

УДК 532.8

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ В МИКРОКАНАЛАХ СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИИ ПРИ ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

А. А. ГУРЖИЙ, А. В. ШАЛДЕНКО

Национальный технический университет Украины "КПИ", Киев,
03056, г. Киев, просп. Победы, 37
E-mail: a.gurjii@gmail.com

Получено 10.04.2016

Рассмотрена задача теплопередачи из внешнего нагретого тела в однородный, вязкий, жидкий теплоноситель, движущийся внутри прямолинейного и зигзагообразного микроканалов в приближении малых чисел Рейнольдса Re . Задача решена численно в терминах "функция тока–завихренность" с использованием простого явного метода для решения уравнения переноса завихренности и уравнения теплопередачи с разностями против потока и уравнения Пуассона для функции тока с использованием метода последовательной верхней релаксации. Численное моделирование показало, что зигзагообразный микроканал при стационарном режиме в области значений чисел Рейнольдса $Re > 30...40$ имеет большие усредненные уровни тепловых потоков за счет образования циркуляционных зон в угловых областях течения, образования локализованных вихревых структур и смещения потока при изменении направления течения. Показано, что для всего диапазона значений осевых скоростей теплоносителя разность давлений, которую необходимо прикладывать к зигзагообразному микроканалу, больше по сравнению с соответствующими значениями для прямолинейного микроканала. Установлено, что в области значений чисел Рейнольдса $Re < 30...40$ изменение геометрии микроканала не приводит к увеличению усредненных уровней тепловых потоков из внешней среды в жидкий теплоноситель.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: теплопередача, усредненный уровень тепловых потоков, вязкая жидкость, численное решение, микроканал

Розглянуто задачу теплопередачі з зовнішнього нагрітого тіла в однорідний, в'язкий рідкий теплоносій, що рухається всередині прямолінійного і зигзагоподібного мікроканалів у наближенні малих чисел Рейнольдса Re . Задача розв'язана чисельно в термінах "функція току–завихореність" з використанням простого явного методу для розв'язку рівняння переносу завихореності і рівняння теплопередачі з різницями проти потоку і рівняння Пуассона для функції току з використанням методу послідовної верхньої релаксації. Чисельне моделювання показало, що зигзагоподібний мікроканал при стаціонарному режимі в області значень чисел Рейнольдса $Re > 30...40$ має збільшені усереднені рівні теплових потоків за рахунок утворення циркуляційних зон в куткових областях течії, утворення локалізованих вихрових структур і зміщення потоку при зміні напрямку течії. Показано, що для всього діапазону значень осевих швидкостей теплоносія різниця тисків, яку необхідно прикладати до зигзагоподібного мікроканалу, більше в порівнянні з відповідними значеннями для прямолінійного мікроканалу. Встановлено, що в області значень чисел Рейнольдса $Re < 30...40$ зміна геометрії мікроканалу не призводить до збільшення усереднених рівнів теплових потоків з зовнішнього середовища в рідкий теплоносій.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: теплопередача, усереднений рівень теплових потоків, в'язка рідина, чисельний розв'язок, мікроканал

The heat transfer problem from the outside heated body into a uniform, viscous heat-transfer agent moved inside the straight and zigzag microchannel in an approximation of small Reynolds numbers Re is considered. The problem is solved numerically in "stream function–vorticity" terms using a simple explicit method for solving the vorticity transport equation and the heat equation with upwind direction and Poisson equation for the stream function using the method of successive over-relaxation. Numerical simulations show that zigzag microchannel with steady regime at Reynolds numbers $Re > 30...40$ has an increased levels of heat flows due to the formation of the circulation zones in the corner areas of the flow, the formation of localized vortex structures and the displacement of the flow at the changing of the flow direction. It is shown that the fluid pressure difference, which should be applied to the zigzag microchannel, for all values of axial velocities is more than the corresponding values for the straight microchannel. It is found that microchannel geometry changes for Reynolds numbers $Re < 30...40$ does not increase the level of average rate of heat flows from the environment into the heat-transfer agent.

KEY WORDS: heat transfer, average rate of heat flow, viscous flow, numerical solution, microchannel

ВВЕДЕНИЕ

Быстрое развитие электроники за последние десятилетия всегда сопровождала проблема надежного отвода тепла от элементов радиоэлектронной аппаратуры. Рост количества электронных элементов в различных устройствах за последние годы приводит к возрастанию удельной электри-

ческой мощности, которую необходимо отводить с поверхности электронных устройств для обеспечения их надежной работы. Особенно отчетливо эта тенденция проявляется в компьютерной технике. Постоянное усложнение микропроцессоров сопровождается чрезвычайно быстрым увеличением количества элементов в них. Эта особенность позво-

лила Г. Муру [1] в середине 60-х годов прошлого столетия сформулировать эмпирический закон, согласно которому количество элементов в компьютерных микропроцессорах в среднем увеличивается в два раза каждые два года.

В перспективе, в ближайшее десятилетие появятся мощные процессоры, которые будут содержать до $\approx 10^{10} \dots 10^{11}$ элементов. Одновременная тенденция к миниатюризации процессоров приводит к существенному повышению уровней удельной электрической мощности, выделяемой с единицы площади в электронных устройствах. Перспективные оценки [2] показывают, что воздушный принудительный теплоотвод с поверхности современных процессоров фактически выходит на сегодняшний день на свои предельные возможности. Поэтому для организации надежного и контролируемого отвода тепла с поверхности процессоров необходимо разрабатывать новые конструкции теплоотводов.

Одним из возможных технических решений проблемы надежного отвода выделяемой процессорами электрической теплоты является создание в подложке кристалла системы микроканалов, заполненных жидким теплоносителем [2, 3]. Нагретый в кристалле теплоноситель по трубкам поступает в отдельно вынесенный теплоотвод, который позволяет полученную теплоту передать во внешнюю среду. Для формирования непрерывного движения в такой системе необходимо поддерживать в жидкости разность давлений, затрачивая часть электрической мощности компьютера. При этом возникает новая проблема: необходимо создать такие конструкции теплоприемников с жидким теплоносителем, которые, с одной стороны, затрачивают минимум электрической энергии и, с другой стороны, обеспечивают надежный отвод выделяемой процессором теплоты с фиксированной площади электронного устройства.

Увеличение скорости жидкости в микроканалах приводит к увеличению уровней тепловой энергии, выносимой теплоносителем [4]. Однако формирование скоростных режимов требует больших затрат энергии на поддержание разности давлений на их входе и выходе. Отличительной особенностью течений в микроканалах, которые применяются в радиоэлектронной промышленности, являются малые размеры поперечного сечения и малые скорости течения жидкости [5, 6]. Другими словами, в микроканалах формируются, как правило, ламинарные течения, которые характеризуются малыми числами Рейнольдса Re .

Анализ физических процессов в микроканалах показывает [7, 8], что в рассматриваемой систе-

ме имеют место два наиболее важных механизма теплопередачи: молекулярная диффузия, вызванная передачей тепла за счет молекулярного движения, и конвективный перенос, вызванный передачей тепла за счет движения теплоносителя в канале. Если первый механизм, в основном, определяется тепловыми свойствами материала подложки, теплоносителя и поверхностью контакта [9], то второй – управляется структурой течения в микроканале. Формирование поперечного потока в микроканале позволяет выравнивать профиль поля температур в теплоносителе и, как следствие, повышать значения градиента температур в областях, прилегающих к границам канала.

Открытие Х. Арефом [10] явления хаотической адвекции позволило взглянуть на проблему интенсивного переноса поля температур гидродинамическими течениями с новых концептуальных позиций. Главным достижением исследований конца прошлого столетия в этом научном направлении явилось открытие динамической неустойчивости в ламинарных течениях. Такие режимы в течениях однородной жидкости образуются при возникновении хаотического режима движения отдельных жидких частиц в рассматриваемом течении. В этом случае в жидкости возникают интенсивные процессы переноса массы [11, 12] и энергии [13]. Однако не все ламинарные потоки обладают таким свойством, и не во всей области течения хаотическая адвекция имеет место. Поиск течений и условий, при которых возникают режимы хаотической адвекции в жидкостях, представляет сегодня одну из важных и сложных задач гидромеханики.

С технологической точки зрения генерирование поперечной составляющей в микроканалах достигается за счет формирования на одной (или нескольких) поверхностях канала системы упорядоченных канавок, направленных под углом к оси микроканала [14], введения в микроканал системы препятствий различной геометрии [15], изготовления криволинейных (зигзагообразных) профилей микроканалов [16] и некоторые другие решения. В настоящее время известно несколько технологий изготовления системы микроканалов в кристаллах процессоров и других устройствах радиоэлектронной аппаратуры. Наиболее простой является технология склеивания [17] слоев подложки, которые содержат систему каналов различной геометрии. Часто применяется технология травления и наращивания подложки [18], которая позволяет формировать не только микроканалы различной геометрии [16], но и систему различных вставок внутри микроканалов [15], упорядоченную шеро-

ховатость на отдельных поверхностях микроканалов [19] и др.

Цель данной работы – установление количественной зависимости уровней тепловых потоков через ограничивающие поверхности прямолинейного и зигзагообразного микроканалов, заполненных однородной вязкой несжимаемой жидкостью при ламинарном течении внутри микроканала. Необходимо выяснить влияние геометрии микроканала на значения разности давлений, которые прикладываются к входу и выходу микроканала для формирования заданной скорости теплоносителя и уровни усредненных тепловых потоков через ограничивающие поверхности микроканала при достижении стационарных тепловых режимов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим процессы теплопередачи внутри двумерного криволинейного микроканала (рис. 1) неизменной ширины D , заполненного однородной вязкой несжимаемой жидкостью с плотностью ρ , коэффициентом температуропроводности α_F , коэффициентом теплопроводности γ_F и коэффициентом кинематической вязкости ν . Пусть стенки микроканала выполнены из твердого материала с коэффициентом температуропроводности α_S и коэффициентом теплопроводности γ_S . Далее индексы “S” и “F” будут относиться к твердой и жидкой средам соответственно. Пусть на внешних поверхностях (S_9 и S_{10}) поддерживается постоянная температура T_1 , а на входе микроканала (S_1) поступает жидкость с температурой T_0 , $T_1 > T_0$, L – общая длина микроканала вдоль его криволинейной оси. Необходимо определить уровень тепловых потоков W из внешней среды в жидкий теплоноситель для течения, которое развивается в микроканале в направлении стрелок.

Основными уравнениями, описывающими гидродинамические процессы внутри микроканала (область Ω_1) и процессы теплопередачи (области Ω_1 , Ω_2 и Ω_3), являются уравнения Навье-Стокса, уравнение неразрывности и уравнение переноса тепла, которые в декартовой системе координат могут быть записаны в следующей консервативной форме [4, 20]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right\}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial UV}{\partial x} + \frac{\partial V^2}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right\}, \quad (2)$$

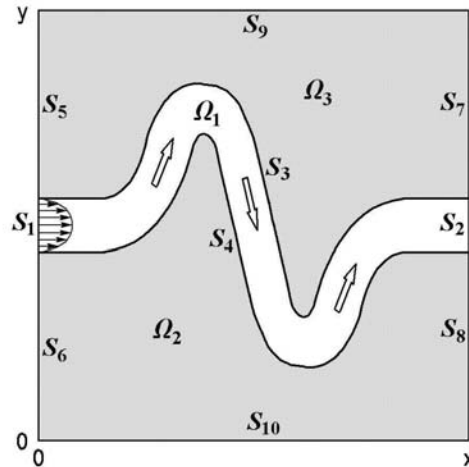


Рис. 1. Геометрия микроканала с обозначением границ и областей

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial UT}{\partial x} + \frac{\partial VT}{\partial y} = \alpha \left\{ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right\}, \quad (4)$$

где $U(x, y, t)$, $V(x, y, t)$ – проекции поля скорости, [м/с]; $p(x, y, t)$ – поле давления, [Па]; $T(x, y, t)$ – поле температур, [K]; ρ – плотность жидкости, [кг/м³]; ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости, [м²/с]; $\alpha = \chi / (\rho c_p)$ – коэффициент температуропроводности среды, [м²/с]; χ – коэффициент теплопроводности, [Вт/(м·K)]; c_p – удельная теплоемкость среды при постоянном давлении, [Дж/(кг·K)]. Распространение тепла в твердой среде (области Ω_2 и Ω_3) описывается уравнением (4) при условии $U = 0$, $V = 0$. В этом уравнении α – коэффициент температуропроводности внешней среды, [м²/с].

При построении решений и проведении анализа двумерных течений удобно пользоваться функцией тока $\Psi(x, y, t)$, которая связана с проекциями поля скорости выражениями [21]:

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (5)$$

Линия $\Psi = \text{const}$ (линия тока) представляет собой плоскую кривую, в каждой точке которой касательная и вектор скорости поля течения совпадают. При стационарном течении линии тока и траектории жидких частиц в рассматриваемом течении совпадают [20].

В двумерных течениях поле завихренности $\omega(x, y, t)$ имеет только одну составляющую, ко-

торая направлена перпендикулярно к плоскости течения [22]. В этом случае поле завихренности связано с проекциями поля скорости следующим уравнением:

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (6)$$

Подстановка выражений (5) в уравнение (6) дает уравнение Пуассона для функции тока:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\omega, \quad (7)$$

которое часто используется при численном решении задач гидромеханики в терминах “функция тока–завихренность” [23].

Для получения уравнения переноса завихренности необходимо уравнение (2) продифференцировать по координате x , а уравнение (1) – по координате y . Разность этих выражений с учетом уравнения неразрывности (3) и уравнения (6) позволяет определить уравнение

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial U \omega}{\partial x} + \frac{\partial V \omega}{\partial y} = \nu \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right\}, \quad (8)$$

которое описывает развитие во времени поля завихренности. Интересно отметить, что в это уравнение явно не входит поле давления. Эта особенность часто является определяющей при численном решении различных двумерных задач в гидромеханике [20, 21, 23].

Для текущего момента времени можно определить поле давления по заданному распределению поля скорости, $U(x, y, t)$ и $V(x, y, t)$. Если уравнение (1) продифференцировать по координате x , а уравнение (2) – по координате y и определить в дальнейшем сумму полученных выражений, то получим уравнение Пуассона для давления:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 2\rho \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x} \right\}. \quad (9)$$

Далее удобно пронормировать физические величины в задаче на ширину микроканала D , максимальную скорость течения в средней части на входе микроканала U_0 , плотность жидкости ρ и на разницу температур $\Delta T = T_1 - T_0$. В результате получаем следующую систему безразмерных величин:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{D}, & y^* &= \frac{y}{D}, & t^* &= \frac{t U_0}{D}, \\ U^* &= \frac{U}{U_0}, & V^* &= \frac{V}{U_0}, & \Psi^* &= \frac{\Psi}{D U_0}, \\ \omega^* &= \frac{\omega D}{U_0}, & q^* &= \frac{T - T_0}{\Delta T}, & W^* &= \frac{W D}{\gamma_F \Delta T}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь W^* – нормированный тепловой поток через ограничивающие поверхности.

В этом случае нормированные уравнения переноса завихренности (8) и уравнение переноса тепла (4) принимают вид (здесь и далее звездочки у безразмерных величин опущены):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial U \omega}{\partial x} + \frac{\partial V \omega}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right\}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial U Q}{\partial x} + \frac{\partial V Q}{\partial y} = \frac{1}{\text{Pe}} \left\{ \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \right\}, \quad (12)$$

где $\text{Re} = U_0 \cdot D / \nu$ – число Рейнольдса, а $\text{Pe} = U_0 \cdot D / \alpha$ – число Пекле. Отметим, что $\text{Pe} = \text{Pr} \cdot \text{Re}$, где $\text{Pr} = \nu / \alpha$ – число Прандтля для заданной среды. Форма записи уравнения Пуассона для функции тока (7) в данном случае не изменилась.

Корректная математическая постановка задачи должна быть дополнена начальными и граничными условиями (рис. 1):

$$\begin{aligned} U|_{S1,S2} &= \frac{4yU_0}{D} \left(1 - \frac{y}{D}\right), & U|_{S3,S4} &= 0, \\ V|_{S1,S2,S3,S4} &= 0, & \Psi|_{S1,S2} &= \frac{4y^2 U_0}{D} \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{3D}\right), \\ \Psi|_{S3} &= 0, & \Psi|_{S4} &= \frac{2DU_0}{3}, & \omega|_{S1,S2} &= \frac{4U_0}{D} \left(1 - \frac{2y}{D}\right), \\ p|_{S1} &= p_1, & p|_{S2} &= p_0, & \left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{S3,S4} &= 0, \\ Q_F|_{S3,S4} &= Q_S|_{S3,S4}, & \left. \frac{\partial Q_F}{\partial n} \right|_{S3,S4} &= \gamma \left. \frac{\partial Q_S}{\partial n} \right|_{S3,S4}, \\ \left. \frac{\partial Q_S}{\partial x} \right|_{S5,S6,S7,S8} &= 0, & Q_S|_{S9,S10} &= 1. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $\gamma = \gamma_S / \gamma_F$ – относительная теплопроводность сред. Выражения для поверхностей S_1 и S_2 записаны в локальной системе координат, связанной с нижней поверхностью микроканала. Граничные условия для поля завихренности на твердых поверхностях микроканала определяются в процессе вычислений [23].

В дальнейшем целесообразно присвоить U_0 значение, соответствующее скорости течения, например, при $\text{Re} = 100$. В этом случае будет удобно проводить сравнительный анализ тепловых потоков через ограничивающие поверхности, поскольку масштаб времени (10) для различных режимов скорости течения и различных геометрий микроканала будет одинаковым.

В качестве начальных условий для поля скорости $U(x, y, 0)$, $V(x, y, 0)$, функции тока $\Psi(x, y, 0)$ и завихренности $\omega(x, y, 0)$ выбираются распределения полей, полученные в результате решения соответствующей стационарной задачи (7), (11), (12) с

граничными условиями (13). Некоторые подробности постановки задачи и последовательности проведения вычислений можно найти в [23, 24].

2. ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ

Задача о переносе тепла в двухмерном криволинейном микроканале, заполненном однородной вязкой несжимаемой жидкостью, решалась численно на равномерной сетке с шагом пространственной дискретизации $\delta_x = \delta_y = \delta$ по обеим координатам и с шагом Δ по временной координате. Введем обозначение индексов узлов вычислительной сетки:

$$\begin{aligned} \omega(x, y, t) &= \omega(i\delta, j\delta, n\Delta) \equiv \omega_{i,j}^n, \\ \Psi(x, y, t) &= \Psi(i\delta, j\delta, n\Delta) \equiv \Psi_{i,j}^n, \\ U(x, y, t) &= U(i\delta, j\delta, n\Delta) \equiv U_{i,j}^n, \\ V(x, y, t) &= V(i\delta, j\delta, n\Delta) \equiv V_{i,j}^n, \\ p(x, y, t) &= p(i\delta, j\delta, n\Delta) \equiv p_{i,j}^n. \end{aligned} \quad (14)$$

Дифференциальные уравнения (7) и (9) представляют собой уравнения эллиптического типа (уравнение Пуассона), общий вид которых можно записать в форме

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} = G, \quad (15)$$

где $R(x, y, t) = \{\Psi(x, y, t), p(x, y, t)\},$

$$G = \left\{ -\omega, 2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right\}.$$

Для решения дифференциальных уравнений эллиптического типа в работе применялся метод последовательной верхней релаксации, который основан на проведении итерационных вычислений в соответствии с выражением ([23, 25])

$$\begin{aligned} R_{i,j}^{(k+1)} &= R_{i,j}^{(k)}(1 - \lambda) + \frac{\lambda}{4} \left[R_{i+1,j}^{(k)} + R_{i-1,j}^{(k)} + \right. \\ &\quad \left. + R_{i,j+1}^{(k)} + R_{i,j-1}^{(k)} - G_{i,j}\delta^2 \right], \end{aligned} \quad (16)$$

где λ – параметр релаксации, который принимает значения в диапазоне $1.0 < \lambda < 2.0$. Верхний индекс (k) в приведенном выражении означает номер итерации. Некоторые рекомендации по выбору значения параметра λ в методе последовательной верхней релаксации можно найти в [23].

Уравнение переноса завихренности (11) и уравнение переноса тепла (12) представляют собой дифференциальные уравнения параболического

типа. Эти уравнения можно записать в общем виде:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial UF}{\partial x} + \frac{\partial VF}{\partial y} = \frac{1}{Ze} \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right\}, \quad (17)$$

где $F(x, y, t) = \omega(x, y, t), Q(x, y, t), Ze = Re, Pe.$

Для решения этого уравнения использовалась простая явная схема второго порядка точности по пространственным координатам и первого порядка точности по времени с разностями против потока [23, 24]:

$$\begin{aligned} F_{i,j}^{n+1} &= (1 - 4\beta)F_{i,j}^n - \beta^*(A_{i,j}^n + B_{i,j}^n) + \\ &\quad + \beta(F_{i+1,j}^n + F_{i-1,j}^n + F_{i,j+1}^n + F_{i,j-1}^n), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} A_{i,j}^n &= \begin{cases} U_{i,j}^n F_{i,j}^n - U_{i-1,j}^n F_{i-1,j}^n & \text{при } U_{i,j}^n \leq 0, \\ U_{i+1,j}^n F_{i+1,j}^n - U_{i,j}^n F_{i,j}^n & \text{при } U_{i,j}^n > 0, \end{cases} \\ B_{i,j}^n &= \begin{cases} V_{i,j}^n F_{i,j}^n - V_{i,j-1}^n F_{i,j-1}^n & \text{при } V_{i,j}^n \leq 0, \\ V_{i,j+1}^n F_{i,j+1}^n - V_{i,j}^n F_{i,j}^n & \text{при } V_{i,j}^n > 0, \end{cases} \\ \beta &= \frac{\Delta}{\delta^2}, \quad \beta^* = \frac{\Delta}{\delta^2 Ze}. \end{aligned}$$

Численная схема решения задачи была протестирована на стационарной двумерной задаче течения вязкой несжимаемой жидкости внутри прямолинейного микроканала. Аналитическое распределение поля скорости [21, 26] в размерном виде, записанное в системе координат, связанной с нижней поверхностью микроканала, имеет вид:

$$U(x, y, t) = \frac{4yU_0}{D} \left(1 - \frac{y}{D} \right), \quad V(x, y, t) = 0. \quad (19)$$

Этому решению соответствует следующее распределение функции тока:

$$\Psi(x, y, t) = \frac{4y^2U_0}{D} \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{3D} \right), \quad (20)$$

которое удовлетворяет граничным условиям (13).

В прямолинейном канале при стационарном течении устанавливается линейное распределение поля завихренности:

$$\omega(x, y, t) = \frac{4U_0}{D} \left(1 - \frac{2y}{D} \right), \quad (21)$$

и линейное распределение поля давления [26]:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{8\rho\nu U_0}{D^2}. \quad (22)$$

Анализ численных результатов показал, что относительная точность определения поля функции тока при пространственной дискретизации

$\delta = 0.05$ составляет величину $E_\psi \approx 10^{-5}$, а поля скорости – $E_U \approx 10^{-4}$ для течений, соответствующих значениям чисел Рейнольда $Re < 650$. В этом диапазоне скоростей относительная ошибка в определении поля завихренности составила величину $E_\omega \approx 10^{-3}$, а поля давления – $E_p \approx 10^{-4}$.

Тестирование численного решения для нестационарного режима было проведено на одномерной нестационарной задаче теплопередачи в однородной среде от нагретой стенки $y = 0.0$ с температурой $Q_1 = 1.0$ к холодной стенке $y = \pm 12.0$ с температурой $Q_2 = 0.0$. Численный эксперимент проводился для случая $Re = 5.0$ на сетке с шагом $\delta = 0.05$ пространственной дискретизации. Максимальная разность между вычисленными значениями поля температур $Q(y, t)$ и аналитическим решением [27], отнесенная к $\Delta Q = Q_1 - Q_0$, для различных моментов времени не превышает $\approx 0.3 \cdot 10^{-3}$.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим процессы теплопередачи на кремниевой подложке длиной $L = 18.0$ и высотой $W = 25.0$, внутри которой имеется сначала прямолинейный микроканал шириной D , заполненный водой. В этом случае относительная теплопроводность сред принимает значение $\gamma = 23.5$, а числа Прандтля для теплоносителя и внешней среды, отнесенные к вязкости жидкости, будут: $Pr_F = 7.0$, $Pr_S = 0.33$ соответственно.

Процесс теплопередачи начинается с момента времени, при котором внешняя среда и теплоноситель были нагреты до температуры Q_1 . В момент $t = 0.0$ на вход микроканала подается холодная жидкость с температурой Q_0 , где $Q_1 > Q_0$. Проведенная ранее нормировка задачи позволяет, не нарушая общности расчетов и анализа полученных данных, решить обратную задачу, связанную с нагревом внешней среды за счет подачи нагретого теплоносителя. В этом случае в начальный момент времени имеем $Q_1 < Q_0$.

Исследования показали, что начальные нестационарные тепловые процессы внутри прямолинейного микроканала можно условно разделить на несколько этапов.

Первый этап связан с постепенным начальным заполнением холодного теплоносителя полости микроканала с нагретыми ограничивающими поверхностями. Диффузионные тепловые потоки постепенно нагревают часть жидкости, расположенную около стенок микроканала ($\gamma > 0$). На рис. 2,а показано распределение поля темпе-

ратур на входе микроканала в момент времени $t = 2.0$ для случая, при котором внутри микроканала уже сформировалось течение с профилем осевой скорости, соответствующим числу Рейнольдса $Re=150$. На рисунке нанесены линии равного уровня (изотермы) с шагом дискретизации $\Delta Q = 0.05$. При постепенном прогревании в теплоносителе формируется градиент поля температур как в продольном направлении микроканала, так и в поперечном его сечении. Однако жидкость, прилегающая к границам течения, все еще имеет в первом приближении начальную температуру. Продолжительность этого этапа обратно пропорциональна скорости течения теплоносителя и для указанных выше физических параметров сред принимает значения $t_1 < 4.0$ при $Re=150$.

Второй этап сопровождается образованием высокого градиента поля температур в области, прилегающей к границам течения, за счет движения холодного теплоносителя вдоль микроканала. При этом теплоноситель около границ постепенно нагревается, а внешняя среда около микроканала остывает за счет диффузионного теплового потока, направленного в микроканал. Характерное распределение поля температур показано на рис. 2,б для момента времени $t = 5.0$. Исследования показывают, что на втором этапе градиент поля температур в поперечном сечении микроканала достигает максимального значения и, как результат, из внешней среды в теплоноситель формируется максимальный тепловой поток.

С течением времени диффузионный тепловой поток из внешней среды в жидкость постепенно выравнивает поля температур на границе микроканала. Это приводит к уменьшению теплового потока из внешней среды. Исследования показывают, что для медленных течений и длинных микроканалов может возникнуть ситуация, при которой на входе микроканала уже наступил второй этап теплопередачи, а на выходе микроканала еще продолжается первый этап.

Третий этап связан с дальнейшим выравниванием поля температур на границах микроканала и выходом рассматриваемой термодинамической системы на стационарный тепловой режим. Характерное распределение поля температур для этого случая показано на рис. 2,в. На этом этапе может возникнуть нестационарное гидродинамическое течение в микроканале, вызванное формированием нестационарных вихревых структур. При этом может возникнуть соответствующий нестационарный (или квазистационарный) тепловой режим. Исследования показывают, что третий этап наступает при $t_3 \approx 200...300$.

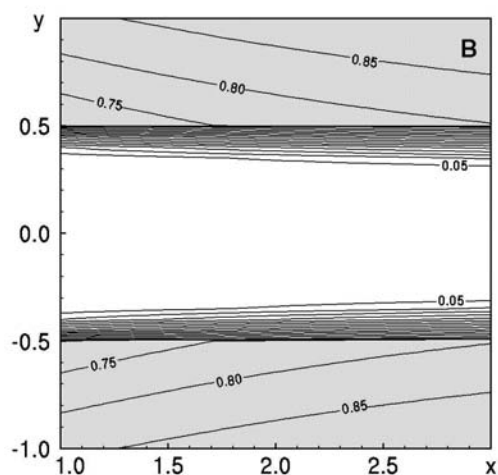
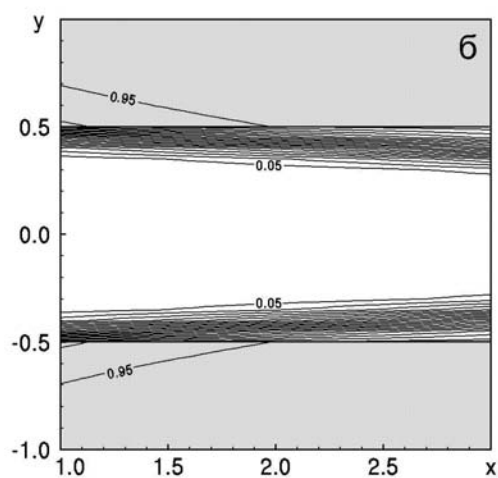
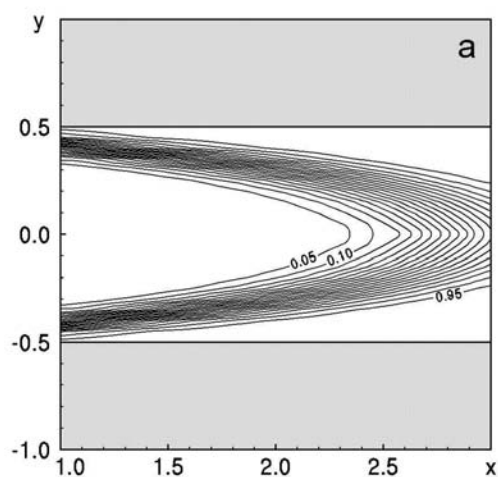


Рис. 2. Распределение поля температур на входе микроканала при $Re = 150$ для моментов времени: а - $t = 2.0$; б - $t = 5.0$; в - $t = 30.0$

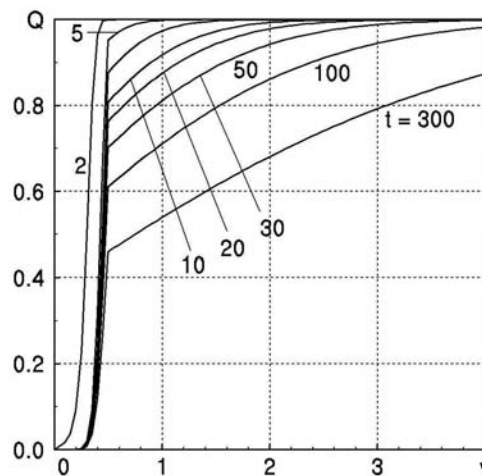


Рис. 3. Динамика изменения поля температур в сечении $x = 2.0$ в прямолинейном микроканале при $Re = 150$

Приведенные выше этапы развития поля температур и тепловых потоков в микроканале можно проследить на рис. 3, где представлена динамика изменения поля температур $Q(y)$ в сечении микроканала $x = 2.0$. На первом этапе происходит заполнение холодным теплоносителем полости микроканала. При этом в области, прилегающей к границе, жидкость остается нагретой. На втором этапе профиль поля температур на ограничивающих поверхностях начинает постепенно выравниваться, формируя максимальный тепловой поток из внешней среды в жидкость. На третьем этапе происходит постепенный выход системы на стационарный тепловой режим.

Значение нормированного теплового потока через верхнюю поверхность микроканала со стороны жидкости определяется выражением [4]:

$$W(x, t) = \left. \frac{\partial Q_F}{\partial y} \right|_{y=D/2} \quad (23)$$

На рис. 4 показаны профили теплового потока $W(x)$ для различных моментов времени вдоль верхней границы микроканала для течения с продольной скоростью, соответствующей числу Рейнольдса $Re=150$. Значения моментов времени показаны на рисунке цифрами. Видно, что наибольший тепловой поток устанавливается на входе микроканала. С течением времени его уровень постепенно уменьшается и выравнивается по длине микроканала. Кривая, соответствующая стационарному тепловому режиму, обозначена на рисунке штриховой линией.

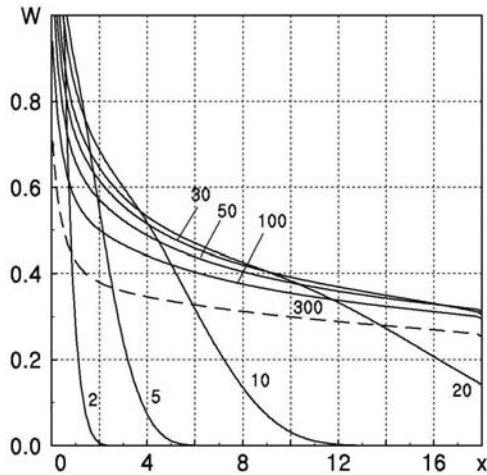


Рис. 4. Изменение распределения теплового потока вдоль микроканала для различных моментов времени при $Re = 150$

Видно, что выравнивание поля температур на границе микроканала приводит с течением времени к постепенному снижению уровня теплового потока через ограничивающие поверхности. Рис. 5 иллюстрирует динамику во времени изменения усредненного по длине уровня теплового потока на верхней границе:

$$\bar{W}(t) = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{\partial Q_F}{\partial y} \Big|_{y=D/2} dx, \quad (24)$$

и средней по сечению температуры теплоносителя на выходе микроканала:

$$Q_{out}(t) = \int_0^L Q_F(L, y, t) \Big|_{y=D/2} dx. \quad (25)$$

Анализ полученных результатов позволяет заключить, что стационарный тепловой режим в микроканале определяется многими параметрами. Момент времени, при котором наступает стационарный тепловой режим (или близкий к нему квазистационарный режим), зависят, в первую очередь, от осевой скорости теплоносителя (числа Рейнольдса Re), отношения значений коэффициентов теплопроводности жидкости и внешней среды (числа Пекле Pe_F и Pe_S), отношения коэффициентов теплопроводности $\gamma = \gamma_S/\gamma_F$ внешней среды и теплоносителя, и длины микроканала L . В дальнейшем будем проводить анализ термодинамических процессов в микроканалах только для стационарных (или квазистационарных) режимов.

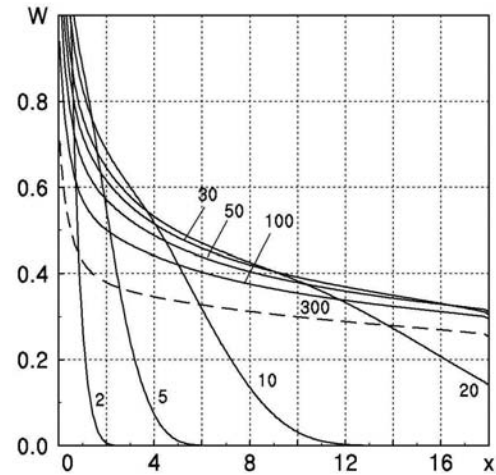


Рис. 5. Изменение усредненного уровня теплового потока через верхнюю поверхность и температуры жидкости на выходе микроканала с течением времени

Наличие только продольной составляющей скорости течения жидкости в диапазоне чисел Рейнольдса $Re < 650$ приводит к тому, что в поперечном сечении микроканала имеет место только диффузионная составляющая теплового потока. По этой причине минимальное значение поля температуры $Q(x, y)$ в теплоносителе устанавливается на оси микроканала. Пример распределения стационарного поля температур на входе микроканала при скорости осевого потока, соответствующего числу Рейнольдса $Re=65$, показан на рис. 6. Видно, что значения $Q(x, y)$ в жидкости постепенно увеличиваются по мере приближения к границам.

Профили поля температур $Q(y)$ в сечении микроканала $x = 2.0$ показаны на рис. 7 для различных значений чисел Рейнольдса Re . При медленном движении теплоносителя (например, при $Re=40$) тепловые потоки успевают сформировать параболический профиль поля температур в сечении микроканала. По мере увеличения продольной скорости течения на оси микроканала остается область течения с температурой, которая соответствует температуре теплоносителя на входе микроканала. Интересно отметить общую тенденцию, связанную с тем, что при увеличении значений числа Рейнольдса градиенты поля температур в области, прилегающей к границе, постепенно увеличиваются за счет диффузионного теплового потока из внешней среды.

Такой неравномерный нагрев теплоносителя приводит к тому, что локальный максимум тепло-

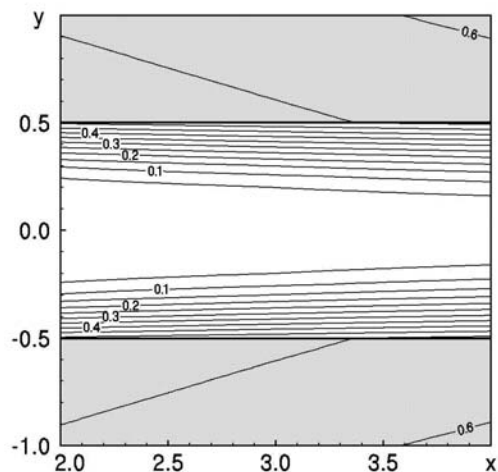


Рис. 6. Распределение поля температур внутри прямолинейного микроканала при $Re = 65$

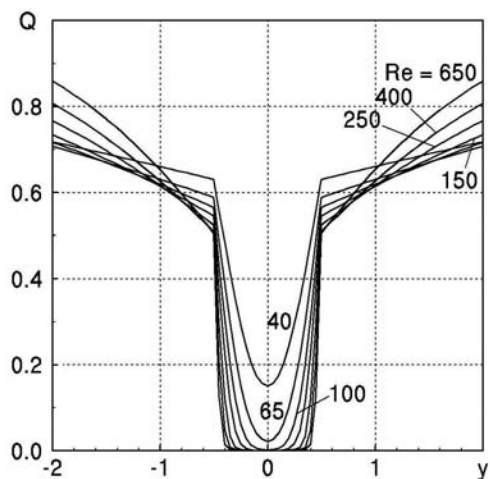


Рис. 7. Профили поля температур в сечении $x = 2.0$ прямолинейного микроканала при разных числах Re

вого потока из внешней среды в теплоноситель через твердые поверхности смещается ко входу микроканала, где контактируют друг с другом холодный теплоноситель и нагретая стенка. Величина теплового потока постепенно уменьшается по мере удаления от входа микроканала и достигает своего минимума на выходе микроканала.

Теперь рассмотрим особенности процессов теплопередачи в криволинейном микроканале (рис. 8) с одинаковыми начальными и граничными условиями. Для проведения сравнительного анализа гидродинамических и термодинамических свойств

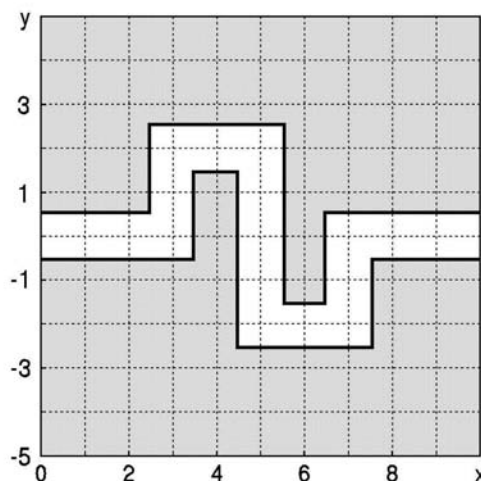


Рис. 8. Геометрия криволинейного микроканала

микроканалов различной геометрии общая длина зигзагообразного микроканала по осевой его линии равна длине прямолинейного микроканала $L = 18D$, рассмотренного ранее.

Распределение функции тока $\Psi(x, y)$ в области, прилегающей к входу микроканала, показано на рис. 9 для течений, соответствующих значениям чисел Рейнольдса $Re = 40$ и $Re = 150$ для момента времени $t = 300$, при котором течение жидкости вышло на стационарный режим. На рисунках нанесено семейство линий тока равного уровня с шагом дискретизации $\Delta\Psi = \Psi_{S2}/20$, где Ψ_{S2} – значение функции тока на верхней границе микроканала. Границы циркуляционных зон течения показаны на рисунках штриховой линией. Замкнутые линии тока внутри циркуляционных зон показаны на рисунках с шагом дискретизации $\Delta\Psi = 0.01$.

Видно, что при малых скоростях течения теплоносителя в микроканале формируется течение, которое характеризуется плавным обтеканием угловых областей зигзагообразного микроканала (рис. 9,а). При увеличении осевой скорости жидкости начинают появляться циркуляционные зоны во внутренних углах микроканала. Следует обратить внимание, что площади циркуляционных зон в рассматриваемом течении являются неодинаковыми. Исследования показывают, что наибольшие площади этих образований возникают в углах после прохождения теплоносителем коротких прямолинейных сегментов микроканала. Наилучшим образом появлению циркуляционных зон способствует чередования направления изгибов. В рассматриваемом течении наибольшие циркуляционные зоны образуются во втором и шестом

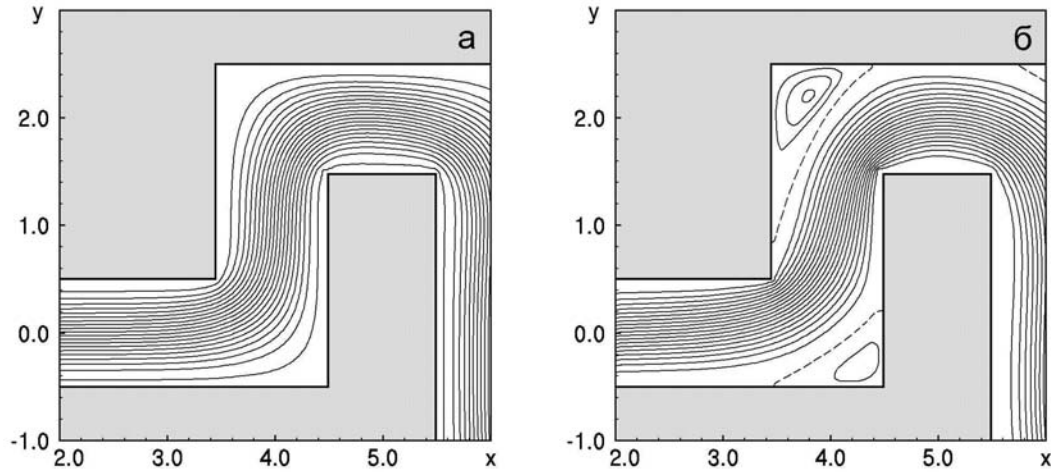


Рис. 9. Распределение функции тока внутри микроканала:
а – $Re = 40$, б – $Re = 150$

изгибах микроканала (рис. 8).

Совместное влияние сил инерции и сил вязкости в областях, прилегающих к острым кромкам микроканала, приводят к генерации локализованных вихревых структур, которые постепенно сносятся основным течением. На рис. 10 показано распределение поля завихренности $\omega(x, y)$ для случаев, показанных на рис. 9. На рисунках построено семейство линий равного уровня с шагом дискретизации $\Delta\Omega = 0.2$ (рис. 10, а) и $\Delta\Omega = 1.0$ (рис. 10, б). Видно, что максимум поля завихренности образуется около внешних углов микроканала. В циркуляционных зонах течения поле завихренности имеет локальный минимум, что приводит к тому, что локальное вращение теплоносителя в этих зонах происходит с меньшей скоростью по сравнению с продольной скоростью течения жидкости в микроканале.

При увеличении скорости течения теплоносителя в микроканале изменение направления потока вдоль зигзагообразного микроканала приводит к смещению по инерции основного потока к его границе. В результате около твердой поверхности формируется область локализованной завихренности, которая также сносится потоком основного течения. Наиболее характерные области локализованной завихренности показаны на рис. 10, б между первым и вторым углами, между вторым и третьим углами микроканала, на внешней стороне прямолинейного сегмента течения.

Такое сложное гидродинамическое течение существенно меняет структуру распределения поля давления внутри микроканала. Постоянное изме-

нение направления течения, формирование циркуляционных зон в угловых областях и генерация локализованных вихревых структур около внешних угловых областей приводят к значительному увеличению градиента поля давления, которое необходимо приложить к микроканалу для формирования соответствующей осевой скорости.

На рис. 11 показано распределение поля давления $p(x, y)$ внутри зигзагообразного микроканала, внутри которого развивается стационарное течение, показанное на рис. 9. На рисунках нанесено семейство линий равного давления (изобары) с шагом дискретизации $\Delta p = 0.2$ (рис. 11, а) и $\Delta p = 0.1$ (рис. 11, б). Наибольший градиент поля давления формируется в областях, прилегающих к внешним углам микроканала. В этих зонах вектор скорости течения теплоносителя резко меняет свое направление. С другой стороны, можно заметить, что в областях, прилегающих к внутренним углам, формируется значительно меньший градиент поля давления.

Криволинейный микроканал довольно интенсивно формирует поперечные потоки жидкости в криволинейном микроканале. Проявляется эта тенденция не только в формировании циркуляционных зон в угловых зонах микроканала и областей интенсивной завихренности за острыми кромками, но заметным смещением по инерции при движения осевого потока вдоль микроканала. Такое смещение потока приводит к образованию большего градиента поля температур по сравнению со случаем прямолинейного микроканала.

На рис. 12 показано распределение поля тем-

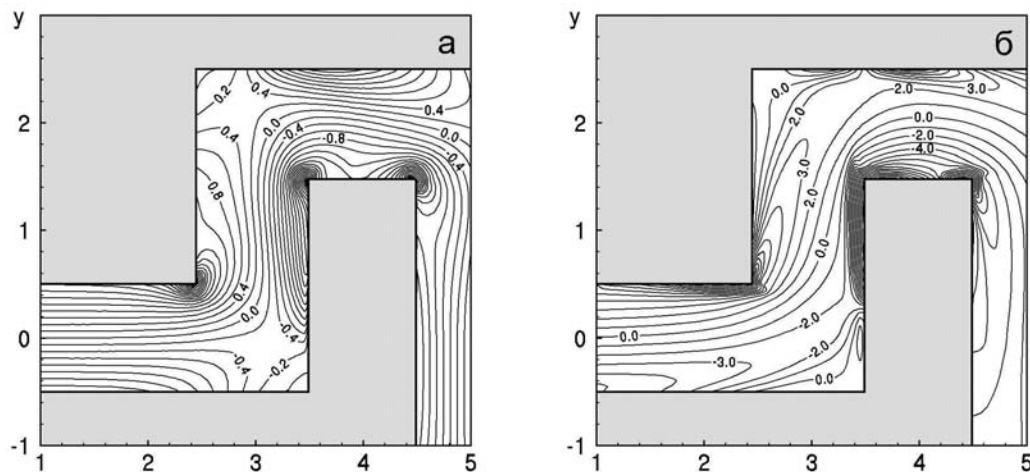


Рис. 10. Распределение поля завихренности внутри микроканала:
 а- $Re = 40$, б- $Re = 150$

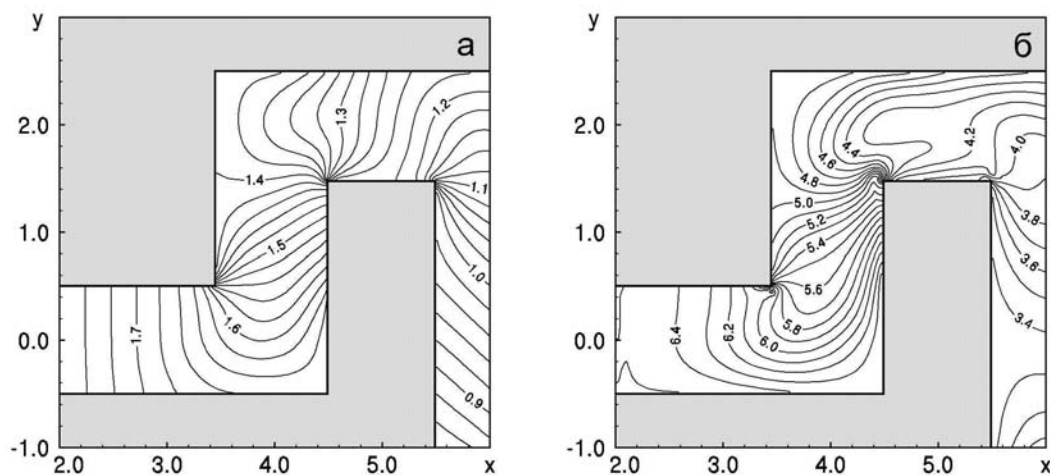


Рис. 11. Распределение поля давления внутри микроканала:
 а- $Re = 40$, б- $Re = 150$

ператур $Q(x, y)$ в области, прилегающей к входу микроканала, для течений с числами Рейнольдса $Re = 40$ и $Re = 150$ в момент времени $t = 300$, при котором поле температур достигает стационарного распределения. Анализ численных данных показывает, что максимальный градиент поля температур появляется около поверхностей, к которым основной поток приближается по инерции. Именно в этих областях поверхности образуется повышенный тепловой поток из внешней среды в теплоноситель. В результате даже при малых числах Рейнольдса Re (рис. 12, а), в средней части

потока поле температур выравнивается лучше по сравнению со случаем прямолинейного микроканала (рис. б).

Анализ численных данных показывает, что с увеличением осевой скорости теплоносителя в циркуляционных зонах течения накапливается нагретая жидкость, которая образует повышенный градиент поля температур на границе циркуляционных зон с основным потоком. Здесь также формируется повышенный диффузионный тепловой поток в виде своеобразной промежуточной зоны теплопередачи тепла из внешней среды в тепло-

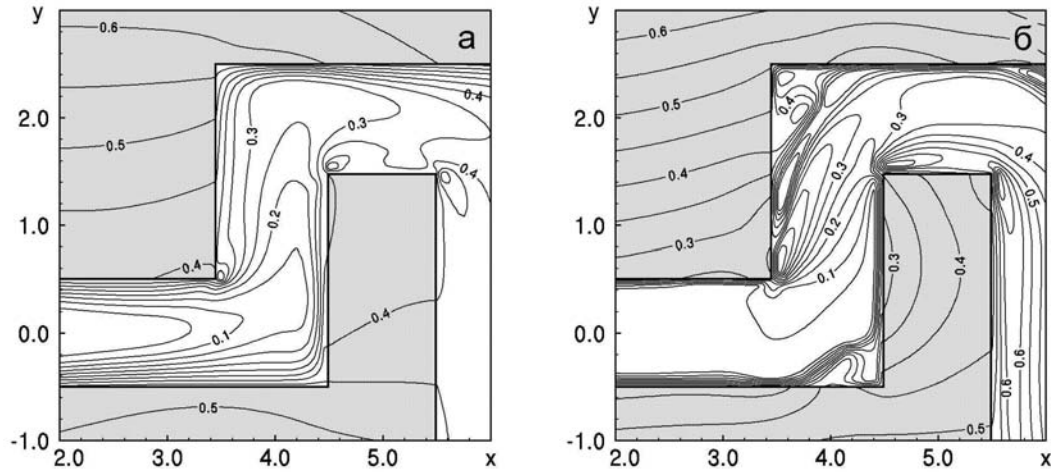


Рис. 12. Распределение поля температур внутри микроканала: а – $Re = 40$, б – $Re = 150$

носитель. С увеличением скорости течения жидкости циркуляционные зоны теряют свою стационарность и достигают квазистационарного режима, который характеризуется попеременным захватом холодной жидкости из основного течения и, вследствие несжимаемости жидкости, одновременным выдавливанием нагретой жидкости в осевой поток. Это приводит к дополнительному тепловому потоку, вызванному конвекцией теплоносителя внутри микроканала.

В целом, при ламинарном течении теплоносителя в микроканале конечной длины с увеличением значений чисел Рейнольдса увеличиваются значения средних уровней тепловых потоков. На рис. 13 показана зависимость усредненного по длине микроканала теплового потока (\bar{W}) от скорости течения теплоносителя. Зависимость $\bar{W}(Re)$ для зигзагообразного микроканала показана на рисунке сплошной линией, соединяющей сплошные квадратики. Аналогичная зависимость для прямолинейного микроканала одинаковой длины указана на рисунке штриховой линией. С увеличением скорости течения жидкости в микроканале уменьшается время прохождения теплоносителя через микроканал конечной длины. По этой причине диффузионные потоки внутри микроканала "не успевают" прогреть все поперечное сечение. При увеличении скорости течения теплоносителя градиент поля температур около его границ постепенно увеличивается. В результате, уровень тепловых потоков через ограничивающие поверхности имеет общую тенденцию к увеличению.

Сравнение кривых показывает, что для малых

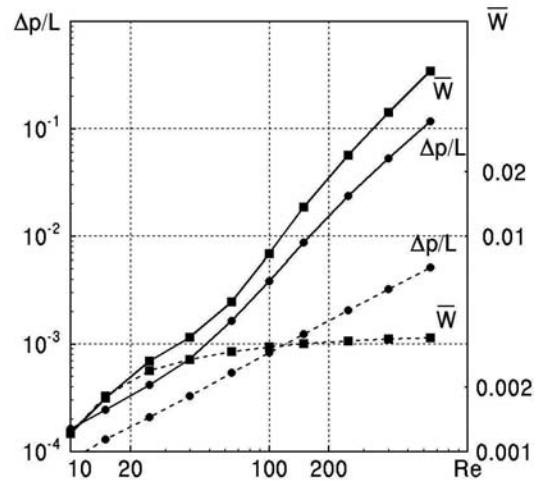


Рис. 13. Зависимости усредненного теплового потока через границы течения и усредненного градиента давления от чисел Рейнольдса Re в зигзагообразном (сплошная линия) и прямолинейном (штриховая линия) микроканале

значений чисел Рейнольдса $Re < 30...40$ уровни тепловых потоков фактически не зависят от геометрии микроканала. С увеличением скорости осевого потока в криволинейном микроканале начинается образование циркуляционных зон, локализованных вихревых структур и относительное смещение потока после изгибов в микроканале, которые приводят к значительной интенсификации теплового потока из внешней среды в теплоноси-

тель. Уровни тепловых потоков в зигзагообразном микроканале могут быть на два порядка выше в области значений чисел Рейнольдса $Re = 400...650$ по сравнению с прямолинейным микроканалом.

На рис. 13 показана зависимость усредненного по всей длине микроканала разности давлений для разных значений чисел Рейнольдса:

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{p_1 - p_0}{L}. \quad (26)$$

Сплошная линия показывает эту зависимость для зигзагообразного микроканала, а штриховая – соответствует прямолинейному микроканалу. Анализ численных данных показывает, что при ламинарном течении в области малых чисел Рейнольдса в микроканалах устанавливается в первом приближении линейная зависимость значений $\Delta p/L$ от продольной скорости теплоносителя. Такой результат находится в хорошем соответствии с данными, опубликованными в литературе [20, 26].

В то же время, можно заметить, что для всех чисел Рейнольдса разность давлений, которую необходимо прикладывать к зигзагообразному микроканалу, больше по сравнению с прямолинейным микроканалом. Такая разница в значениях вызвана образованием угловых циркуляционных течений и соответствующих потерь на давление, связанных с изменением направления основного потока. При увеличении осевой скорости течения в зигзагообразном микроканале, эта разница в значениях приложенного давления постепенно возрастает.

ВЫВОДЫ

В работе рассмотрена задача теплопередачи из внешней твердой среды в жидкий теплоноситель, движущийся внутри прямолинейного и зигзагообразного микроканалов одинаковой длины. Задача решается в терминах "функция тока–завихренность" и сводится к одновременному решению уравнения переноса завихренности, уравнения переноса тепла, уравнению Пуассона для функции тока с соответствующими начальными и граничными условиями. Задача решается в безразмерном виде. Численное решение поставленной задачи основано на решении дифференциальных уравнений параболического типа простым явным методом с разностями против потока и дифференциальных уравнений эллиптического типа методом последовательной верхней релаксации на равномерной сетке, дискретизирующей вычислительную область.

Проведено тестирование численной схемы на двумерной гидродинамической задаче стационарного ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости внутри прямолинейного микроканала и одномерной нестационарной задаче теплопередачи от нагретой стенки к холодной стенке. Сравнение численных результатов и аналитических решений, представленных в научной литературе, свидетельствуют о хорошей точности полученных численных решений поставленной задачи.

Показано, что термодинамические процессы в микроканале развиваются в несколько этапов с разными временными масштабами. Первый этап связан с заполнением микроканала холодным теплоносителем. Второй этап определяется одновременным прогревом теплоносителя и охлаждением внешней среды в области, прилегающей к границам микроканала. На этом этапе достигаются максимальные значения уровней тепловых потоков через границы микроканала. Последний этап связан с асимптотическим выходом поля температур во внешней среде и внутри микроканала на стационарный режим.

Анализ численных данных показал, что уровни тепловых потоков в зигзагообразных микроканалах при ламинарных течениях теплоносителя в стационарном режиме могут превышать уровни тепловых потоков в прямолинейных микроканалах за счет формирования поперечного потока жидкости. Такое течение формирует циркуляционные зоны во внутренних углах зигзагообразных микроканалов, локализованные вихревые структуры около внешних углов и приводит к смещению потока. Однако образование поперечного течения требует больших затрат энергии на формирование осевого потока с заданной скоростью.

Установлено, что в области чисел Рейнольдса $Re > 40...65$ уровни тепловых потоков через ограничивающие поверхности в зигзагообразном микроканале больше соответствующих потоков в прямолинейном микроканале. С увеличением скорости эта разница возрастает и при скоростях течения, соответствующих значениям чисел Рейнольдса $Re = 400...650$ могут превышать почти в два раза для стационарных режимов теплопередачи. В то же время, при малых числах Рейнольдса $Re < 30...40$ отличий в значениях усредненного по длине микроканала тепловых потоков из внешней нагретой среды в жидкость в зигзагообразном и прямолинейном микроканалах не обнаружено.

1. Moore G.E. Cramming more components onto integrated circuits // Electronics.– 1965.– 38, N8.– P. 114-117.

2. Colgan E.G., Furman B., Gaynes M. et.al. Practical implementation of silicon microchannel coolers for high power chips // Packaging Technologies, IEEE Transactions.– 2007.– **3**, N2.– P. 218-225.
3. Kandlikar S.G., Grande W.J. Evolution of microchannel flow passages - Thermohydraulic performance and fabrication technology // Transfer Engineering.– 2003.– **24**, N1.– P. 3-17.
4. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена.– М.: Атомиздат, 1979.– 416 с.
5. Akbari M., Sinton D., Bahrami M. Viscous flow in variable cross-section microchannels of arbitrary shapes // International Journal of Heat and Mass Transfer.– 2011.– **54**, N17.– P. 3970-3978.
6. Tahseen T.A., Rahman M.M., Ishak M. Experimental study on heat transfer and friction factor in laminar forced convection over flat tube in channel flow // Procedia Engineering.– 2015.– **105**.– P. 46-55.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.6. Гидродинамика.– М.: Наука, 1986.– 736 с.
8. Favre-Marinet M., Tardu S. Convective heat transfer.– London: John Wiley and Sons, 2013.– 373 p.
9. Chen Y., Cheng P. Heat transfer and pressure drop in fractal tree-like microchannel nets // International Journal of Heat and Mass Transfer.– 2002.– **295**.– P. 2643-2648.
10. Aref H. Stirring by chaotic advection // Journal of fluid mechanics.– 1984.– **143**.– P. 1-23.
11. Ottino J.M. The kinematics of mixing: stretching, chaos and transport.– Cambridge: Cambridge University Press, 1989.– 364 p.
12. Mashelkar R.A. Seamless chemical engineering science: the emerging paradigm // Chemical Engineering Science.– 1995.– **50**.– P. 1-22.
13. Tangborn A.V. Chaotic advection in 2-D mixed convection flow // Chaos.– 1995.– **5**, N2.– P. 432-438.
14. Stroock A.D., Dertinger S.K.W., Ajdari A. et al. Chaotic mixer for microchannels // Science.– 2002.– **295**.– P. 647-651.
15. Roberts E.P.L., Mackley M.R. The simulation of stretch rates for the quantitative prediction and mapping mixing within a channel flow // Chemical Engineering Science.– 1995.– **50**, N23.– P. 3727-3746.
16. Mengeaud V., Josserand J., Girault H.H. Mixing processes in a zigzag microchannel: Finite element simulations and optical study // Analytical Chemistry.– 2002.– **74**.– P. 4279-4286.
17. Oh K.W., Han A., Bhansali S., Ahn C.H. A low-temperature bonding technique using spin-on fluorocarbon polymers to assemble microsystems // Journal of Micromechanics and Microengineering.– 2002.– **12**, N2.– P. 187-191.
18. Liu R.H., Stremmer M.A., Sharp K.V. et.al. Passive mixing in a three-dimensional serpentine microchannel // Microelectromechanical Systems.– 2000.– **9**, N2.– P. 190-197.
19. Stroock A.D., McGraw J.M. Investigation of the straggled herringbone mixer with a simple analytical model // Philosophical Transactions of the Royal Society of London.– 2004.– **A362**.– P. 971-986.
20. Ламб Г. Гидромеханика.– М.,Л.: ГИТТЛ, 1947.– 929 с.
21. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа.– М.: Наука, 1987.– 840 с.
22. Вилля Г. Теория вихрей.– М.Л.: Гостехиздат, 1936.– 266 с.
23. Роуч П. Вычислительная гидромеханика.– М.: Мир, 1980.– 616 с.
24. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей.– М.: Мир, 1991.– 504 с.
25. Ozisik M.N. Finite difference method in heat transfer.– London: CRC Press, 1994.– 412 p.
26. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.– М.: Наука, 1974.– 712 с.
27. Лыков А.В. Теория теплопроводности.– М.: Высшая школа, 1967.– 600 с.