(2\lambda_m r)}{I'_n(2\lambda_m R)}; \quad F_{nm} = \frac{I_n(4\lambda_m r)}{I'_n(4\lambda_m R)},$$

причем  $I_n$  – модифицированные функции Бесселя  $n$ -го порядка;  $I_n'(k\lambda_m R) = \frac{1}{2} [I_{n-1}(k\lambda_m R) + I_{n+1}(k\lambda_m R)]$  ( $k = 1, 2, 4$ ).

Не ограничивая общности исследования пренебрегаем в дальнейшем продольными и окружными инерционными членами в исходной системе (1.1) [1, 3]. В результате на основании этой системы получим уравнение, составленное относительно одной переменной – прогиба  $w$ . В символическом виде это уравнение можно записать в следующей форме:

$$\left[ (L_{11}L_{22} - L_{12}^2)L_{33} + (L_{21}L_{13} - L_{11}L_{23})L_{32} + (L_{12}L_{23} - L_{13}L_{22})L_{31} \right] w = (L_{11}L_{22} - L_{12}^2)q_1, \quad (1.8)$$

где  $L_{jk}$  – дифференциальные операторы вида

$$\begin{aligned}
L_{11} &= C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \quad L_{12} = L_{21} = (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \quad L_{13} = -\frac{C_{12}}{R} \frac{\partial}{\partial x}; \\
L_{22} &= C_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \quad L_{23} = -\frac{C_{22}}{R} \frac{\partial}{\partial y}; \quad L_{31} = C_{21} \frac{\partial}{\partial x}; \quad L_{32} = \frac{C_{22}}{R} \frac{\partial}{\partial y}; \\
L_{33} &= - \left( D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2D_{33} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{C_{12}}{R} \right); \quad D_{33} = D_{12} + 2D_G, \quad (q_1 = q - P_2).
\end{aligned}$$

Если найдено значение функции  $w$  из (1.8), то перемещения  $u$  и  $v$  могут быть восстановлены из соотношений

$$\left(L_{11}L_{22} - L_{12}^2\right)u = \left(L_{12}L_{23} - L_{13}L_{22}\right)w; \quad \left(L_{11}L_{22} - L_{12}^2\right)v = \left(L_{21}L_{13} - L_{11}L_{23}\right)w.$$

После подстановки (1.4), (1.2) с учетом (1.6), (1.7) в уравнение (1.8) и реализации метода Бубнова – Галеркина получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения неизвестных величин  $f_{nm}(t)$ . В общем случае данная система при условии  $q = 0$  имеет вид [7, 10, 11, 15]

$$\begin{aligned} & \ddot{f}_{nm} + \left(\omega_{nm}^2 - \alpha_{nm}U^2\right)f_{nm} + \varepsilon_{nm}\dot{f}_{nm} + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{\substack{q=1 \\ (p \neq n, q \neq m)}}^{\infty} \kappa_{pq}^{nm} \ddot{f}_{pq}^{nm} + \\ & + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{\substack{q=1 \\ (p \neq n, q \neq m)}}^{\infty} \gamma_{pq}^{nm} f_{pq}^{nm} + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{\substack{q=1 \\ (p \neq n, q \neq m)}}^{\infty} \beta_{pq}^{nm} U \dot{f}_{pq} + \\ & + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{\substack{q=1 \\ (p \neq n, q \neq m)}}^{\infty} \delta_{pq}^{nm} U^2 f_{pq}^{nm} + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{\substack{q=1 \\ (p \neq n, q \neq m)}}^{\infty} h_{pq}^{nm} \dot{f}_{pq}^{nm} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (1.9)$$

где  $\omega_{nm}$  – собственные частоты оболочки с учетом влияния присоединенной массы жидкости,  $\varepsilon_{nm}$  – приведенный коэффициент демпфирования;  $\alpha_{nm}, \kappa_{pq}, \gamma_{pq}, \beta_{pq}, \delta_{pq}^{nm}, h_{pq}^{nm}$  – постоянные коэффициенты, соответствующие способу крепления оболочки на краях.

Система (1.9) является исходной для расчета устойчивости рассматриваемых оболочек при реализации различных краевых условий. На основании её с использованием соответствующих методик [2, 4, 7, 10] можно определить значения критических скоростей потока, которые отвечают той или иной форме потери устойчивости (дивергентной или флаттерной).

## §2. Устойчивость оболочки при симметричных краевых условиях.

Для решения задач об устойчивости рассмотрим в дальнейшем упрощенные двухмодовые аппроксимации прогибов  $w$ , учитывая в (1.4) две низшие осевые формы ( $m = 1, 2$ ) и одну окружную форму  $n = n_0$ . В частности, для оболочки с краевыми условиями (1) из (1.5) задача об устойчивости сводится к анализу двух уравнений [7]

$$\ddot{f}_1 + \omega_{11}f_1 + \varepsilon_1\dot{f}_1 - \beta_1U\dot{f}_2 = 0; \quad \ddot{f}_2 + \omega_{22}f_2 + \varepsilon_2\dot{f}_1 - \beta_2U\dot{f}_1 = 0 \quad (2.1)$$

$$\left[ \begin{aligned} & \omega_{11} = \omega_1^2 - \alpha_1U^2; \quad \omega_{22} = \omega_2^2 - \alpha_2U^2; \quad \omega_k^2 = \frac{1}{\rho m_{0k}} \times \\ & \times \left[ \frac{1}{h} \left( D_{11}\lambda_k^4 + 2D_{33}\lambda_k^2s^2 + D_{22}s^4 \right) + \frac{\lambda_k^4}{R^2\Delta_\delta(\lambda_k, s)} - \frac{q_0Rs^2}{h} \right]; \end{aligned} \right.$$

$$m_{0k} = 1 + \frac{\rho_0 T_{nk}}{\rho h \lambda_k}; \quad \alpha_k = \frac{\rho_0}{\rho h} \frac{\lambda_k}{m_{0k}} T_{nk}; \quad \beta_k = \frac{16}{3} \frac{\rho_0}{\rho m_{0k}} \frac{1}{\lambda_j h l} T_{nj} \quad (k, j = 1, 2 \quad k \neq j) \left. \right\}$$

Полагая в (2.1)  $f_k = C_k e^{\Omega t}$ , где  $C_k = \text{const}$ , получим характеристическое уравнение в виде

$$\Omega^4 + c_1 \Omega^3 + c_2 \Omega^2 + c_3 \Omega + c_4 = 0, \quad (2.2)$$

коэффициенты которого выражаются так:

$$c_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2; \quad c_2 = \omega_{11} + \omega_{22} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \beta_1 \beta_2 U^2;$$

$$c_3 = \omega_{22} \varepsilon_1 + \omega_{11} \varepsilon_2; \quad c_4 = \omega_{11} \omega_{22}.$$

Отсюда устанавливаем, что дивергентная неустойчивость оболочки ранее всего наступит при скорости жидкостного потока

$$U_\partial = U_\partial^1 = \min \left\{ \frac{\omega_1}{\sqrt{\alpha_1}}, \frac{\omega_2}{\sqrt{\alpha_2}} \right\}.$$

Ширина дивергентной зоны для каждого значения волнового параметра  $n$  будет при этом равна:

$$\Delta U_\partial = \left| \frac{\omega_2}{\sqrt{\alpha_2}} - \frac{\omega_1}{\sqrt{\alpha_1}} \right|.$$

В свою очередь, неустойчивость типа флаттер при отсутствии демпфирования ( $\varepsilon_0 = 0$ ) произойдет при скоростях  $U$ , равных [7]

$$U \geq U_\phi = \sqrt{\frac{d_2}{2d_1} \left[ -1 \pm \sqrt{1 - \frac{4d_1 d_3}{d_2^2}} \right]} \quad (2.3)$$

$$\left( d_1 = \alpha_0^2 - 4\alpha_1 \alpha_2; \quad d_2 = -2(\omega_1^2 + \omega_2^2) \alpha_0 + 4(\omega_1^2 \alpha_2 + \omega_2^2 \alpha_1); \right.$$

$$\left. d_3 = (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2; \quad \alpha_0 = \alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1 \beta_2 \right).$$

Подкоренное выражение (2.3) должно быть положительным.

Если  $\varepsilon_0 \neq 0$ , то вместо (2.3) будем иметь иную формулу  $U_\phi \geq \frac{\omega_2}{\sqrt{\alpha_2}}$ , т.е. критическая скорость флаттера совпадет с критической скоростью дивергенции  $U_\partial^{(2)}$  ( $U_\partial^{(2)} > U_\partial^{(1)}$ ). Это означает, что флаттер оболочки в данном случае наступит сразу же после дивергентной области.

**Числовой пример.** Пусть оболочка характеризуется параметрами:

$$E_1 = 2,15 \cdot 10^9 \text{ Па}; \quad E_2 = 1,23 \cdot 10^9 \text{ Па}; \quad G = 2,15 \cdot 10^8 \text{ Па};$$

$$\mu_1 = 0,19; \quad \rho = 1,65 \rho_0; \quad \rho_0 = 10^3 \text{ кг/м}^3; \quad (2.4) \quad l = 5R; \quad h = \frac{1}{64} R; \quad R = 0,16 \text{ м.} \quad (2.4)$$

В табл. 1 приведены значения безразмерных скоростей дивергенции  $\bar{U}_\partial^{(1),(2)}$  и флаттера  $\bar{U}_\phi$ , а также величины собственных частот  $\omega_{1,2}$  (в Герцах) рассматриваемой оболочки с жидкостью, соответствующие различным параметрам окру-

ного волнообразования  $n$  ( $2 \leq n \leq 10$ ). Безразмерные скорости  $\bar{U}$  определены из соотношения  $\bar{U} = \frac{U}{k_0}$ , где  $k_0 = \frac{\pi^2}{l} \sqrt{\frac{D_{11}}{\rho h}}$  [10]. Жирным шрифтом здесь и в последующих таблицах выделены значения критических скоростей  $\bar{U}_\delta$  и  $\bar{U}_\phi$ , соответствующих наиболее ранней (при наименьшей скорости потока) потере устойчивости рассматриваемой оболочки.

Из представленных результатов следует, что квазистатическая неустойчивость оболочки ранее всего наступит при  $\bar{U}_\delta = 2,41$ ;  $n = 3$ ,  $m = 1$ , причем возбуждаемая при этом форма отвечает минимальной собственной частоте данной оболочки ( $\omega_1 = 14,89$  Гц). Динамическая неустойчивость также наступит при  $n = 3$ , однако в «формировании» флаттерных колебаний одновременно принимают участие обе осевые формы:  $m_1 = 1$ ;  $m_2 = 2$ .

Таблица 1

$\bar{U}, \omega$ \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{U}_\delta^{(1)}$	2,93	<b>2,41</b>	3,43	5,62	8,74	12,79	17,82	23,89	31,06
$\bar{U}_\delta^{(2)}$	3,76	2,83	<b>2,65</b>	3,29	4,65	6,59	9,08	12,10	15,69
$\bar{U}_\phi$	4,25	<b>3,23</b>	3,57	5,62	8,80	12,95	18,13	24,42	31,90
$\omega_1$	18,35	<b>14,89</b>	20,97	33,93	52,17	75,51	104,10	138,10	177,73
$\omega_2$	46,91	34,91	<b>32,31</b>	39,67	55,45	77,81	105,90	139,84	179,41

Отметим, что скорости флаттера  $U_\phi$  для каждого волнового параметра  $n$  всегда будут превышать скорости  $U_\delta^{(1)}$  и  $U_\delta^{(2)}$ , что иллюстрируется графиками на рис. 2 (здесь кривые 1 и 2 соответствуют величинам  $\bar{U}_\delta^{(1)}$  и  $\bar{U}_\delta^{(2)}$ ; кривая 3 –  $\bar{U}_\phi$ ).

Рис. 3 иллюстрирует влияние радиального статического давления  $q_0$  на значения собственных частот  $\omega$  (а) и критических скоростей жидкостного потока  $\bar{U}$  (б). При расчетах было принято  $q_0 = 10^4$  Па. Частоты  $\omega$  на кривых 1, 2 (рис. 3, а) построены соответственно при  $q_0 \neq 0$  и  $q_0 = 0$ . Кривые 1, 2, 3 на рис. 3, б иллюстрируют величины критических скоростей потока в загруженной внешним давлением оболочке (нумерация кривых здесь такая же как и на рис. 2). Сравнение рисунков 2 и 3, б показывает, что с одной стороны, внешнее давление существенно уменьшает величины  $U_\phi$ . Кроме того, поскольку при  $n = 3, 4$  действительные значения частот  $\omega$  отсутствуют (это следует из рис. 3, а), то дивергентная зона, отвечающая данным волновым параметрам, будет находиться в области  $0 \leq U \leq U_\delta^{(2)}$ . В этой же области возможно и возбуждение флаттера.

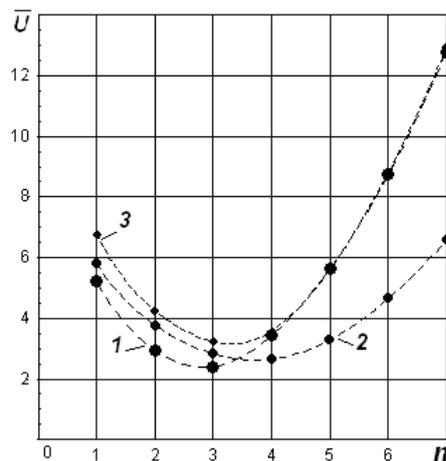


Рис. 2

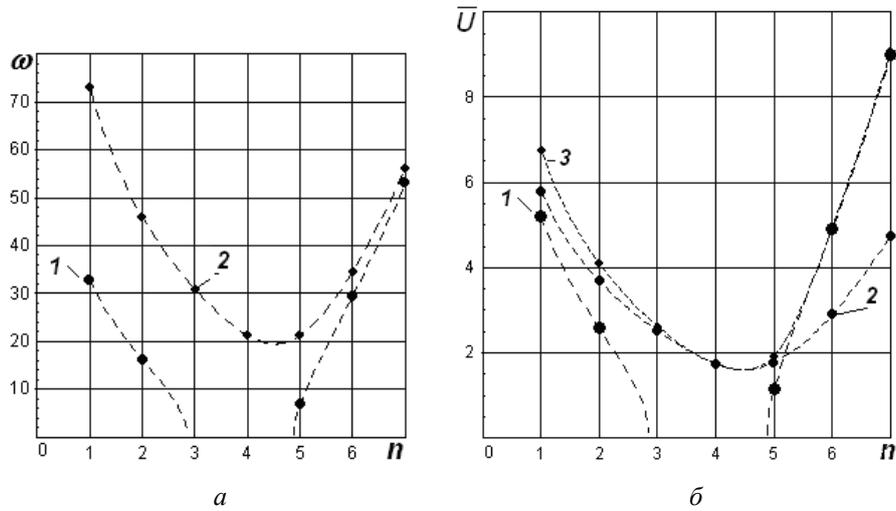


Рис. 3

В случае жесткого закрепления обоих краев оболочки для расчета их устойчивости получено более сложную, в сравнении с (2.1), систему

$$\begin{aligned} \dot{f}_1 + (\omega_1^2 - \alpha_1 U^2) f_1 + \varepsilon_1 \dot{f}_1 + \kappa_1 \ddot{f}_2 + \gamma_1 f_2 + \varepsilon_{11} \dot{f}_2 &= 0; \\ \dot{f}_2 + (\omega_2^2 - \alpha_2 U^2) f_2 + \varepsilon_2 \dot{f}_2 + \kappa_2 \ddot{f}_1 + \gamma_2 f_1 + \varepsilon_{12} \dot{f}_1 &= 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где приняты обозначения:

$$\begin{aligned} \omega_k^2 &= \frac{1}{3\rho m_{0k}} \left[ \frac{1}{h} (16D_{11}\lambda_k^4 + 8D_{33}\lambda_k^2 s^2 + 3D_{22}s^4) + \frac{16\lambda_k^4}{R^2 \Delta_\delta(2\lambda_k, s)} \right] - \frac{q_0 R s^2}{\rho h m_{0k}}; \\ \alpha_k &= \frac{2}{3h m_{0k}} \frac{\rho_0 \lambda_k}{\rho} Q_{nk}; \quad \varepsilon_k = \frac{\varepsilon_0}{m_{0k}}; \quad \varepsilon_{1k} = -\frac{2}{3} \varepsilon_k; \quad \kappa_k = -\frac{2}{3 m_{0k}} \left( 1 + \frac{\rho_0 R}{\rho n h} \right); \\ \gamma_k &= -\frac{2s^2}{3\rho h m_{0k}} (D_{22}s^2 - q_0 R); \quad m_{0k} = 1 + \frac{2}{3} \frac{\rho_0}{\rho h} \left( \frac{R}{n} + \frac{Q_{nk}}{4\lambda_k} \right) \quad (k=1, 2). \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение, полученное на основании (2.5), структурно будет иметь вид (2.2) со следующими коэффициентами:

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 - \kappa_1 \kappa_2; \quad c_1 = \frac{1}{c_0} [\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - (\kappa_1 \varepsilon_{12} + \kappa_2 \varepsilon_{11})]; \\ c_2 &= \frac{1}{c_0} [\omega_{11} + \omega_{22} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 - (\varepsilon_{11} \varepsilon_{12} + \kappa_1 \gamma_2 + \kappa_2 \gamma_1)]; \\ c_3 &= \frac{1}{c_0} [\omega_{11} \varepsilon_2 + \omega_{22} \varepsilon_1 - (\gamma_1 \varepsilon_{12} + \gamma_2 \varepsilon_{11})]; \\ c_4 &= \frac{1}{c_0} (\omega_{11} \omega_{22} - \gamma_1 \gamma_2); \quad \omega_{11} = \omega_1^2 - \alpha_1 U^2; \quad \omega_{22} = \omega_2^2 - \alpha_2 U^2. \end{aligned}$$

Анализируя данное уравнение, устанавливаем, что критические скорости потока, при которых оболочка теряет устойчивость по дивергентному и флаттерному типу, определяются соответственно из формул

$$U_{\delta}^{(1),(2)} = \sqrt{\frac{1}{2\alpha_1\alpha_2} \left[ (\omega_1^2\alpha_2 + \omega_2^2\alpha_1) \pm \sqrt{(\omega_1^2\alpha_2 + \omega_2^2\alpha_1) + 4\alpha_1\alpha_2\gamma_1\gamma_2} \right]}; \quad (2.6)$$

$$U_{\phi} = \sqrt{\frac{1}{2e_1} (-e_2 \pm \sqrt{e_2^2 - 4e_1e_3})}, \quad (2.7)$$

где постоянные коэффициенты  $e_k$  ( $k=1, \dots, 3$ ) имеют вид:

$$e_1 = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4c_0\alpha_1\alpha_2; \quad e_2 = -2p_1(\alpha_1 + \alpha_2) + 4c_0(\omega_1^2\alpha_2 + \omega_2^2\alpha_1);$$

$$e_3 = p_1^2 - p_2; \quad c_0 = 1 - \kappa_1\kappa_2; \quad p_1 = \omega_1^2 + \omega_2^2 - (\kappa_1\gamma_2 + \kappa_2\gamma_1); \quad p_2 = 4c_0(\omega_1^2\omega_2^2 - \gamma_1\gamma_2).$$

Результаты числовых расчетов безразмерных скоростей  $\bar{U}_{\delta}^{(1)}, \bar{U}_{\delta}^{(2)}, U_{\phi}$  для оболочки с параметрами (2.5), установленных согласно формул (2.6) и (2.7), приведены в табл. 2 при  $q_0 = 0$  (верхняя строка) и  $q_0 = 10^4$  Па (нижняя строка). Здесь также представлены значения собственных частот данной оболочки, заполненной жидкостью.

Таблица 2

$\bar{U} \quad \omega_1 \quad \omega_2$	$n$							
	2	3	4	5	6	7	8	9
$\bar{U}_{\delta}^{(1)}$	3,78 3,55	3,01 1,96	<b>2,83</b> -	2,90 <b>1,76</b>	3,45 2,60	4,46 3,45	5,88 4,77	7,67 6,49
$\bar{U}_{\delta}^{(2)}$	4,27 4,21	<b>3,43</b> 3,21	3,72 2,60	5,46 <b>2,40</b>	8,22 4,76	11,90 8,41	16,51 12,93	22,09 18,39
$\bar{U}_{\phi}$	5,96 5,96	4,66 4,64	3,88 3,85	3,42 3,37	<b>3,18</b> 3,11	3,21 <b>3,06</b>	3,79 3,29	5,21 4,21
$\omega_1$	26,22 24,68	<b>21,24</b> 14,09	24,23 <b>2,58</b>	35,37 12,14	52,89 30,60	75,94 53,67	104,39 81,77	138,35 115,20
$\omega_2$	53,72 52,93	45,00 41,96	<b>41,90</b> 34,03	46,65 <b>32,40</b>	59,92 41,27	80,71 59,96	108,01 86,12	141,37 118,65

Из приведенных результатов можно сделать следующие выводы. Наиболее ранняя потеря устойчивости оболочки дивергентного типа в данном случае произойдет при больших значениях скоростей  $U$ , чем в случае свободно опертой на краях оболочки. Кроме того, более сложной является форма деформирования оболочки при потере устойчивости. Усложняется также мода, по которой будет происходить возбуждение флаттерных колебаний. Если для опертой оболочки этой моде соответствуют волновые параметры  $m_1 = 1, m_2 = 2, n = 3$ , то для жестко закрепленной оболочки имеем  $m_1 = 1, m_2 = 2, n = 6$ . Отметим также, что при статическом нагружении оболочки левая граница дивергентной зоны при  $n = 4$  – отсутствует. Квазистатическая неустойчивость возникнет при возбуждении другой моды с волновым параметром  $n = 5$ . В целом радиальное нагружение приводит к существенному уменьшению величин критических скоростей потока жидкости.

### §3. Устойчивость оболочки при несимметричных краевых условиях.

Более сложными являются задачи об исследовании устойчивости рассматриваемых оболочек при разных способах крепления их на обоих краях. Для примера рассмотрим оболочку с краевыми условиями 3 из перечня (1.5). Используя двухмодовую аппроксимацию прогиба (1.6), выводим в данном случае такую систему уравнений для определения обобщенных перемещений  $f_1$  и  $f_2$ :

$$\begin{aligned} \ddot{f}_1 + (\omega_1^2 - \alpha_1 U^2) f_1 + \varepsilon_1 \dot{f}_1 + \kappa_1 \ddot{f}_2 + \gamma_1 f_2 + \varepsilon_{11} \dot{f}_2 + \gamma_{11} U^2 f_2 &= 0; \\ \ddot{f}_2 + (\omega_2^2 - \alpha_2 U^2) f_2 + \varepsilon_2 \dot{f}_2 + \kappa_2 \ddot{f}_1 + \gamma_2 f_1 + \varepsilon_{12} \dot{f}_1 + \gamma_{12} U^2 f_1 &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Коэффициенты данной системы определяются формулами:

$$\begin{aligned} \omega_k^2 &= \frac{4}{5\rho m_{0k}} \left[ \frac{1}{h} \left( 80D_{11}\lambda_k^4 + 16D_3\lambda_k^2 s^2 + \frac{5}{4}D_{22}s^4 \right) + \frac{16\lambda_k^4}{R^2} \left( \frac{1}{\Delta_\delta(2\lambda_k, s)} + \frac{4}{\Delta_\delta(4\lambda_k, s)} \right) \right] - \frac{q_0 R s^2}{h\rho m_{0k}}; \\ m_{01} &= 1 + \frac{\rho_0}{20\rho h\lambda_1} (8K_{11} + K_{21}); \quad m_{02} = 1 + \frac{\rho_0}{20\rho h\lambda_2} (8K_{12} + K_{22}); \quad \alpha_k = \frac{4\rho_0}{5\rho} \frac{\lambda_k}{hm_{0k}} (2K_{1k} + K_{2k}); \\ \varepsilon_k &= \frac{\varepsilon_0}{m_{0k}}; \quad \varepsilon_{1k} = -\frac{2}{5}\varepsilon_k; \quad (k=1,2); \quad \kappa_1 = -\frac{1}{5m_{01}} \left( 2 + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{K_{12}}{h\lambda_2} \right); \quad \kappa_2 = -\frac{1}{5m_{02}} \left( 2 + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{K_{21}}{h\lambda_1} \right); \\ \gamma_1 &= -\frac{4}{5\rho m_{01}} \left[ \frac{1}{h} \left( 8D_{11}\lambda_2^4 + 4D_3\lambda_2^2 s^2 + \frac{D_{22}}{2}s^4 \right) + \frac{8\lambda_2^4}{R^2 \Delta_\delta(4\lambda_2, s)} \right] + \frac{2}{5} \frac{q_0 R s^2}{\rho h m_{01}}; \\ \gamma_2 &= -\frac{4}{5\rho m_{02}} \left[ \frac{1}{h} \left( 128D_{11}\lambda_1^4 + 16D_3\lambda_1^2 s^2 + \frac{D_{22}}{2}s^4 \right) + \frac{128\lambda_1^4}{R^2 \Delta_\delta(4\lambda_1, s)} \right] + \frac{2}{5} \frac{q_0 R s^2}{\rho h m_{02}}; \\ \gamma_{11} &= \frac{4\rho_0}{5\rho} \frac{\lambda_2}{hm_{01}} K_{12}; \quad \gamma_{12} = \frac{4\rho_0}{5\rho} \frac{2\lambda_1}{hm_{02}} K_{21}; \quad K_{11} = \frac{I_n(2\lambda_1 R)}{I'_n(2\lambda_1 R)}; \quad K_{12} = \frac{I_n(2\lambda_2 R)}{I'_n(2\lambda_2 R)}; \\ K_{21} &= \frac{I_n(4\lambda_1 R)}{I'_n(4\lambda_1 R)}; \quad K_{22} = \frac{I_n(4\lambda_2 R)}{I'_n(4\lambda_2 R)}. \end{aligned}$$

Составленное на основании (3.1) характеристическое уравнение в общем случае имеет вид (2.2) с такими коэффициентами:

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 - \kappa_1 \kappa_2; \quad c_1 = \frac{1}{c_0} [\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - (\kappa_1 \varepsilon_{12} + \kappa_2 \varepsilon_{11})]; \\ c_2 &= \frac{1}{c_0} [\omega_{11} + \omega_{22} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 - (\varepsilon_{11} \varepsilon_{12} + \kappa_1 \gamma_2 + \kappa_2 \gamma_1 + \kappa_1 \gamma_{12} U^2 + \kappa_2 \gamma_{11} U^2)]; \\ c_3 &= \frac{1}{c_0} [\omega_{11} \varepsilon_2 + \omega_{22} \varepsilon_1 - (\gamma_1 + \gamma_{11} U^2) \varepsilon_{12} - (\gamma_2 + \gamma_{12} U^2) \varepsilon_{11}]; \\ c_4 &= \omega_{11} \omega_{22} - (\gamma_1 + \gamma_{11} U^2) (\gamma_2 + \gamma_{12} U^2). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Используя изложенную ранее методику, выводим следующие соотношения для определения в рассматриваемом случае граничных значений скоростей дивергентной области:

$$U_{\partial}^{(1),(2)} = \sqrt{\frac{p_2}{2p_1} \left( -1 \pm \sqrt{1 - \frac{4p_1 p_3}{p_2^2}} \right)} \quad (3.3)$$

и критических скоростей флаттера, справедливых при  $\varepsilon = 0$ ,

$$U_{\phi} = \sqrt{\frac{q_2}{2q_1} \left( -1 \pm \sqrt{1 - \frac{4q_1 q_3}{q_2^2}} \right)}. \quad (3.4)$$

Здесь  $p_k, q_k$  ( $k = 1, \dots, 3$ ) – постоянные коэффициенты:

$$\begin{aligned} p_1 &= \alpha_1 \alpha_2 - \gamma_{11} \gamma_{12}; \quad p_2 = -(\omega_1^2 \alpha_2 + \omega_2^2 \alpha_1) - (\gamma_1 \gamma_{12} + \gamma_2 \gamma_{11}); \\ p_3 &= \omega_1^2 \omega_2^2 - \gamma_1 \gamma_2; \quad q_1 = d_2^2 - 4c_0 d_3; \quad q_2 = 2d_1 d_2 - 4c_0 d_4; \\ q_3 &= d_1^2 - 4c_0 d_5; \quad d_1 = \omega_1^2 + \omega_2^2 - (\kappa_1 \gamma_2 + \kappa_2 \gamma_1); \\ d_2 &= -(\alpha_1 + \alpha_2 + k_1 \gamma_{12} + k_2 \gamma_{11}); \quad d_3 = \alpha_1 \alpha_2 - \gamma_{11} \gamma_{12}; \\ d_4 &= -(\omega_2^2 \alpha_1 + \omega_1^2 \alpha_2) - (\gamma_1 \gamma_{12} + \gamma_2 \gamma_{11}); \quad d_5 = \omega_1^2 \omega_2^2 - \gamma_1 \gamma_2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Если  $\varepsilon_0 \neq 0$ , то искомую скорость  $U_{\phi}$  определим, решая непосредственно уравнения 4-й степени (2.3) с коэффициентами (3.2).

Таблица 3

$\bar{U},$ $\omega_1, \omega_2$	$n$							
	2	3	4	5	6	7	8	9
$\bar{U}_{\partial}^{(1)}$	4,67	3,73	3,15	<b>2,86</b>	3,08	4,37	6,33	8,80
$\bar{U}_{\partial}^{(2)}$	4,17	3,05	2,36	<b>2,17</b>	2,60	3,06	3,76	4,76
$\bar{U}_{\phi}$	4,73	3,77	3,20	<b>2,96</b>	–	–	–	–
$\omega_1$	59,76	43,99	34,01	<b>31,66</b>	40,73	59,82	86,24	118,93
$\omega_2$	125,61	101,83	86,68	<b>78,64</b>	78,92	89,09	109,09	137,76

Результаты расчетов на основании (3.3), (3.4) численных значений критических скоростей потока  $\bar{U}_{\partial}^{(1)}$ ,  $\bar{U}_{\partial}^{(2)}$ ,  $\bar{U}_{\phi}$  и собственных частот для оболочки с параметрами (2.10) приведены в табл. 3.

Как видно, в отличие от рассмотренных в §2 задач и дивергентная потеря устойчивости оболочки, и флаттер наступят, прежде всего, при возбуждении в оболочке одной и той же окружной моды  $n = 5$ . При этом критические скорости потока несколько превысят значения соответствующих скоростей, вычисленных для оболочки с опертыми или жестко закрепленными краями. Очевидно также, что при  $\bar{U} > 2,96$  возможна потеря устойчивости оболочки лишь дивергентного типа (флаттер оболочки здесь вообще не будет реализован при выбранных параметрах волнообразования  $n$ ).

Следует в заключение отметить одну особенность рассмотренной выше задачи. Характеристическое уравнение (2.2) с учетом (3.2) остается одним и тем же при противоположном изменении направления движения жидкости от опертого края к заземленому. Скорость потока  $U$  в обоих случаях входит в это уравнение в четных степенях, т.е. при  $U > 0$  и  $U < 0$  получим, по существу, одни и те же решения системы (3.1). Аналогичная ситуация характерна для оболочек с симметричными краевыми условиями, что представляется естественным. В данном случае необходимо, видимо, использовать другие аппроксимации прогиба  $w$ , такие, которые обуславливали бы качественное изменение разрешающих уравнений при изменении направления движения в оболочке жидкости. Для иллюстрации рассмотрим случай, когда жидкость в оболочке протекает от закрепленного края до опертого, что соответствует краевым условиям п.4 в (1.6). В отличие от (3.1) система уравнений решения будет иметь иную структуру связей между обобщенными координатами  $f_1$  и  $f_2$ :

$$\ddot{f}_1 + (\omega_1^2 - \alpha_1 U^2) f_1 + \varepsilon_1 \dot{f}_1 + \delta_1 U \dot{f}_1 + \kappa_1 \ddot{f}_2 + \varepsilon_{11} \dot{f}_2 + \gamma_1 f_2 + \gamma_{11} U^2 f_2 + \delta_2 U \dot{f}_2 = 0;$$

$$\ddot{f}_2 + (\omega_2^2 - \alpha_2 U^2) f_2 + \varepsilon_2 \dot{f}_2 + \kappa_2 \ddot{f}_1 + \varepsilon_{12} \dot{f}_1 + \gamma_2 f_1 + \gamma_{12} U^2 f_1 + \delta_3 U \dot{f}_1 = 0. \quad (3.6)$$

$$\left[ \omega_k^2 = \frac{4}{5\rho m_{0k}} \left[ \frac{1}{h} \left( 5D_{11}\lambda_k^4 + 4D_{33}\lambda_k^2 s^2 + \frac{5}{4}D_{22}s^4 \right) + \frac{\lambda_k^4}{R^2} \left( \frac{1}{\Delta_\delta(\lambda_k, s)} + \frac{4}{\Delta_\delta(2\lambda_k, s)} \right) \right] - \frac{q_0 R s^2}{\rho h m_{0k}} \right];$$

$$m_{0k} = 1 + \frac{4}{5} \frac{\rho_0}{\rho h \lambda_k} \left( K_{1k} + \frac{K_{2k}}{8} \right); \quad \alpha_k = \frac{4}{5} \frac{\rho_0}{\rho h \lambda_k} \left( K_{1k} + \frac{K_{2k}}{2} \right);$$

$$\varepsilon_k = \frac{\varepsilon_0}{m_{0k}}; \quad \varepsilon_{1k} = -\frac{2}{5} \varepsilon_k; \quad (k=1,2); \quad \kappa_1 = -\frac{2}{5m_{01}} \left( 1 + \frac{\rho_0}{\rho \lambda_2 h} K_{12} \right); \quad \kappa_2 = -\frac{2}{5m_{02}} \left( 1 + \frac{\rho_0}{\rho \lambda_1 h} K_{21} \right);$$

$$\delta_1 = \frac{4}{15m_{01}} \frac{\rho_0}{\rho h \lambda_1} (K_{21} - 2K_{11}); \quad \delta_2 = \frac{4}{15m_{01}} \frac{\rho_0}{\rho h \lambda_1} \left( -2K_{12} + \frac{K_{22}}{5} \right); \quad \delta_3 = \frac{64}{75m_{02}} \frac{\rho_0}{\rho h \lambda_1} K_{11};$$

$$\gamma_1 = -\frac{2}{5\rho m_{01}} \left[ \frac{1}{h} \left( D_{11}\lambda_2^4 + 2D_{33}\lambda_2^2 s^2 + \frac{D_{22}}{2} s^4 \right) + \frac{\lambda_2^4}{2R^2 \Delta_\delta(\lambda_2, s)} - \frac{q_0 R s^2}{h} \right];$$

$$\gamma_2 = -\frac{2}{5\rho m_{02}} \left[ \frac{1}{h} \left( 16D_{11}\lambda_1^4 + 8D_{33}\lambda_1^2 s^2 + D_{22}s^4 \right) + \frac{8\lambda_1^4}{R^2 \Delta_\delta(2\lambda_1, s)} - \frac{q_0 R s^2}{h} \right];$$

$$\gamma_{11} = \frac{2\rho_0}{5\rho} \frac{\lambda_2}{h m_{01}} K_{12}; \quad \gamma_{12} = \frac{4\rho_0}{5\rho} \frac{\lambda_1}{h m_{02}} K_{21}; \quad K_{11} = \frac{I_n(\lambda_1 R)}{I_n'(\lambda_1 R)}; \quad K_{12} = \frac{I_n(\lambda_2 R)}{I_n'(\lambda_2 R)};$$

$$K_{21} = \frac{I_n(2\lambda_1 R)}{I_n'(2\lambda_1 R)}; \quad K_{22} = \frac{I_n(2\lambda_2 R)}{I_n'(2\lambda_2 R)}. \quad (3.7)$$

Особенностью уравнений (3.6) в сравнении с (3.1) является то, что скорость потока жидкости  $U$  входит в них и в первой, и во второй степени. Это означает, что при изменении направления движения жидкости решения данных уравнений уже не будут совпадать. В табл. 4 приведены некоторые результаты расчетов критических скоростей потока  $\bar{U}_\delta^{(1)}$  и собственных частот  $\omega_1, \omega_2$ , причем величины  $\bar{U}_\delta^{(1)}$  определены с использованием формулы  $U_\delta^{(1)} = \sqrt{p_2/2p_1 \left( -1 \pm \sqrt{1 - 4p_1p_3/p_2^2} \right)}$ , в которой параметры  $p_1, p_2, p_3$  определяются согласно (3.5) с учетом обозначений (3.7).

Таблица 4

$\bar{U}$	$n$							
	2	3	4	5	6	7	8	9
$\bar{U}_\delta^{(1)}$	5,49	4,28	<b>4,17</b>	5,78	8,20	11,60	15,94	21,22
$\omega_1$	26,17	<b>20,36</b>	23,63	31,13	52,84	75,97	104,47	138,45
$\omega_2$	60,49	46,96	<b>41,97</b>	46,23	59,64	80,66	108,45	141,65

В табл. 4 отсутствуют значения критических скоростей  $\bar{U}_\delta^{(2)}$  и  $\bar{U}_\phi$ , поскольку действительных корней в соответствующих данному случаю уравнениях не было выявлено при исходных данных (2.5). Это означает, что оболочка теряет устойчивость лишь по дивергентному типу, причем конечная граница дивергентной зоны при  $2 \leq n \leq 9$  не может быть установлена на основании формулы типа (3.4).

Влияние статического давления также приведет к уменьшению как частот  $\omega_1, \omega_2$ , так и критических скоростей дивергенции  $U_\delta^{(1)}$ .

#### Заключение.

Таким образом, в данной работе получено решение задачи о влиянии различных краевых условий и всестороннего статического давления на потерю устойчивости композитных (ортотропная модель) цилиндрических оболочек при взаимодействии их с внутренним потоком жидкости. Установлено ряд специфических особенностей потери устойчивости данных оболочек при «симметричных» (одних и тех же на обоих краях) и «несимметричных» способах крепления на торцах. Показано, что в некоторых случаях динамическая форма потери устойчивости (типа флаттер) не будет реализована при различных скоростях движения жидкости. Установлено, что всестороннее статическое давление на оболочку обуславливает не только существенное уменьшение минимальных критических скоростей жидкостного потока, при которых произойдет потеря устойчивости оболочки, но и может привести к изменению формы ее волнообразования (по сравнению со случаем, когда давление отсутствует).

РЕЗЮМЕ. Отримано розв'язок задач про стійкість заповненого рухомою рідиною трубопроводу, модельованого композитною (ортотропна модель) циліндричною оболонкою скінченної довжини при різних умовах закріплення на торцях. Крім гідродинамічного тиску, оболонка перебуває під дією всестороннього зовнішнього статичного навантаження. Досліджено вплив крайових умов при зовнішньому навантаженні на якісно різні види втрати стійкості – «квазистатичний» (типу «дивергенція») та динамічний (типу «флаттер»), що реалізуються при певних («критичних») швидкостях руху рідини.

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. – 340 с.
3. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
4. Горачек Я., Золотарев И. Влияние закрепления краев цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью на ее динамические характеристики // Прикл. механика. – 1984. – **20**, № 8. – С. 50 – 57.
5. Горачек Я., Золотарев И.А. Собственные колебания и устойчивость цилиндрических оболочек при взаимодействии с протекающей жидкостью // Динамика тел, взаимодействующих со средой / Под ред. акад. АН УССР А.Н. Гузя. – К.: Наук. думка, 1991. – С. 215 – 272.
6. Каиперский В.С. Экспериментальное исследование влияния граничных условий на устойчивость стеклопластиковых цилиндрических оболочек при внешнем давлении // Прикл. механика. – 1994. – **30**, № 11. – С. 50 – 57.
7. Ковальчук П.С., Подчасов Н.П. Устойчивость упругих цилиндрических оболочек при взаимодействии с протекающей жидкостью // Прикл. механика. – 2010. – **46**, № 1. – С. 73 – 82.
8. Amabili M. Nonlinear Dynamics and Stability of Shells and Plates. – Cambridge: Cambridge University Press, 2008. – 402 p.
9. Amabili M., Païdoussis M.P. Review of Studies on Geometrically Nonlinear Vibrations and Dynamics of Circular Cylindrical Shells and Panels, with a Without Fluid-Structure Interaction // Appl. Mech. Rev. – 2003. – **56**, N 4. – P. 349 – 381.
10. Amabili M., Pellicano F., Païdoussis M.P. Nonlinear Dynamics and Stability of Circular Cylindrical Shell Containing Flowing Fluid. Part I. Stability // J. Sound and Vibr. – 1999. – **225**, N 4. – P. 655 – 699.
11. Amabili M., Pellicano F., Païdoussis M.P. Nonlinear Dynamics and Stability of Circular Cylindrical Shell Containing Flowing Fluid. Part II: Large Amplitude Vibrations without Flow // J. Sound and Vibr. – 1999. – **228**, N 5. – P. 1103 – 1124.
12. Amabili M., Pellicano F., Païdoussis M.P. Nonlinear Dynamics and Stability of Circular Cylindrical Shell Containing Flowing Fluid. Part III: Truncation Effect without Flow and Experiments // J. Sound and Vibr. – 2000. – **237**, N 4. – P. 617 – 640.
13. Amabili M., Pellicano F., Païdoussis M.P. Nonlinear Dynamics and Stability of Circular Cylindrical Shells Containing Flowing Fluid. Part IV. Large Amplitude Vibrations with Flow // J. of Sound and Vibr. – 2000. – N 4. – P. 641 – 666.
14. Avramov K.V., Strelnikova E.A. Chaotic Vibrations of Plates Two-sided Interaction with Flux of Moving Fluid // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 3. – P. 329 – 335.
15. Dowell E.H., Hall K.C. Modeling of fluid structure interaction // Ann. Rev. of Fluid Mech. – 2001. – N 33. – P. 445 – 490.
16. Goncalves P.B., Batista R.C. Nonlinear Vibration Analysis of Fluid-Filled Cylindrical Shells // J. Sound and Vibr. – 1988. – **127**, N 4. – P. 133 – 143.
17. Limarchenko O.S., Tkachenko R.V. Effect of Spring Clamping on Dynamics of Cylindrical Reservoir with Liquid Placed on Movable Platform // Int. Appl. Mech. – 2014. – **46**, N 3. – P. 315 – 321.
18. Matsuzaki Y., Fung Y.C. Unsteady Fluid Dynamic Forces on Simply-Supported Circular Cylinder of Finite Length Conveying a Flow, With Applications to Stability Analysis // J. Sound and Vibr. – 1977. – **54**. – P. 317 – 330.
19. Pellicano F., Amabili M. Stability and Vibration of Empty and Fluid-filled Circular Cylindrical Shells under Static and Periodic Axial Loads // Int. J. Solids and Struct. – 2003. – **40**. – P. 3229 – 3251.

Поступила 06.09.2012

Утверждена в печать 29.05.2014