

УДК 532.593

# ИССЛЕДОВАНИЕ ТРАНСПОРТА НАНОСОВ И ЭРОЗИИ БЕРЕГА ОТ ВОЗДЕЙСТВИЯ ВОЛН НА ВОДЕ

И. Т. СЕЛЕЗОВ<sup>1</sup>, Р. И. ВОЛЫНСКИЙ<sup>2</sup>, С. А. САВЧЕНКО<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт гидромеханики НАН Украины,

<sup>2</sup>Агро-экологическая группа исследовательского центра Катиф,

Развитие береговых пустынь, Министерство науки, Израиль

e-mail: selezov@yandex.ua

Получено 20.09.2015

Рассматривается задача взаимодействия поверхностных гравитационных волн с размываемым откосом. На основе традиционного подхода балансовое уравнение для глубины  $H$  и расхода наносов  $Q$  дополняется полуэмпирическими соотношениями для наклонного берега. В результате получено параболическое уравнение с переменными коэффициентами, которое интегрируется методом конечных разностей. Показана и анализируется эволюция донных наносов. Представлена также обобщенная модель седиментации, описываемая уравнением гиперболического типа с диссипацией.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** транспорт наносов, волны на воде, эрозийное дно

Розглядається задача взаємодії поверхневих гравітаційних хвиль з укосом, що розмивається. На основі традиційного підходу балансове рівняння для глибин  $H$  і витрати наносів  $Q$  доповнюється напівемпіричними співвідношеннями для нахиленого берега. В результаті отримано параболічне рівняння із змінними коефіцієнтами, яке інтегрується методом скінченних різниць. Показана і аналізується еволюція донних наносів. Наведено також узагальнену модель седиментації, яка описується рівнянням гіперболічного типу із дисипацією.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** транспорт наносів, хвилі на воді, ерозійне дно

The problem of interaction of surfacy gravity waves with a washed away slope is considered. On the basis of conventional approach, the balance equation for the depth  $H$  and the sediment discharge  $Q$  is supplement by semiempirical relationships for inclined coast. As a result, the parabolic equation with variable coefficients is obtained which is integrated by the method of finite differences. Evolution of bottom sediments is shown and analyzed. Also generalized model of sedimentation described by the equation of hyperbolic type with dissipation is presented.

**KEY WORDS:** sediment transport, water waves, erodible bottom

## ВВЕДЕНИЕ

Исследование взаимодействия поверхностных гравитационных волн с размываемым дном и берегами было и остается актуальной проблемой.

В работах [7, 12] проводилось математическое моделирование эволюции береговой линии. В случае частично отраженных волн численные результаты получены в [5, 8, 25].

В работе [2] исследовалось движение наносов в придонном слое, моделируемом вязкосыпучей средой, и определялся расход наносов. Движение наносов над жестким или эрозийным дном исследовалось численно в [24].

В работе [6] показано, что затухание волн может существенно модифицировать диффузионное решение при сопоставимых масштабах длины затухания и глубины волн.

В отличие от предыдущих исследований в работе [17] исследуется массовый транспорт, индуцируемый морскими волнами, которые распространяются над наклонным пляжем и полностью отражаются от стенки. Решение построено по Стокеру [21] введением функции комплексного переменного. Показано, что при этом образуются рециркуляционные ячейки и в случае умеренных наклонов классическая структура рециркуляционных ячеек имеет место только при малых числах Рейнольдса. При больших числах Рейнольдса эти ячейки взаимодействуют между собой, что приводит к слиянию отрицательных ячеек и задержанию положительных ячеек около основания. В результате жидкость перемещается на суше около основания, а на расстоянии от берега – около свободной поверхности. Слияние ячеек обусловлено уменьшением продуцируемой на дне завихренности в створу моря.

## 1. ТРАДИЦИОННАЯ МОДЕЛЬ СЕДИМЕНТАЦИИ, ОПИСЫВАЕМАЯ УРАВНЕНИЕМ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Математическое описание процесса разнонаправленного перемещения морских наносов под воздействием поверхностных волн сопряжено со значительными трудностями. Однако для инженерных целей при строительстве сооружений в прибрежной зоне шельфа достаточно знать характеристики результирующего переноса осадков, а не одной частицы. Поэтому для описания динамики морских наносов можно применить уравнения, которые описывают переформирование русел и каналов, где вода и твердые частицы перемещаются в одном направлении. Эти уравнения запишем в следующем виде [19]:

$$(1 - \varepsilon) \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$Q = \begin{cases} A\omega d \left( \frac{\tau_B}{\tau_{BC}} \right)^\beta & \text{при } \tau_B \geq \tau_{BC}, \\ 0 & \text{при } \tau_B < \tau_{BC}. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $\varepsilon$  – пористость грунта;  $H$  – глубина дна, отсчитываемая от невозмущенного уровня водоема;  $Q$  – расход наносов;  $A$  и  $B$  – безразмерные постоянные;  $\tau_B$  – касательное напряжение на дне;  $\tau_{BC}$  – критическое значение касательного напряжения, при котором начинается перемещение наносов.

При  $\beta = 1; 1.5; 3$  из (2) получаются, соответственно, известные в речной гидравлике формулы расхода наносов А. Шильдса (1948), Мейера-Петера и Мюллера (1948), Х. Эйнштейна – С. Брауна (1950).

Эти формулы использовались в работах по динамике морских наносов в том же виде, в каком они применялись для расчета русловых деформаций. В работе [22] метод Х. Эйнштейна – С. Брауна применялся с некоторыми модификациями для прогноза переформирований дна в прибрежной зоне шельфа. Формулы для расхода наносов записывались в виде

$$Q_0 = \begin{cases} A\omega d\psi_s^3 & \text{при } \tau_B \geq \tau_{BC}, \\ 0 & \text{при } \tau_B < \tau_{BC}, \end{cases} \quad (3)$$

$$\psi_0 = \frac{\tau_B}{(\rho_1 - \rho_0)gd}, \quad (4)$$

$$\tau_B = -0,5C_f U_B |U_B|. \quad (5)$$

Здесь  $\psi_0$  – параметр Шильдса (касательное напряжение на дне, записанное в безразмерном виде);  $\rho_1$ ,  $\rho_0$  – плотности твердых частиц и воды;  $C_f$  – коэффициент сопротивления твердых частиц.

В отличие от теории русловых деформаций входящие в формулы (3)–(5) значения величин  $U_B$  и  $\tau_B$  интерпретировались не как мгновенные, а как осредненные в течение половины периода волны. Трансформация параметров волн до глубины опрокидывания рассчитывалась по линейной теории волн, а в области прибойного потока – по эмпирическим зависимостям.

## 2. РЕШЕНИЕ И АНАЛИЗ

Новый элемент состоит в том, что в выражении для параметра Шильдса, следуя работе [10, 11], учитывается уклон дна. Таким образом, система уравнений принимает следующий вид:

$$(1 - \varepsilon) \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Q_s}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

$$Q_s = \begin{cases} A\omega d\psi_s^3 & \text{при } \tau_B \geq \tau_{BC}, \\ 0 & \text{при } \tau_B < \tau_{BC}, \end{cases} \quad (7)$$

$$\psi_s = \psi_0 \left( 1 \pm \frac{\sin S}{\operatorname{tg} \varphi_0} \right). \quad (8)$$

Здесь  $\xi^s$  – параметр Шильдса для наклонного дна;  $S(x, t)$  – угол, составленный касательной к контуру дна в момент времени  $t$ ;  $\varphi_0$  – угол естественного откоса грунта в воде.

Физический смысл формулы (8) состоит в следующем. При движении твердой частицы вверх по откосу в потоке должна быть совершена работа по преодолению силы тяжести. Поэтому при прочих равных условиях транспортирующая способность потока, переносящего наносы вверх по откосу, меньше, чем транспортирующая способность потока над горизонтальным дном. Соответственно расход потока, переносящего частицы в направлении к берегу, представляется в виде

$$Q_s = A\omega d\psi_0^3 \left( 1 - \frac{\sin S}{\operatorname{tg} \varphi_0} \right)^3. \quad (9)$$

Делаем допущение, аналогичное принятому в [15] при решении пространственной задачи о переформировании берегов:

$$\sin S \approx S \approx \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\partial H}{\partial x} \approx \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (10)$$

Подставляя (9), (10) в уравнение неразрывности (6), получаем

$$(1 - \varepsilon) \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( Q_0 - \frac{3Q_0}{\operatorname{tg} \varphi_0} \frac{\partial H}{\partial x} \right). \quad (11)$$

Из (11) получается следующее уравнение, описывающее переформирование дна в случае, если все частицы наносов двигаются в сторону берега:

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial H}{\partial x} \right) + b = 0, \quad (12)$$

где

$$a = \frac{3Q_0}{\operatorname{tg} \varphi_0 (1 - \varepsilon)}, \quad (13)$$

$$b = \frac{1}{1 - \varepsilon} \frac{\partial Q_0}{\partial x}. \quad (14)$$

Соответственно расход наносов, переносимых волновым потоком в направлении моря, больше, чем в случае горизонтального дна, и записывается в виде

$$Q_s = A\omega d\psi_0^3 \left( 1 + \frac{3S}{\operatorname{tg} \varphi_0} \right)^3. \quad (15)$$

Уравнение вида

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial H}{\partial x} \right) + b = 0 \quad (16)$$

описывает случай, когда все наносы перемещаются в сторону моря. Это уравнение может быть использовано для математического моделирования процесса абразии в прибрежной зоне. Движение частиц в волновом поле моделировалось численно в [23].

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Результаты тестовых расчетов приведены на рис. 1, где кривой 1 обозначен первоначальный пологий откос, кривой 2 – расчетный профиль, полученный путем интегрирования дифференциального уравнения (15) [3], кривой 3 – экспериментальный профиль равновесия. Приводятся также данные параметров волнения и наносов, использованных в экспериментах ( $S_0 = 0.06$ ): а)  $h_0 = 9$  см,  $\lambda_0 = 4$  м,  $d = 0.3$  мм [20]; б)  $h_0 = 15.2$  см,  $\lambda_0 = 5$  м,  $d = 0.46$  мм [15]; в)  $h_0 = 11.3$  см,  $\lambda_0 = 10$  м,  $d = 0.22$  мм [16]; г)  $h_0 = 11.3$  см,  $\lambda_0 = 10$  м,  $d = 0.46$  мм [16]. Промежуток  $T$  времени, в течение которого выполнялось интегрирование, был принят равным длительности 40 тысяч волн, что в лабораторных условиях достаточно для выработки приближения к профилю динамического равновесия. При расчетах использовались следующие значения координат, входящих в математическую модель:  $C_f = 0.01$ ;  $A = 19.5$ ;  $n = 0.33$ .

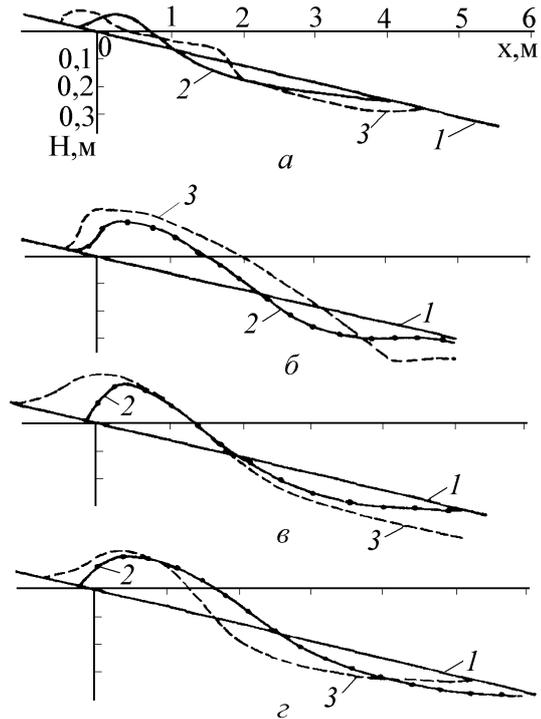


Рис. 1. Деформация плоского откоса под воздействием набегающих волн (четыре стадии): 1 – плоский откос, 2 – расчетный профиль, 3 – экспериментальный профиль равновесия

### 4. ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ СЕДИМЕНТАЦИИ, ОПИСЫВАЕМАЯ УРАВНЕНИЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

В реальных средах возмущения распространяются с конечной скоростью [1, 4, 13, 14].

Рассматривается волновое движение невязкой несжимаемой жидкости переменной глубины в прямоугольной декартовой системе координат  $(x, y, z)$ . Плоскость  $z = 0$  совпадает с невозмущенной свободной поверхностью, а ось  $Oz$  направлена вверх.

Рассматриваем возмущенное состояние, когда донная поверхность деформируется под влиянием поверхностных гравитационных волн. Это характеризуется глубиной жидкости

$$z = -H(x, y, t).$$

Так что глубина  $H(x, y, t)$  изменяется во времени из-за движения наносов.

Математическая задача формулируется следующим образом: определить глубину жидкости  $H(x, y, t)$  и вектор потока энергии  $\vec{Q} = \vec{Q}(x, y, t)$  в области  $\Omega_T = \Omega \times T$ , где  $\Omega \subset R^3$ ,  $T = \{t \in [0, t_1]\}$ , как решения уравнений (17)

и (18), которые удовлетворяют соответствующим граничным и начальным условиям. Одно уравнение выражает закон сохранения:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{Q} = 0, \quad (17)$$

где  $\vec{\nabla}$  – планарный оператор,  $\{\cdot\}$  – символ скалярного умножения.

Транспортное уравнение для замыкания системы, в отличие от предыдущих исследований, постулируется в обобщенной форме [18]:

$$L\vec{Q} = -\vec{M}H, \quad (18)$$

где скалярный оператор  $L$  характеризует изменение потока во времени:

$$L \equiv 1 + \eta_1 \partial_t + \eta_3 \partial_{tt} + \dots + \eta_{2n+1} \frac{\partial_{tt\dots t}}{(2n+1)\text{раз}}, \quad (19)$$

с коэффициентами  $1, \eta_1, \eta_3, \dots$ , а векторный оператор  $\vec{M}$  представляется оператором градиентного типа:

$$\vec{M} \equiv k_1 \vec{\nabla} + k_3 \vec{\nabla} \nabla^2 + \dots + k_{2n+1} \vec{\nabla} \nabla^{2n} \quad (20)$$

с коэффициентами  $k_1, k_3, \dots$ .

В соответствии с концепцией гиперболичности [4] сохранение всех операторов до определенного порядка (19), (20) порождает ряд обобщенных гиперболических моделей. Необходимо отметить, что обобщенная неравновесная термодинамика мотивирована конститутивными уравнениями вида (19), если вместо  $H$  рассматривать абсолютную температуру  $T$ , коэффициент проводимости тепла  $k_1$  и временную релаксацию  $\eta_1$  [9, 13].

В данном случае, когда все члены в (19) равны нулю, кроме первого, и  $\eta_1 \neq 0, \eta_3 = 0, \dots, \eta_{2n+1} = 0$ , и все члены в (20) равны нулю, кроме  $k_1$ , то есть  $k_1 \neq 0, k_3 = 0, \dots, k_{2n+1} = 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), получаем известную параболическую модель эволюции наносов, уравнение имеет вид  $\eta_1 \partial_t q + k_1 \nabla \cdot H = 0$ . Из (18) и (19) получаем

$$(1 + \eta_1 \partial_t) \vec{q} = -k_1 \vec{\nabla} H. \quad (21)$$

Для случая  $n = 0$  из соотношений (19), (20) следует простейшая гиперболическая модель в виде уравнения

$$\nabla^2 H - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \frac{1}{k_1} \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad (22)$$

где  $c_1$  – скорость распространения возмущения, которая определяется как  $c_1 = \sqrt{k_1/\eta_1}$ ,  $\eta_1$  – параметр релаксации,  $k_1$  – коэффициент кинематической вязкости (диффузии).

В классическом случае, когда параметр релаксации  $\eta_1$  стремится к нулю, уравнение (22) вырождается и для величины  $H(x, y, t)$  получаем уравнение параболического типа:

$$\nabla^2 H - \frac{1}{k_1} \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad (23)$$

которое удовлетворяет закону сохранения и применяется во всех традиционных исследованиях [19]. В дальнейшем рассмотрим случай фронтального подхода волн (плоская задача).

Рассмотрим уравнение для функции  $T(x, y, t)$ , описывающей состояние системы при ее резком изменении (неравновесная термодинамика, движение частиц в среде, седиментация и др.):

$$\nabla^2 T - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \frac{1}{k_1} \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad (24)$$

где  $c_1$  – скорость распространения возмущения, которая определяется как  $c_1 = \sqrt{k_1/\eta_1}$ ;  $\eta_1$  – параметр релаксации;  $k_1$  – коэффициент диффузии;  $x$  и  $y$  – пространственные координаты;  $t$  – время;  $\nabla^2$  – лапласиан. Это гиперболическое уравнение с диссипацией. Вклад гиперболического и параболического операторов определяется решением уравнения (24). При мгновенном включении сигнала его передача в начальный момент времени описывается гиперболическим оператором. А потом проявляются диффузионные эффекты.

Все последующие обобщения параболических моделей основаны на таком обобщенном транспортном уравнении. В результате было предложено много моделей, обобщающих параболические.

В данной статье рассматривается распространение гармонических волн на основе обобщенного уравнения, а также начально-краевая задача на конечном интервале, когда на входе задан импульс, а на выходе имеет место полное поглощение.

В дальнейшем, принимая в качестве исходных характерных величин  $\eta_1$  (сек) и  $k_1$  (м<sup>2</sup>/сек), получаем:

$$x^* = x/\sqrt{\eta_1 k_1}, \quad t^* = t/\eta_1, \quad (25)$$

$$T^* = T/T_0, \quad c_1^* = 1, \quad k_1^* = 1.$$

Уравнение (24) в одномерном случае с учетом (25) принимает вид

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} - \frac{\partial^2 T^*}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial T^*}{\partial t^*} = 0. \quad (26)$$

В дальнейшем звездочки опускаем.

*Гармонические волны.* Для исследования распространения свободных гармонических волн на основе (26) задаем возмущения в виде бегущих волн:

$$T(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}, \quad (27)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число;  $\lambda$  – длина волны,  $\lambda^* = \lambda/\sqrt{\eta_1 k_1}$ ;  $\omega = kc_p$  – круговая частота;  $c_p$  – фазовая скорость,  $c_p^* = c_p\sqrt{\eta_1/k_1}$ .

После подстановки (27) в (26) получаем условие разрешимости в виде дисперсионного уравнения и записываем (27) следующим образом

$$e^{ik(x - (\text{Re}c_p)t)} e^{k(\text{Im}c_p)t}. \quad (28)$$

Величины  $\text{Re}c_p$  и  $\text{Im}c_p$  находятся из дисперсионного уравнения в явном виде:

$$\text{Re}c_p = \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left( \frac{\lambda}{2\pi} \right)^2}, \quad \text{Im}c_p = -\frac{1}{2} \frac{\lambda}{2\pi} \quad (29)$$

и второй множитель в (29) равен  $\exp(-t/4)$ .

Из (28) и (29) видно, что предельный переход  $\lambda \rightarrow 0$  соответствует выходу на характеристику  $\text{Re}c_p = 1$ , а с увеличением длины волны  $\lambda$  вклад гиперболичности убывает.

*Начально краевая задача.* Исследуем распространение волн от мгновенно включаемого источника на конечном интервале. При мгновенном включении сигнала его передача в начальный момент времени описывается гиперболическим оператором. А потом проявляются диффузионные эффекты.

Начально-краевая задача для функции  $T(x, t)$  на основе уравнения (26) формулируется в виде

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad x \in (0, l_1), \quad t \in (0, T_1) \quad (30)$$

с граничными условиями

$$T(x, t)|_{x=0} = H(t), \quad T(x, t)|_{x=l_1} = H(t - l_1/c_1), \quad (31)$$

где  $H(t)$  – функция Хевисайда, и начальными условиями

$$T(x, t)|_{t=0} = 0, \quad T_t(x, t)|_{t=0} = 0. \quad (32)$$

Для решения задачи (30)–(32) применяем преобразование Лапласа:

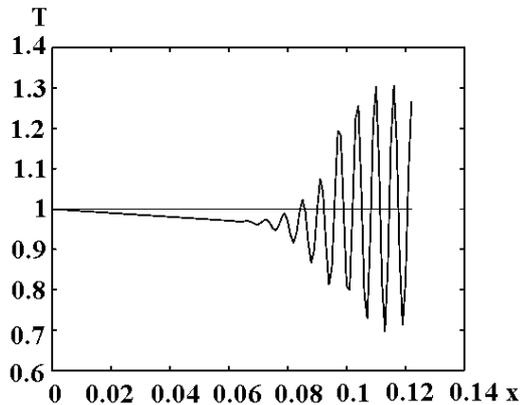
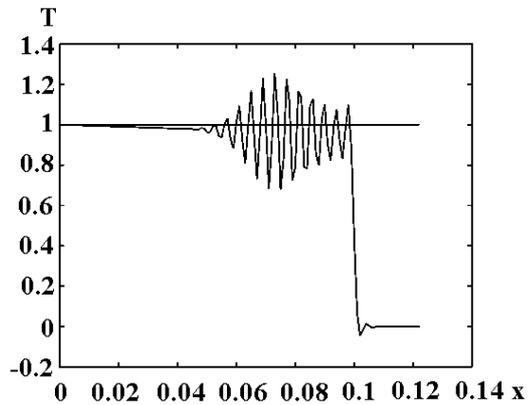
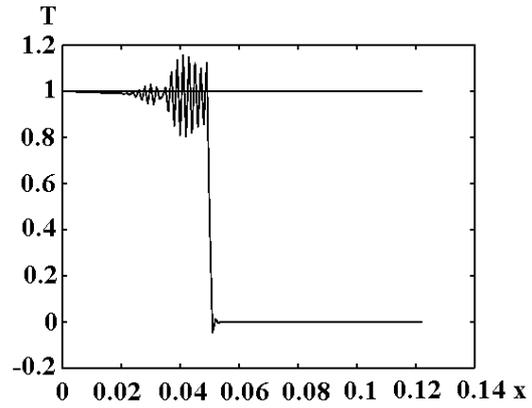


Рис. 2. Распространение ступенчатого импульса (функция Хевисайда) от входа до выхода

$$T^L(x, p) = \int_0^\infty T(x, t) e^{-pt} dt. \quad (33)$$

В пространстве изображений получаем из (30)–(33):

$$\frac{d^2 T^L}{dx^2} - p(p+1)T^L = 0, \quad (34)$$

$$T^L(x, p)|_{x=0} = \frac{1}{p}, \quad T^L(x, p)|_{x=l_1} = \frac{1}{p} e^{-pl_1/c_1}. \quad (35)$$

Решение уравнения (34) записывается в виде

$$T^L(x, p) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}, \quad (36)$$

где

$$\lambda = \sqrt{p(p+1)}, \quad (37)$$

а произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются из граничных условий (35):

$$C_1 = -\frac{1}{p} \frac{e^{-\lambda l_1} - e^{-pl_1/c_1}}{e^{\lambda l_1} - e^{-\lambda l_1}}, \quad C_2 = \frac{1}{p} \frac{e^{\lambda l_1} - e^{-pl_1/c_1}}{e^{\lambda l_1} - e^{-\lambda l_1}}. \quad (38)$$

Таким образом, соотношения (36)–(38) представляют точное решение в пространстве изображений задачи (30)–(32) на конечном интервале  $x \in (0, l_1)$ , который соответствует входу в систему при  $x = 0$  и дальнейшему распространению волн до конца интервала  $x = l_1$ , где имеет место полное поглощение волн. На входе при  $x = 0$  задается функция Хевисайда. На выходе при  $x = l_1$  задается условие полного поглощения, так что волны обратно не распространяются. Для другой входной функции решение может быть получено с помощью интеграла Дюамеля.

Каждая волна будет приходить с глубокой воды и разрушаться вблизи уреза, т. е. обратных отраженных волн не будет. В этом случае на основе обобщенного уравнения (18) можно рассматривать начально краевую задачу на конечном интервале с полным поглощением на выходе. Такая задача исследовалась применительно к распространению импульса (спайка) в мозге.

На рис. 2 представлены результаты, где хорошо видно распространение импульса в разные моменты времени. Процессы соответствуют 10 с исследованиями Максвелла и его последователей [14].

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. – Теоретическая физика. Том II. – М: ГИФМЛ, 1960. – 400 с.
2. Петров П. Г. Движение донных наносов под воздействием потока жидкости // Механика жидкости и газа. – 1988. – № 2. – С. 182–185.
3. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М: Наука, 1977. – 656 с.
4. Селезов И. Т. Концепция гиперболичности в теории управляемых динамических систем // Кибернетика и вычислит. техника. – 1969. – Вып.1. – С. 131–137.

5. Carter T. G., Liu P.F.-L., Mei C. C. Mass transport by waves and offshore sand bedforms // J. Waterways Harbors Div. ASCE **99**. – 1873. – P. 165–184.
6. Clark A.D.D. The drift velocity of water waves // J. Fluid Mech. – 1982. – **116**. – P. 187–205.
7. Gourlay M. Beaches: profiles, processes and permeability // In: Proc. 17th coast. eng. Conf. Sydney, 23-28 March. – 1980, 1981. – **2**. – P. 1320–1339.
8. Iscandarani M., Lin, P.L.-F. Mass transport in two-dimensional water waves // J. Fluid Mech. – 1991. – **231**. – P. 395–415.
9. Jou D., Ferrer V. Nonequilibrium thermodynamics and continued fraction expansions of transport coefficients // Physics Letters A. – 1989. – **134**, N 7. – P. 498–506.
10. Kobayashi N. Sediment transport on a gentle slope due to waves // J. Waterways, Port, Coast and Ocean Division. Proc. ASCE. – 1982. – **108**. – P. 252–271.
11. Kobayashi N., Reece A. Irregular waves overtopping on gravel island // J. Waterways, Port, Coast and Ocean Division. Proc. ASCE. – 1983. – **109**. – P. 429–444.
12. Le Mehaute B., Soldate M. Mathematical modelling of shoreline evolution // In: Proc. 16th Coast. Eng. Conf., Hamburg. – 1979. – P. 1163–1169.
13. Luikov A. V. Application of irreversible thermodynamics methods to investigation of heat and mass transfer // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1966. – **9**. – P. 139–152.
14. Maxwell I. C. On the dynamical theory of gases // Philos. Trans. Roy. Soc. London. – 1867. – **157**. – P. 49–88.
15. Noda E. K. Equilibrium beach profile scale model relationship // J. Waterways, Port, Coast and Ocean Division. Proc. ASCE. – 1972. – **98**. – P. 511–528.
16. Onoszko J., Tarnowska M., Zeidler R. Hydrodynamiczne badania modelowe procesow hydrodynamicznych w morskiej strefie brzegowej. – Warszawa; Poznan: Panst. PWN, 1980. – 250 p.
17. Scandura P., Foti E., Faraci C. Mass transport waves over a sloping beach // J. Fluid Mech. – 2012. – **701**. – P. 460–472.
18. Selezov I. T. Wave hydraulic models as mathematical approximations // Proc. 22th Congress, Int. Association for Hydraulic Research (IAHR), Lausanne, 1987. Techn. Session B. – P. 301–306.
19. Selezov I., Volynski R. Wave refraction and sediment dynamics modeling in coastal zone. – Kiev: SMP "AVERS 2013. – 150 p.
20. Shibayama T., Horikawa K. Bedload measurement and prediction beach of two-dimensional transformation due to waves // Coastal Engineering in Japan. – 1980. – **23**. – P. 179–189.
21. Stoker J. J. Surface waves in water of variable depth // Q. Appl. Maths. – 1947. – P. 1–54
22. Sunamura T. Parameters for delimiting erosion and accretion of natural beaches // Annual Report Inst. Geosci. Univ. Tsukuba. – 1980. – N 6. – P. 51–54.
23. Volynski R., Azmon E., Selezov I., Suzdaltsev A. Computer simulation of small particles transport in wave. // Proc. 26th Israel Conf. on Mechanical Eng., Technion City, Haifa, 21-22 May 1996. – P. 234–236.
24. Wei Li, Huib J. de Vriend, Zhengbing Wang, D. S. van Maren Morphological modeling using a fully coupled, total variation diminishing upwind-biased centered scheme // Water Resources Research. – 2013. – **49**. – P. 3547–3565.
25. Wen J., Liu P.L.-F. Mass transport under partially reflected waves in a rectangular channel // J. Fluid Mech. – 1994. – **226**. – P. 121–145.