

Г. Я. Попов, Н. Д. Вайсфельд

**ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛИТЫ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ
ПРИ УЧЕТЕ ЕЕ УДЕЛЬНОГО ВЕСА**

*Институт математики, экономики и механики
Одесского национального университета им. И.И. Мечникова
e-mail: popov@onu.edu.ua*

Abstract. The exact solution is built for the elastic plate with cylindrical inclusion. The technique is proposed that is based on the Weber type integral transform without of using the Papkovich – Neiber representation. This simplifies the problem. The numerical example is given with using the new approaches to solve integrals which include the strongly oscillating functions.

Key words: plate, cylindrical inclusion, Weber type integral transform, numerical example.

Введение.

Потребности инженерной практики обуславливают интерес к решению задач для тел, ослабленных полостями, потому количество работ, посвященных этой проблематике, достаточно велико [8, 9, 11 – 13, 16 – 18]. Сложность указанных задач определяется типом граничных условий, заданных на полости. Наиболее трудным является случай, когда на полости заданы граничные условия первой основной задачи. В такой постановке различные приближенные решения задач для цилиндрической полости предложены в работах [1, 2, 3], причем в последней работе проблема сведена к решению бесконечных систем алгебраических уравнений для приближенного решения которой использован метод [4], который позволяет получить решение с любой наперед заданной точностью. Это послужило основанием авторам [3] считать их решение точным.

Приближенный метод решения этой же задачи предложен в [5]. Более простым оказался случай, когда на цилиндрической поверхности выполнено условие скользящей заделки. В этом случае удается получить точное решение. По-видимому, впервые удалось такое решение в случае полупространства получить в [19]. Ключевым моментом в их построениях является использование интегрального преобразования типа Вебера. Наиболее общий вид таких преобразований получен в [6]. Близкий метод построения точного решения для слоя намечен в работе [5], но реализован для случая полупространства.

В данной работе построено точное решение такой же задачи для слоя, но с учетом собственного веса материала слоя. Для этого предложен метод, основанный на интегральном преобразовании типа Вебера без использования представления Папковича – Нейбера, что упростило существенно решение и позволило дать его численную реализацию с использованием последних достижений в вычислении интегралов, содержащих сильно осциллирующие функции [15].

§1. Постановка задачи.

Упругая (коэффициент Пуассона μ , модуль сдвига G) толстая плита в цилиндрической системе координат, описываемая соотношениями

$$a \leq r < \infty, \quad -\pi < \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq z \leq h, \quad (1.1)$$

загружена на грани $z = h$ нормальной нагрузкой

$$\sigma_z(r, h) = -p(r), \quad \tau_{zr}(r, h) = 0. \quad (1.2)$$

На грани $z = 0$ плита либо опирается на абсолютно жесткое основание без трения

$$u_z(r, 0) = 0, \quad \tau_{zr}(r, 0) = 0 \quad (1.3)$$

либо сцеплена с ним

$$u_z(r, 0) = 0, \quad u_r(r, 0) = 0. \quad (1.4)$$

На поверхности контакта $r = a$ плиты с жестким включением выполнено условие скользящей заделки

$$u_r(a, z) = 0, \quad \tau_{rz}(a, z) = 0. \quad (1.5)$$

Будем учитывать удельный вес материала плиты. Обозначим удельный вес через γ . Искомыми являются смещения $u_r(r, z) \equiv u(r, z)$, $u_z(r, z) = w(r, z)$, которые должны удовлетворять осесимметричным уравнениям Ламе с объемными силами:

$$r^{-1} [ru'(r, z)]' - r^{-2}u(r, z) + \mu_*^{-1} [u''(r, z) + \mu_0 w'(r, z)] = 0, \quad \mu_0 = (1 - 2\mu)^{-1}, \quad (1.6)$$

$$r^{-1} [rw'(r, z)]' + \mu_* w''(r, z) + \mu_0 r^{-1} (ru'(r, z))' = \gamma G^{-1}, \quad \mu_* = \mu_0 + 1.$$

Здесь и всюду в дальнейшем частную производную по первой переменной будем помечать штрихом, а по второй – точкой.

Напряжения будут выражаться через эти смещения по формулам

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{l} \sigma_r(r, z) \\ \sigma_z(r, z) \end{array} \right\| &= 2G\mu_0 \left[(1 - \mu) \left\| \begin{array}{l} u' \\ w' \end{array} \right\| + \mu \left\| \begin{array}{l} r^{-1}u + w' \\ u' + r^{-1}u \end{array} \right\| \right], \quad \tau_{zr} = G(w' + u'). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Требуется построить точное решение краевой задачи (1.2) – (1.6), заданной в области (1.1).

§2. Построение точного решения.

Рассмотрим случай, когда на плиту (1.1) действует только удельный вес и вместо (1.2) будет иметь место условие

$$\sigma_z(r, h) = 0, \quad \tau_{zr}(r, h) = 0. \quad (2.1)$$

Для построения точного решения в этом случае построим предварительно частное решение $u^{(\gamma)}(r, z), w^{(\gamma)}(r, z)$ неоднородных дифференциальных уравнений (1.6). Непосредственной подстановкой легко проверить, что таковыми будут функции

$$u^{(\gamma)}(r, z) = 0, \quad w^{(\gamma)}(r, z) = (2\mu_* G)^{-1} \gamma z^2. \quad (2.2)$$

Решение краевой задачи (1.6), (1.3), (1.5) и (2.1) строим в виде

$$u(r, z) = u^\gamma(r, z) + u^\circ(r, z), \quad w(r, z) = w^{(\gamma)}(r, z) + w^\circ(r, z), \quad (2.3)$$

где $u^0(r, z), w^0(r, z)$ – общее решение однородных уравнений Ламе; отвечающие им напряжения (1.7) также будем пометать нулем. При этом граничные условия (1.3), (1.5) и (2.1) для функций $u^0(r, z), w^0(r, z)$ переходят в следующие:

$$\begin{aligned} w^0(r, 0) = 0, \quad u^{0*}(r, 0) = 0; \quad \sigma_z^0(r, h) = \gamma h, \\ \tau_{zr}^0(r, h) = 0; \quad u^0(a, z) = 0, \quad w^{0*}(a, z) = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Полученная краевая задача для однородных уравнений Ламе (1.6) имеет элементарное решение

$$u^0(r, z) = 0, \quad w^0(r, z) = -(G\mu_*)^{-1} \gamma h z. \quad (2.5)$$

Легко проверить, что оно удовлетворяет однородным уравнениям Ламе (1.6) и всем граничным условиям (2.4). Следовательно, поставленная краевая задача (1.6), (1.3), (1.5) и (2.1) имеет элементарное решение:

$$u(r, z) = 0, \quad w(r, z) = (G\mu_*)^{-1} \gamma z \left(\frac{1}{2} z - h \right). \quad (2.6)$$

Поскольку решения (2.5) удовлетворяют граничным условиям (2.4) и в том случае, если второе условие из (2.4) заменить на $u^0(r, 0) = 0$, следовательно, полученное решение (2.6) будет решением и в случае, когда плита (1.1) сцеплена с жестким основанием. Кроме того, из соотношений (2.5) и (2.4) следует, что если не учитывать собственный вес плиты, а загрузить ее таким образом

$$\sigma_z(r, h) = -p, \quad p = \text{const}, \quad \tau_{zr}(r, h) = 0, \quad (2.7)$$

то будем иметь тоже элементарное решение

$$u(r, z) = 0, \quad w(r, z) = -(G\mu_*)^{-1} p z. \quad (2.8)$$

Этот, с первого взгляда неожиданный, результат объясняется достаточно просто следующим. Если в рассматриваемой плите выполнено условие скользящей заделки на цилиндрической поверхности $r = a$, а грань $z = h$ загружена только равномерно распределенной нормальной нагрузкой, то для такой плиты будет выполнена гипотеза плоских (параллельных основанию) сечений и, значит, решение таких задач можно получить, используя более простую теорию сопротивления материалов. Это и привело к полученным элементарным решениям. Однако гипотеза плоских сечений не будет выполнена, если в плите (1.1) на грани $z = h$ будут выполнены не условия (2.7), а более общие, т. е.

$$\sigma_z(r, h) = -p(r); \quad \tau_{zr}(r, h) = q(r) \quad (a < r < \infty). \quad (2.9)$$

§3. Решение краевой задачи.

Именно в такой более общей постановке будем решать краевые задачи для однородных уравнений Ламе ($\gamma = 0$), оставив по-прежнему граничные условия (1.5), (1.3) или (1.4). Если в такой постановке задача будет решена, то чтобы учесть удельный вес плиты, следует к полученному решению прибавить элементарное решение (2.6). Для решения задачи в указанной постановке представляется удобным в уравнениях (1.6) и в перечисленных граничных условиях перейти к безразмерным координатам и соответствующим им функциям

$$\rho = a^{-1}r, \quad \xi = h^{-1}z, \quad u(r, z) = u(\rho a, \xi h) = U(\rho, \xi), \quad w(\rho a, \xi h) = W(\rho, \xi). \quad (3.1)$$

Тогда система (1.6) примет вид ($\gamma = 0$)

$$\begin{aligned} \rho^{-1}[\rho U'(\rho, \xi)]' - \rho^{-2}U(\rho, \xi) + \mu_*^{-1}\alpha^2 U^{**}(\rho, \xi - 1) + \mu_*^{-1}\mu_0 W^{*\prime}(\rho, \xi) &= 0, \quad 0 < \rho, \xi < 1, \\ \rho^{-1}[\rho W'(\rho, \xi)]' + \mu_*\alpha^2 W^{**}(\rho, \xi) + \mu_0\alpha\rho^{-1}[\rho U^*(\rho, \xi)]' &= 0, \quad ah^{-1} = \alpha. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Условие скользящей заделки при $r = a$ (1.5) с учетом (1.7) и (3.1) в новых переменных принимает вид

$$U(1, \xi) = 0, \quad W'(1, \xi) = 0. \quad (3.3)$$

Аналогично, граничное условие (1.3) запишется так:

$$U^*(\rho, 0) = 0, \quad W(\rho, 0) = 0, \quad (3.4)$$

а условие (1.4) примет вид

$$U(\rho, 0) = 0, \quad W(\rho, 0) = 0. \quad (3.5)$$

Краевые условия (2.9) с учетом (1.2) и (3.1) перейдут в следующие:

$$\begin{aligned} U'(\rho, 1) + \rho^{-1}U(\rho, 1) + \bar{\mu}\alpha W^*(\rho, 1) &= -a(2G\mu\mu_0)^{-1}p(a\rho), \quad \bar{\mu} = (1 - \mu)^{-1}, \\ W'(\rho, 1) + \alpha U^*(\rho, 1) &= Aq(a\rho), \quad A = aG^{-1}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Построим точное решение двумерных краевых задач (3.2), (3.3) – (3.6). Для сведения краевой задачи (3.2), (3.3) – (3.6) к одномерной задаче применяется интегральное преобразование типа Вебера [6, 19] непосредственно к уравнениям (3.2), т.е. вводим трансформанты типа Вебера для функций, входящих в (3.2):

$$U_\lambda(\xi) = \int_1^\infty \rho U(\rho, \xi) \chi_1(\rho, \lambda) d\rho, \quad U(\rho, \xi) = \int_0^\infty \frac{\lambda U_\lambda(\xi) \chi_1(\rho, \lambda)}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)} d\lambda; \quad (3.7)$$

$$W_\lambda(\xi) = \int_1^\infty \rho W(\rho, \xi) \chi_0(\rho, \lambda) d\rho, \quad W(\rho, \xi) = \int_0^\infty \frac{\lambda W_\lambda(\xi) \chi_0(\rho, \lambda)}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)} d\lambda; \quad (3.8)$$

$$\chi_j(\rho, \lambda) = J_j(\lambda\rho)N_1(\lambda) - N_j(\lambda\rho)J_1(\lambda), \quad j = 0, 1.$$

Выполнив указанную операцию, удовлетворим условию (3.3) и сведем систему (3.2) к одномерной:

$$\begin{aligned} U_\lambda''(\xi) - \mu_*\lambda_*^2 U_\lambda(\xi) - \mu_0\lambda_* W_\lambda'(\xi) &= 0, \quad 0 < \xi < 1, \\ W_\lambda''(\xi) - \mu_*^1[\lambda_*^2 W_\lambda(\xi) - \mu_0\lambda_* U_\lambda(\xi)] &= 0, \quad \lambda_* = \alpha^{-1}\lambda. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Чтобы свести проблему к одномерной, следует граничные условия (3.4) – (3.6) также записать в трансформантах (3.7) и (3.8)

$$W_\lambda(0), U_\lambda'(0) = 0; \quad (3.10a)$$

$$W_\lambda(0) = 0, U_\lambda(0) = 0; \quad (3.10b)$$

$$\lambda_* U_\lambda(1) + \bar{\mu} W_\lambda'(1) = -A_* p_\lambda, \quad U_\lambda'(1) - \lambda_* W_\lambda(1) = Aq_\lambda, \quad (3.11)$$

$$\left\| \frac{p(\lambda)}{q(\lambda)} \right\| = \int_1^{\infty} \rho \left\| \frac{\chi_0(\rho, \lambda) p(a\rho)}{\chi_1(\rho, \lambda) q(a\rho)} \right\| d\rho, \quad A = \frac{a}{G\alpha}, \quad A_* = \frac{a}{2\mu\mu_0 G\alpha}.$$

§4. Решение одномерных краевых задач (3.9), (3.10a), (3.11) и (3.9), (3.10b), (3.11).

Подобная одномерная краевая задача уже известна [14]. Следуя предложенной там схеме, записываем систему в виде векторного уравнения, введя следующие вектор и матрицы:

$$\bar{y}(\xi) = \begin{pmatrix} U_\lambda(\xi) \\ W_\lambda(\xi) \end{pmatrix}; \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu_*^{-1} & 0 \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} \mu_* & 0 \\ 0 & \mu_*^{-1} \end{pmatrix}; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Тогда систему (3.9) запишем в виде

$$L_2 \bar{y}(\xi) \equiv \bar{y}''(\xi) + \mu_0 \lambda_* Q \bar{y}'(\xi) - \lambda_*^2 P \bar{y}(\xi) = 0; \quad 0 < \xi < 1. \quad (4.2)$$

Чтобы получить общее решение этого уравнения, необходимо предварительно определить матрицу $Y(\xi)$, удовлетворяющую уравнению

$$L_2 Y(\xi) = 0; \quad 0 < \xi < 1. \quad (4.3)$$

Ее находим в виде $Y(\xi) = e^{\xi \zeta} I$, где ζ – комплексное число. Подстановка этого выражения в (4.3) приводит к соотношению

$$L_2 e^{\xi \zeta} I = M(\xi) e^{\xi \zeta}, \quad (4.4)$$

где матрицы $M(\xi)$ и ее обратная $M^{-1}(\xi)$ имеют вид $(\tilde{\mu} = [2(1-\mu)]^{-1})$

$$M(\xi) = \begin{pmatrix} \xi^2 - \mu_* \lambda_*^2 & -\mu_0 \lambda_* \xi \\ \tilde{\mu} \lambda_* \xi & \xi^2 - \mu_*^{-1} \lambda_*^2 \end{pmatrix};$$

$$M^{-1}(\xi) = \frac{(\xi + \lambda_*)^{-2}}{(\xi - \lambda_*)^2} \begin{pmatrix} \xi^2 - \mu_*^{-1} \lambda_*^2 & -\mu_0 \lambda_* \xi \\ -\tilde{\mu} \lambda_* \xi & \xi^2 - \mu_* \lambda_*^2 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

На основании (4.4) и (4.5) решение уравнения (4.3) запишем в виде

$$Y(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\xi \zeta} M^{-1}(\zeta) d\zeta, \quad (4.6)$$

где C – замкнутый контур, охватывающий полюсы матрицы $M^{-1}(\zeta)$. Если через C_+ обозначить замкнутый контур, охватывающий полюс $\zeta = \lambda_*$, и принять в (4.6) $C = C_+$, то формула (4.6) даст решение $Y_+(\xi)$, растущее при $\xi \rightarrow \infty$. Если же C_- – замкнутый контур, охватывающий полюс $\zeta = -\lambda_*$, и в (4.6) принять $C = C_-$, то формула (4.6) даст решение $Y_-(\xi)$, убывающее при $\xi \rightarrow \infty$.

Таким образом, получено два линейно-независимых решения уравнения (4.3)

$$Y_{\pm}(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\pm}} \frac{e^{\xi \zeta}}{(\xi - \lambda_*)^2 (\xi + \lambda_*)^2} \begin{pmatrix} \xi^2 - \mu_*^{-1} \lambda_*^2 & -\mu_0 \lambda_* \xi \\ -\tilde{\mu} \lambda_* \xi & \xi^2 - \mu_* \lambda_*^2 \end{pmatrix} d\zeta,$$

которые после проведения контурного интегрирования принимают вид

$$Y_{\pm}(\xi) = \begin{pmatrix} I_{\pm}^{(2)}(\xi) - \frac{\lambda_*^2}{\mu_*} I_{\pm}^{(0)}(\xi) & \frac{\lambda_*}{\mu_0} I_{\pm}^{(1)}(\xi) \\ -\frac{\lambda_*}{2(1-\mu)} I_{\pm}^{(1)}(\xi) & I_{\pm}^{(2)}(\xi) - \lambda_*^2 \mu_* I_{\pm}^{(0)}(\xi) \end{pmatrix},$$

где

$$I_{\pm}^{(j)}(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\pm}} \frac{\xi^{(j)} e^{\xi z}}{(\xi - \lambda_*)^2 (\xi + \lambda_*)^2} d\xi = \operatorname{Res}_{\xi=\pm\lambda_*} \frac{\xi^j e^{\xi z}}{(\xi - \lambda_*)^2 (\xi + \lambda_*)^2}, \quad j = 0, 1, 2;$$

C_{\pm} – контуры, охватывающие, соответственно, полюса λ_* и $(-\lambda_*)$. Подсчитав указанные вычеты, построим общее решение векторного уравнения (4.2):

$$\bar{y}(\xi) = \bar{y}_+(\xi) + \bar{y}_-(\xi) = Y_+(\xi) \begin{pmatrix} C_1^+ \\ C_2^+ \end{pmatrix} + Y_-(\xi) \begin{pmatrix} C_1^- \\ C_2^- \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

где C_i^{\pm} ($i=1,2$) – неизвестные постоянные.

Учитывая, что компоненты вектора $\bar{y}(\xi)$ – неизвестные трансформанты смещений, получаем

$$U_{\lambda}(\xi) = \frac{1}{4} e^{\lambda \xi} \frac{\alpha(\xi, \lambda_*)}{\mu_*} C_1^+ + \frac{1}{4} e^{\lambda \xi} \frac{\xi}{\mu_0} C_2^+ - \frac{1}{4\mu_*} e^{-\lambda \xi} \beta(\xi, \lambda_*) C_1^- - \frac{1}{4} \frac{e^{-\xi \lambda_*}}{\mu_0} z C_2^-; \quad (4.8)$$

$$W_{\lambda}(\xi) = -\frac{1}{8} \frac{e^{\lambda \xi} \xi}{(1-\mu)} C_1^+ + \frac{1}{4} e^{\lambda \xi} \beta(\xi, \lambda_*) C_2^+ + \frac{1}{8} \frac{e^{-\lambda \xi} \xi}{(1-\mu)} C_1^- - \frac{1}{4} e^{-\lambda \xi} \alpha(\xi, \lambda_*) C_2^-; \quad (4.9)$$

$$\alpha(\xi, \lambda_*) = \frac{\mu_* (1 + \xi \lambda_*) + (1 - \xi \lambda_*)}{\lambda_*}; \quad \beta(\xi, \lambda_*) = \frac{(1 + \xi \lambda_* + \mu_* (1 - \xi \lambda_*))}{\lambda_*}.$$

Чтобы найти константы C_i^{\pm} ($i=1,2$) в данных представлениях трансформант смещений, удовлетворим краевым условиям (3.10a), (3.11) (постоянные приведены в *Приложении 1*).

К построенным трансформантам (4.8), (4.9) применим обратное интегральное преобразование Вебера (3.7), (3.8), соответственно, чем завершим построение точного решения задачи, поставленной для случая скользящей заделки на грани $\xi = 0$, в виде

$$U(\rho, \xi) = \sum_{i=1}^4 I_i(\rho, \xi); \quad W(\rho, \xi) = \sum_{j=1}^4 J_j(\rho, \xi), \quad (4.10)$$

где $I_i(\rho, \xi), J_j(\rho, \xi)$ – интегралы, вид которых приведен в *Приложении 2*.

Используя формулу связи напряжений со смещениями

$$\sigma_z(r, z) = 2G\mu_0 \left(\mu \left(u' + \frac{u}{r} \right) + (1-\mu) w' \right),$$

перейдем к безразмерным переменным и обозначениям (3.1)

$$\sigma_{\xi}(\rho, \xi) = \sigma_z(a\rho, h\xi) = \frac{2G\mu_0}{a} \left(\mu \left(U' + \frac{U}{\rho} \right) + (1-\mu) \alpha W' \right).$$

Исследуем значения напряжения для случая, когда $q = 0, p(r) = \begin{cases} P, & a \leq r \leq b; \\ 0, & r > b. \end{cases}$

В этом случае для постоянных $C_i^\pm (i = 1, 2)$ выполняется $C_1^- = -C_1^+, C_2^- = C_2^+$, а напряжения принимают вид

$$\sigma_\xi(\rho, \xi) = 2G\mu_0^* \left\{ \int_0^\infty \frac{C_1^+}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)} [\psi_1(\rho, \lambda)q_1(\lambda, \xi) - \psi_0(\rho, \lambda)q_2(\lambda, \xi)] d\lambda + \int_0^\infty \frac{C_2^+}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)} [\psi_1(\rho, \lambda)q_3(\lambda, \xi) + \psi_0(\rho, \lambda)q_4(\lambda, \xi)] d\lambda \right\} \quad (4.11)$$

($\psi_1(\rho, \lambda) = \chi_1'(\rho, \lambda) + \frac{1}{\rho}\chi_1(\rho, \lambda), \psi_0(\rho, \lambda) = \chi_0(\rho, \lambda)$, коэффициенты $q_i(\lambda, \xi)$ ($i = \overline{1, 4}$) приведены в Приложении 3).

Исследуем асимптотику напряжений (4.11), для чего предварительно следует установить характер поведения констант $C_1^+(\lambda), C_2^+(\lambda)$, а также коэффициентов $q_i(\lambda, \xi)$ ($i = 1, 4$) и функций $\psi_i(\rho, \lambda)$ ($i = 0, 1$) при $\lambda \rightarrow \infty$ и $\lambda \rightarrow 0$. Для констант $C_i^+(\lambda)$ ($i = 1, 2$) получаем

$$C_2^+(\lambda) \sim \frac{8ap_\lambda e^{-\lambda}(2\mu - 1)}{G\alpha\lambda} + O\left(\frac{e^{-2\lambda}}{\lambda^2}\right); \quad (4.12)$$

$$C_1^+(\lambda) \sim \frac{4ap_\lambda e^{-\lambda}(-4\mu^4 + 10\mu^3 - 10\mu^2 + 5\mu - 1)}{G\alpha\lambda} + O\left(\frac{e^{-2\lambda}}{\lambda^2}\right).$$

Для коэффициентов $q_i(\lambda, \xi)$ ($i = \overline{1, 4}$) получаем такие асимптотические выражения:

$$q_1(\lambda) \sim \alpha\mu e^{\lambda\xi} \lambda \left(\frac{\xi}{4}(1 - \mu^*) \right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right);$$

$$q_2(\lambda) \sim \lambda e^{\lambda\xi} \left(\frac{\alpha + \xi}{8} \right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right);$$

$$q_3(\lambda) \sim \frac{\xi\mu}{4\mu_0} e^{\lambda\xi} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right);$$

$$q_4(\lambda) \sim \frac{e^{\lambda\xi} \lambda \xi}{2} (1 - \mu^*) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right); \quad p_\lambda \sim \frac{1}{\lambda}. \quad (4.13)$$

Учитывая формулы асимптотик функций Бесселя при больших значениях аргумента, получаем асимптотики функций $\psi_i(\rho, \lambda)$ ($i = 0, 1$):

$$\psi_1(\rho, \lambda) \sim \frac{2}{\lambda} \frac{1}{\pi\rho^{3/2}} (\sin \lambda(1 - \rho) - \cos \lambda(1 - \rho)) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right); \quad (4.14)$$

$$\psi_0(\rho, \lambda) \sim -\frac{2}{\pi\sqrt{\rho\lambda}} \cos \lambda \rho \cos \lambda + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

При $\lambda \rightarrow 0$ в подынтегральных выражениях напряжений (4.11) все функции ограничены. Для проведения вычислений по этой формуле проведем такую процедуру: разобьем интеграл на интервале $\lambda \in (0; +\infty)$ на сумму двух интегралов на интервалах $\lambda \in (0; A)$ и $\lambda \in (A; +\infty)$. Причем в последнем интеграле заменим значение подынтегральной функции ее асимптотическим представлением:

$$\begin{aligned} \sigma_\xi = & \theta_1(\rho, \xi) \int_A^\infty \frac{e^{-\lambda(1-\xi)}}{\lambda} \left[\frac{-\cos \lambda(1-\rho)}{\sin \lambda(1-\rho)} \right] d\lambda + (\theta_2(\rho, \xi) + \theta_3(\rho, \xi)) \int_A^\infty \frac{e^{-\lambda(1-\xi)}}{\lambda^2} \times \\ & \times \left[\frac{-\cos \lambda(1-\rho)}{\sin \lambda(1-\rho)} \right] d\lambda + \\ & + (\theta_4(\rho, \xi) + \theta_5(\rho, \xi)) \int_A^\infty \frac{e^{-\lambda(1-\xi)}}{\lambda^3} \left[\frac{-\cos \lambda(1-\rho)}{\sin \lambda(1-\rho)} \right] d\lambda + (\theta_6(\rho, \xi) + \theta_7(\rho, \xi)) \times \\ & \times \int_A^\infty \frac{e^{-\lambda(1-\xi)}}{\lambda^2} \cos \lambda \rho \cos \lambda d\lambda + \\ & + 2Q\mu_0 \left\{ \int_0^A \frac{C_1^+(\lambda)}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)} [\psi_1(\rho, \lambda) q_1(\lambda, \xi) - \psi_0(\rho, \lambda) q_2(\lambda, \xi)] d\lambda \right\} + \\ & + \left\{ \int_0^A \frac{C_2^+(\lambda)}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)} [\psi_1(\rho, \lambda) q_3(\lambda, \xi) + \psi_0(\rho, \lambda) q_4(\lambda, \xi)] d\lambda \right\}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Функции $\theta_i(\rho, \xi) (i = 1, 7)$ приведены в *Приложении 4*.

Интегралы в формуле (4.15) содержат осциллирующие функции, потому для их подсчета использован метод Файлона [10] (точность вычислений выбрана равной 10^{-5}). Подробно схема применения метода Файлона описана для интегралов с тригонометрическими функциями в [7].

Здесь использованы квадратурные формулы аналогичной вычислительной процедуры для интегралов, содержащих функции Бесселя, предложенные в [15]. Выбор величины A (предела интегрирования) происходил путем выполнения такой процедуры: фиксировалось некоторое A и подсчитывался интеграл $I_A = \int_A^\infty f(\lambda) d\lambda$, после чего значение A увеличивалось вдвое и снова подсчитывался этот интеграл – I_{2A} . Условием окончания процедуры было требование, чтобы относительная погрешность не превышала величины, равной 10^{-5} .

§5. Числовые результаты.

Расчеты проведены для стальной плиты, радиус которой равен половине толщины ($a = h/2, \alpha = 1/2$, коэффициент Пуассона – 0,3, удельный вес – 7,9 г/см³). Учет собственного веса проведен путем добавления элементарного решения (2.6) к получен-

ным напряжениям (4.15). Напряжения с учетом удельного веса плиты и без его учета рассчитаны для случая единичной нагрузки p (если нагрузка является неединичной, то следует значения напряжений, полученные без учета удельного веса увеличить в p раз).

Напряжения вычислены как на границах $z = h, z = 0$, так и на цилиндрической поверхности. Погрешность отклонения вычисленных значений $\sigma_z(r, z)$ от заданных на грани $z = h$ не превышала порядка 10^{-3} .

Интерес представляют значения напряжения $\sigma_z(r, z)$, рассчитанные по формуле (4.15), где предварительно осуществлен возврат к исходным переменным $r = a\rho$, $z = h\xi$, $\lambda = \alpha\lambda_*$.

При этом были рассчитаны значения напряжений $\sigma_r(r, z)$ в плоскости $r = a$, $0 < z < h$, и напряжения $\sigma_z(r, z)$ на грани $z = 0$, $a < \rho < \infty$. Эти напряжения определены как без учета, так и с учетом удельного веса плиты.

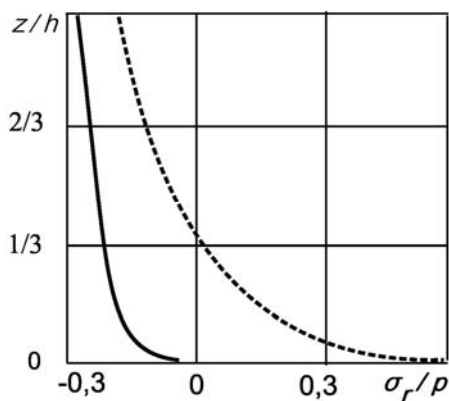


Рис. 1

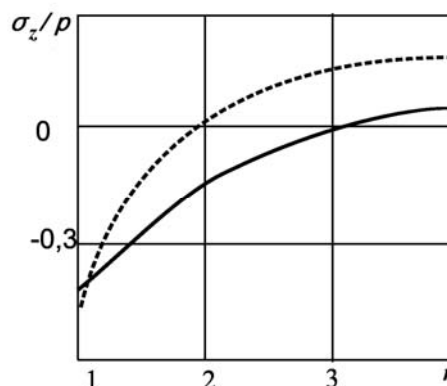


Рис. 2

На рис. 1 показано изменение величины $\sigma_r(r, z)/p$ на протяжении всей высоты цилиндрической полости $r = a$, $0 < z < h$. Здесь и далее сплошной кривой 1 показаны напряжения, рассчитанные с учетом удельного веса, а пунктирной кривой 2 – без учета удельного веса.)

Как видно, в первом случае значения напряжений отрицательны на протяжении всей поверхности полости, т. е. отрыв не наблюдается, а напряжения, рассчитанные без учета удельного веса, в нижней части цилиндрической поверхности (примерно на расстоянии $1/3$ высоты от нижней границы плиты) становятся положительными, т. е. наблюдается отрыв.

На рис. 2 продемонстрирован характер поведения напряжений $\sigma_z(r, z)/p$ на нижней грани $z = 0$ для различных значений радиуса r (эти значения отложены по оси абсцисс). На графике видно, что учет удельного веса приводит к тому, что явления отслоения нижней грани наступают на более далеких расстояниях от цилиндрического отверстия.

Приложение 1. Коэффициенты C_i^\pm ($i=1,2$):

$$C_1^+ = 4aq_\lambda(ch\lambda 4(2\mu^3 - 5\mu^2 + 4\mu - 1) + sh\lambda 2\lambda(4\mu^4 - 8\mu^3 + 6\mu^2 - 6\mu + 1)) / \Delta(\lambda) +$$

$$+ 4ap_\lambda(ch\lambda 2\lambda(-4\mu^4 + 10\mu^3 - 10\mu^2 + 5\mu - 1) + sh\lambda 2(-4\mu^4 + 6\mu^3 - 3\mu + 1)) / \Delta(\lambda);$$

$$C_2^+ = 2aq_\lambda(2ch\lambda(8\mu^3 - 12\mu^2 + 6\mu - 1) - 2\lambda sh\lambda(2\mu - 1)^2) / \Delta(\lambda) +$$

$$+ 2ap_\lambda(2\lambda ch\lambda(2\mu - 1)^2 - 4sh\lambda(1 + 8\mu^2 - 5\mu - 4\mu^3)) / \Delta(\lambda);$$

$$\Delta(\lambda) = G\alpha(ch(2\lambda)8\mu + (\lambda(\mu^2 + 1) - 2\mu(\mu^2 + \lambda)) + sh(2\lambda)(24\mu + 32\mu^3 - 36\mu^2 - 6)).$$

Приложение 2. Интегралы, входящие в решение (4.10):

$$I_1(\rho, \xi) = \frac{1}{4\mu_*^2} \int_0^\infty \frac{\lambda e^{\lambda_* \xi} \alpha(\xi, \lambda_*)}{(J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda))} C_1^+ \chi_1(\rho, \lambda) d\lambda,$$

$$I_2(\rho, \xi) = \frac{z}{4\mu_0} \int_0^\infty \frac{\lambda e^{\lambda_* \xi} C_2^+ \chi_1(\rho, \lambda)}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)} d\lambda,$$

$$I_3(\rho, \xi) = -\frac{1}{4\mu_*} \int_0^\infty \frac{\lambda e^{-\lambda_* \xi} \beta(z, \lambda_*) C_1^- \chi_1(\rho, \lambda)}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)} d\lambda;$$

$$I_4(\rho, \xi) = -\frac{\xi}{4\mu_0} \int_0^\infty \frac{\lambda e^{-\lambda_* \xi} C_2^- \chi_1(\rho, \lambda)}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)} d\lambda;$$

$$J_1(\rho, \xi) = -\frac{z}{8(1-\mu)} \int_0^\infty \frac{\lambda e^{\lambda_* \xi} C_1^+ \chi_0(\rho, \lambda)}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)} d\lambda;$$

$$J_2(\rho, \xi) = \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{\lambda e^{\lambda_* \xi} \beta(\xi, \lambda_*) C_2^+ \chi_0(\rho, \lambda)}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)} d\lambda;$$

$$J_3(\rho, \xi) = \frac{z}{8(1-\mu)} \int_0^\infty \frac{\lambda e^{-\lambda_* \xi} C_1^- \chi_0(\rho, \lambda)}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)} d\lambda;$$

$$J_4(\rho, \xi) = -\frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{\lambda e^{-\lambda_* \xi} \alpha(\xi, \lambda_*) C_2^- \chi_0(\rho, \lambda)}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)} d\lambda.$$

Приложение 3. Коэффициенты в формуле для напряжений $\sigma_\xi(\rho, \xi)$:

$$q_1(\lambda, \xi) = \alpha\mu ch\lambda_* \xi + \frac{\alpha\mu}{2} \lambda_* \xi (1 - \mu_*^{-1}) sh\lambda_* \xi; \quad q_2(\lambda, \xi) = \frac{\lambda}{4} ch\lambda_* \xi + \frac{\lambda_* \xi}{4} sh\lambda_* \xi;$$

$$q_3(\lambda, \xi) = \frac{\xi\mu}{2\mu_0} sh\lambda_*\xi, \quad q_4(\lambda, \xi) = \frac{1-\mu}{2}(2ch\lambda_*\xi + \lambda_*\xi(1-\mu_*)sh\lambda_*\xi), \quad \lambda_* = \lambda/\alpha.$$

Приложение 4. Коэффициенты в формуле:

$$\theta_1 = \frac{2\mu_0\mu a}{A+D_2} \frac{\xi(1-\mu_*)A_1}{\rho^{3/2}}, \quad \theta_2 = \frac{2\mu_0\mu a}{D_1+D_2} \rho^{3/2} (2A_1 + \xi\alpha(1-\mu_*)A_2),$$

$$\theta_3 = \frac{4a\xi\mu B_1}{(D_1+D_2)\alpha\rho^{3/2}}, \quad \theta_4 = \frac{2\mu_0 a A_2}{\rho^{3/2} D_1 + D_2},$$

$$\theta_5 = \frac{4a\xi\mu B_2}{(D_1+D_2)\alpha\rho^{3/2}}, \quad \theta_6 = \frac{\mu_0 a (\alpha\xi + 1)}{2\sqrt{\rho}(D_1+D_2)}, \quad \theta_7 = \frac{2\mu_0(\mu-1)\xi^2 a}{\alpha\sqrt{\rho}(D_1+D_2)};$$

$$A_1 = -4\mu^4 + 10\mu^3 - 10\mu^2 + 5\mu - 1, \quad A_2 = -4\mu^4 + 6\mu^3 - 3\mu + 1;$$

$$B_1 = (2\mu - 1)^2, \quad B_2 = 2(1 + 8\mu^2 - 5\mu - 4\mu^3),$$

$$D_1 = 8\mu(-2\mu^3 + (\mu - 1)^2), \quad D_2 = 24\mu + 32\mu^3 - 36\mu^2 - 6.$$

РЕЗЮМЕ. Побудовано точний розв'язок задачі теорії пружності для плити з циліндричним включенням при врахуванні її питомої ваги. Запропоновано метод, що базується на інтегральному перетворенні типу Вебера без використання представлення Папковича – Нейбера, що суттєво спростило розв'язок і дозволило його числену реалізацію з використанням останніх досягнень в обчисленні інтегралів, що містять сильно осцилюючі функції.

1. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Некоторые осесимметричные задачи для полупространства и упругого слоя с вертикальным цилиндрическим вырезом // Изв.АН Арм.ССР. Механика. – 1969. – 22, № 2. – С.3 – 13.
2. Васильев В.З. Первая основная задача для слоя с круговым отверстием // Наука и техника транспорта. – 1980. – № 4. – С.68 – 77.
3. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Точное решение задачи о распределении напряжений около кругового отверстия в упругом слое // Прикл. механика. – 1968. – 4, № 10. – С. 38 – 45.
4. Коялович Б. М. Исследование о бесконечных системах линейных алгебраических уравнений // Изв. физ.-мат. ин-та им. И. А. Стеклова. – 1930. – 3. – С. 41 – 167.
5. Малиц П.Я., Приварников А.К. Применение преобразований типа Вебера к решению задач теории упругости для слоистых сред с цилиндрическим отверстием // Вопросы прочности и пластичности. Днепропетровск: Бюллетень изобретений, 1971. – С. 15 – 18.
6. Малиц П.Я. Об одном разложении произвольной функции в интеграл по цилиндрическим функциям и его применение в теории упругости // Устойчивость и прочность конструкций. – Днепропетровск: Изд-во Днепропетр. ун-та, 1978. – С.93 – 99.
7. Трантер К.Дж. Интегральные преобразования в математической физике. – М.: ГТТИ, 1956. – 204 с.
8. Blenkam K.A., Wihhoite I.C. Stresses due to a band of normal stress of the entrance of a circular hole // Trans. ASME. J. Appl. Mech. Ser. E. – 1966. – 33. – P.855 – 865.
9. Dhaliwal R.S., Singh R.M. Axisymmetric contact problem for an elastic layer on a rigid foundation with a cylindrical hole // Int. J. Eng. Sci. – 1977. – 15. – P. 421 – 428.
10. Filon L. N. G. On a quadrature formula for trigonometric integrals // Proc. Roy. Soc. Edin. – 1928 – 1929. – XLIX. – P. 38 – 47.
11. Grisson D.S., Michalopoulos C.D. The elastic layer with a cylindrical hole subjected to a nonuniform axisymmetric radial displacements // Acta Mech. – 1973. – 17, N1. – P. 97 – 107.

12. Maksimyyuk V. A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Nonlinear Deformation of Thin Isotropic and Orthotropic Shells of Revolution with Reinforced Holes with Rigid Inclusions // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N6. – P. 685 – 692.
13. Paras S.C., Michalopoulos C.D. Axisymmetric contact problem for an elastic half-space with a cylindrical hole // Int. J. Eng. Sci. – 1972. – **19**. – P. 699 – 707.
14. Popov G. Ya. New Transforms for the Resolving Equations in Elastic Theory and New Integral Transforms, with Applications to Boundary-Value Problem of Mechanics // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, N12. – P. 1400 – 1424.
15. Shuhuang Xiang. Numerical Quadrature for Bessel Transformations with High Oscillations // Numerical Analysis and its Application. Lecture Notes in Computer Science. – 2009. – **5435**. – P. 588 – 595.
16. Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S., Rudenko I.B. Elastoplastic State of Spherical Shells with Cyclically Symmetric Circular Holes // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N5. — P. 573 – 582.
17. Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S., Kharenko S.B. Elastoplastic Deformation of Conical Shells with Two Circular Holes // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N3. – P. 343 – 348.
18. Yang Q., Gao C. F., Chen W. Stress analysis of a functionally graded material plate with a cylindrical hole // Arch. Appl. Mech. – 2010. – **80**. – P. 895 – 907.
19. Youngdahl C.K., Sternberg E. Three-dimensional stress concentration around a cylindrical hole in a semi-infinite elastic body // Trans. ASME . J. Appl. Mech. Ser. E. – 1966. – **33**, N 4. – P. 855 – 865.

Поступила 14.02.2012

Утверждена к печати 29.05.2014
