

УДК 532.543

## СУЧАСНИЙ СТАН ТА ПРОБЛЕМИ ТЕОРІЇ ХВИЛЯСТОГО СТИБКА

О.А. РЯБЕНКО

Національний університет водного господарства та природокористування,  
33022, Рівне, вул. Соборна, 11  
e-mail: o.a.riabenko@niuw.edu.ua

Получено 23.11.2015

Наводиться детальний аналіз існуючої інформації про хвилястий стрибок. Описуються виявлені недоліки та хибні стереотипи про це явище, а також існуючі проблеми. Розглядаються диференціальні рівняння, що використовуються для розрахунків профілю вільної поверхні хвилястого стрибка. Висвітлюються позитивні і негативні риси цих рівнянь та їх розв'язків. Розроблена концептуально нова математична модель хвилеподібних білякритичних течій, до яких відноситься також і хвилястий стрибок. На основі цієї математичної моделі виведено узагальнене диференціальне рівняння профілю вільної поверхні розглядуваних явищ, знайдено його загальний та частинні розв'язки. Відмітною рисою розробленої математичної моделі, отриманого диференціального рівняння та його розв'язків є врахування у явному вигляді можливого відхилення від гідростатики у початковому перерізі розглядуваних явищ. Співставлення одержаних результатів з теоретичними і експериментальними даними для використаного діапазону характеристик показало їх хорошу збіжність та підтвердило принципову правильність розробленої математичної моделі.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** кноїдальні хвилі, білякритичні течії, негідростатичний розподіл тиску, усамітнена хвиля, хвилястий стрибок

Приводится детальный анализ существующей информации о волнистом прыжке. Описываются выявленные недостатки и ошибочные стереотипы об этом явлении, а также существующие проблемы. Рассматриваются дифференциальные уравнения, используемые для расчетов профиля свободной поверхности волнистого прыжка. Освещаются положительные и отрицательные черты этих уравнения и их решений. Разработана концептуально новая математическая модель волнообразных околокритических течений, к которым относится также и волнистый прыжок. На основе этой математической модели выведено обобщенное дифференциальное уравнение профиля свободной поверхности рассматриваемых явлений, найдены его общий и частные решения. Отличительной чертой разработанной математической модели, полученного дифференциального уравнения и его решений является учет в явном виде возможного отклонения от гидростатики в начальном сечении рассматриваемых явлений. Сопоставление полученных результатов с теоретическими и экспериментальными данными для использованного диапазона характеристик показало их хорошую сходимость и подтвердило принципиальную правильность разработанной математической модели.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** кноидальные волны, околокритические течения, негидростатическое распределение давления, уединенная волна, волнистый прыжок

The detailed analysis of current information about undular jump are given. The identified deficiencies, misconceptions and existing issues about this phenomenon are shown. The article identifies the differential equations, which are used to calculate the free-surface profile of undular jump. The positive and negative features of these equations and their solutions are given. The article gives the development of a principally original and new mathematical model for the wavelike near-critical flows including the undular jump. On the basis of this model, the author has derived and presents a combined differential equation with its general and specific solutions for the free-surface profile of the considered phenomena. The peculiarity of original mathematical model and its solutions is taking into account the possible hydrostatic and non-hydrostatic conditions specifically in the initial section of the undular jump and other types of the near-critical flows. Comparison of theoretical calculations with empirical data for a relevant range of conditions has provided a good convergence of the results and confirmed principal accurateness and applied value of the developed mathematical model.

**KEY WORDS:** cnoidal waves, near-critical flows, no hydrostatic pressure distribution, solitary wave, undular jump

### ВСТУП

Хвилястим стрибком називається явище переходу потоку рідини із бурхливого стану в спокійний, вільна поверхня якого має хвилеподібну форму з поступовим затуханням хвиль у напрямі руху потоку (рис. 1). Початковим перерізом стрибка називається переріз бурхливого потоку, після якого починається різкий підйом вільної поверхні. Глибина на початку хвилястого стрибка  $h_1 < h_K$ , а в точках перегину кривої вільної поверхні  $h_2 > h_K$ ,

де  $h_K$  – критична глибина, яка для умов плоскої задачі визначається за формулою

$$h_K = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}, \quad (1)$$

де  $q$  – питома витрата,  $g$  – прискорення вільного падіння.

Глибини  $h_1$  та  $h_2$  називаються відповідно першою та другою спряженими глибинами хвилястого стрибка.

У випадку горизонтального або слабо похило-

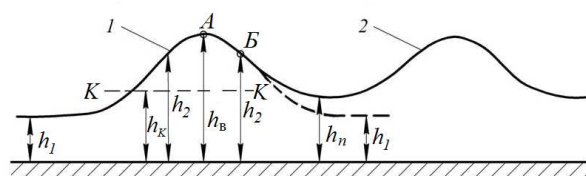


Рис. 1. Схема хвилястого стрибка:  
1 – усамітнена хвиля, 2 – кноїдальні хвилі

го дна максимальною є глибина  $h_B$  найчастіше під вершиною першої хвилі, але якщо на гребенях хвиль сформувалися вальці, то максимальною є глибина під вершиною першої за рахунком гладкої хвилі.

Започаткували вивчення цього явища Г. Дарсі, Г. Базен, П. Бюсс, Б.О. Бахметев, Г.Й. Сухомел, Ф. Ейснер, М.М. Павловський [1 – 6]. Значний вклад у вивчення хвилястого стрибка внесли І. Іваса, М.С. Краснитський, В.В. Смыслов, Л.Е. Джонс, Г.А. Руссо, Г. Хольторф, А.А. Турсунов, В.Г. Вереземський, В.М. Андерсен, В. Хагер, К. Хуттер, Х. Шансон, Дж. Монте, І. Охтсу, І. Ясуда, Х. Готох, Х. Штайнрюк, В. Шнайдер, Дж. Леннон, Д. Хілл, Р. Юрідіс, І.С. Бае, С. Бозе, О. Кастро-Оргаз, С. Дей [7 – 22] та інші. Спеціальні дослідження цього явища при написанні наукових дисертацій здійснили А.І. Модзалевський, А.М. Мельников, О.А. Рябенко, Р. Дунбабін, В. Грільхофер, Б.А. Вольс, М.Ф. Рамаза [23 – 29].

При виконанні теоретичних і експериментальних досліджень хвилястого стрибка традиційно вивчаються такі питання, як відношення спряжених глибин  $h_1$  і  $h_2$ , визначення максимальної глибини  $h_B$ , умови існування, обриси профілю вільної поверхні, кінематична структура, розподіл гідродинамічного тиску по глибині у довільному перерізі стрибка особливо у перерізах, проведених через вершини і підшви хвиль, а також у перерізі з другою спряженою глибиною ( $h_2$ ), вплив нахилу і кривизни елементарних струминок на характеристики стрибка. В останні роки велика увага приділяється розробці теоретичних методів побудови профілю вільної поверхні хвилястого стрибка, основаних на аналітичних [16, 19, 21, 30 – 33] і чисельних [28, 29, 34, 35] розв'язках відповідних диференціальних рівнянь. Важливі результати отримані при вивченні впливу на розглядуване явище наступних факторів – бокові ударні хвилі та відношення ширини потоку до його висоти [17, 18, 36]; тертя на дні та розвиток турбулентного пограничного шару [18, 33]; асимптотичний ана-

ліз у повністю розвинутому турбулентному потоці з використанням  $k - \varepsilon$  моделі турбулентності та моделі рейнольдсових напружень [19, 21, 27, 38]; вплив чисел Рейнольдса і Фруда [18, 19, 21, 36, 38, 39]; вплив похилу дна [39, 40]; виявлення наявності чи відсутності нахилу та кривизни елементарних струминок у початковому перерізі і їх вплив на розглядуване явище [25, 41] та ін.

Паралельно з розвитком теорії хвилястого стрибка розвивалася і більш загальна теорія білякритичних течій рідини, тобто нерухомих і рухомих (хвиль переміщення) гідравлічних явищ з характерним числом Фруда, близьким або рівним одиниці [13, 25, 33, 42 – 48]. Отримані дані про усамітнену і кноїдальні хвилі, солітони, хвилі переміщення та інші типи білякритичних течій використовуються при розгляді хвилястого стрибка, який також відноситься до цього класу течій.

Хвилястий стрибок утворюється в межах різних типів гідротехнічних споруд. Поширення хвиль на велику довжину спричиняє виникнення динамічних навантажень на елементи кріплення, що може викликати його руйнування та розмиви відвідного русла. Максимальна глибина стрибка, що формується під вершинами хвиль, визначає відмітки верха бокових стінок, бровок каналів і низу прогінних балок мостів, висоту безнапірних тунелів і труб, а також умови переходу в них від безнапірного режиму до напірного. Зазначені обставини свідчать про практичне значення проблеми розрахунків характеристик розглядуваного явища.

Хвилястий стрибок є унікальним гідравлічним явищем, вивченню якого присвячені сотні наукових робіт. Ці роботи написані в різних країнах, представниками різних наукових шкіл, з різних вихідних позицій, враховують вплив різних діючих факторів, використовують різні методи теоретичних і експериментальних досліджень, мають різні кінцеві результати, які далеко не завжди узгоджуються між собою. Наразі назріла гостра необхідність дати різносторонній критичний аналіз отриманих результатів, узагальнити існуючі досягнення, виявити принципові недоліки, суперечності і хибні стереотипи, розкрити їх суть та намітити перспективні напрями подальшого розвитку теорії хвилястого стрибка. В умовах одночасного існування різних точок зору про окремі аспекти цього явища публікація такої роботи є своєчасною і корисною.

## 1. ХИБНІ СТЕРЕОТИПИ ТА НЕДОЛІКИ ІСНУЮЧИХ УЯВЛЕНЬ ПРО ХВИЛЯСТИЙ СТРИБОК

За тривалий час спостережень вчені отримали великий обсяг цінної багатопланової інформації про хвилястий стрибок. Разом з цим вже склався ряд хибних стереотипів, які суперечать результатам сучасних досліджень і не відповідають фізиці розглядуваного явища. До таких хибних стереотипів необхідно віднести три наступні принципові положення.

### 1.1. Теза про гідростатичний розподіл тиску у початковому перерізі

Звичайно вважається, що у початковому перерізі хвилястого стрибка потік рідини завжди є паралельно струминним, нахил і кривизна елементарних струминок відсутні, а розподіл тиску по глибині підпорядковується гідростатичному закону. Цей висновок ґрунтується лише на візуальних спостереженнях і не підкріплюється якимись інструментальними вимірюваннями. Ситуація ускладнюється тим, що на нинішньому етапі розвитку науки взагалі не існує приладів, за допомогою яких можна було б безпосередньо вимірювати не тільки нахил і кривизну окремих струминок, а й навіть кривої вільної поверхні.

Для об'єктивності необхідно підкреслити, що теза про гідростатичний розподіл тиску у початковому перерізі хвилястого стрибка у більшості експериментальних досліджень досить точно характеризує розглядуване явище, а отримувані результати відповідають теоретичним залежностям. У явній чи неявній формі ця теза закладена у багатьох залежностях, що описують основні характеристики розглядуваного явища.

Закон розподілу гідродинамічного тиску по глибині безпосередньо пов'язаний із нахилом і кривизною елементарних струминок та законами зміни цих характеристик по глибині у розглядуваному перерізі потоку. Для загального випадку це питання досить повно висвітлено в курсах гідравліки, механіки рідини та в спеціальних роботах [9, 42, 44, 49 – 55]. Проте стосовно початкового перерізу хвилястого стрибка питання про наявність чи, навпаки, відсутність гідростатичного розподілу тиску в жодній роботі, крім робіт автора, спеціально не розглядалось.

Вперше це питання було досліджено в роботі [25]. Системні, досить детальні експерименти, проведені у широкому діапазоні характеристик потоку з використанням великої кількості донних п'є-

зометрів, переконливо довели, що у початковому перерізі хвилястого стрибка та інших типів білякритичних течій рідини може існувати не тільки гідростатичний, а й негідростатичний розподіл тиску по глибині. В останньому випадку у вказаному перерізі крива вільної поверхні є ввігнутою, а гідродинамічний тиск у довільній точці цього перерізу (крім точки на поверхні) перевищує значення, підраховане за гідростатичним законом. У подальшому ідея про можливість існування негідростатики в початковому перерізі досліджуваних явищ була успішно використана в наступних експериментальних і теоретичних роботах автора та його співавторів. Нерозуміння суті зазначеної ідеї приводить до помилок у розрахунках, неправильного трактування отриманих результатів, суперечностей і парадоксів [56].

Деякі вчені в процесі дискусій висловлюють думку, що висновок про можливість негідростатики у початковому перерізі стрибка може бути пов'язаний з невдалим вибором початкового перерізу стрибка, тобто змінивши розрахункове положення (поздовжню координату) цього перерізу, можна знайти такий переріз, у якому розподіл тиску відповідатиме гідростатичному закону. Хибність такої думки добре ілюструє рис. 2, на якому показано три досліди з хвилястим стрибком, утвореним за схемою витікання води з-під затвора з гострим краєм. Характеристики цих дослідів наведені у табл. 1. Як видно з рисунка, у кожному досліді по всій довжині потоку від затвора до першої точки перегину кривої вільної поверхні хвилястого стрибка п'єзометрична лінія (положення якої визначено за допомогою донних п'єзометрів [41]) знаходиться вище кривої вільної поверхні. Таким чином, на всій зазначеній довжині немає жодного перерізу з гідростатичним розподілом тиску.

Необхідно зауважити, що в статтях [21, 22, 31] при виконанні чисельних розрахунків хвилястого стрибка для умов дослідів, описаних у роботах [39, 40], прийнято певні значення першої  $h'$  та другої  $h''$  похідних у початковому перерізі стрибка. Посуті це є визнанням можливості існування негідростатики у зазначеному перерізі. Проте обґрунтування такого рішення, якась мотивація його доцільності, умови застосування, межі змін величин  $h'$  та  $h''$  чи відповідні посилання на першоджерела, на жаль, не наводяться. Цілком можливо, що це рішення викликано особливостями використовуваних диференціальних рівнянь та прагненням авторів наблизити розрахункові значення обчислюваних величин до експериментальних. Тут доречно підкреслити, що така позиція суперечить результатам досліджень [39, 40], авторів яких у своїх ек-

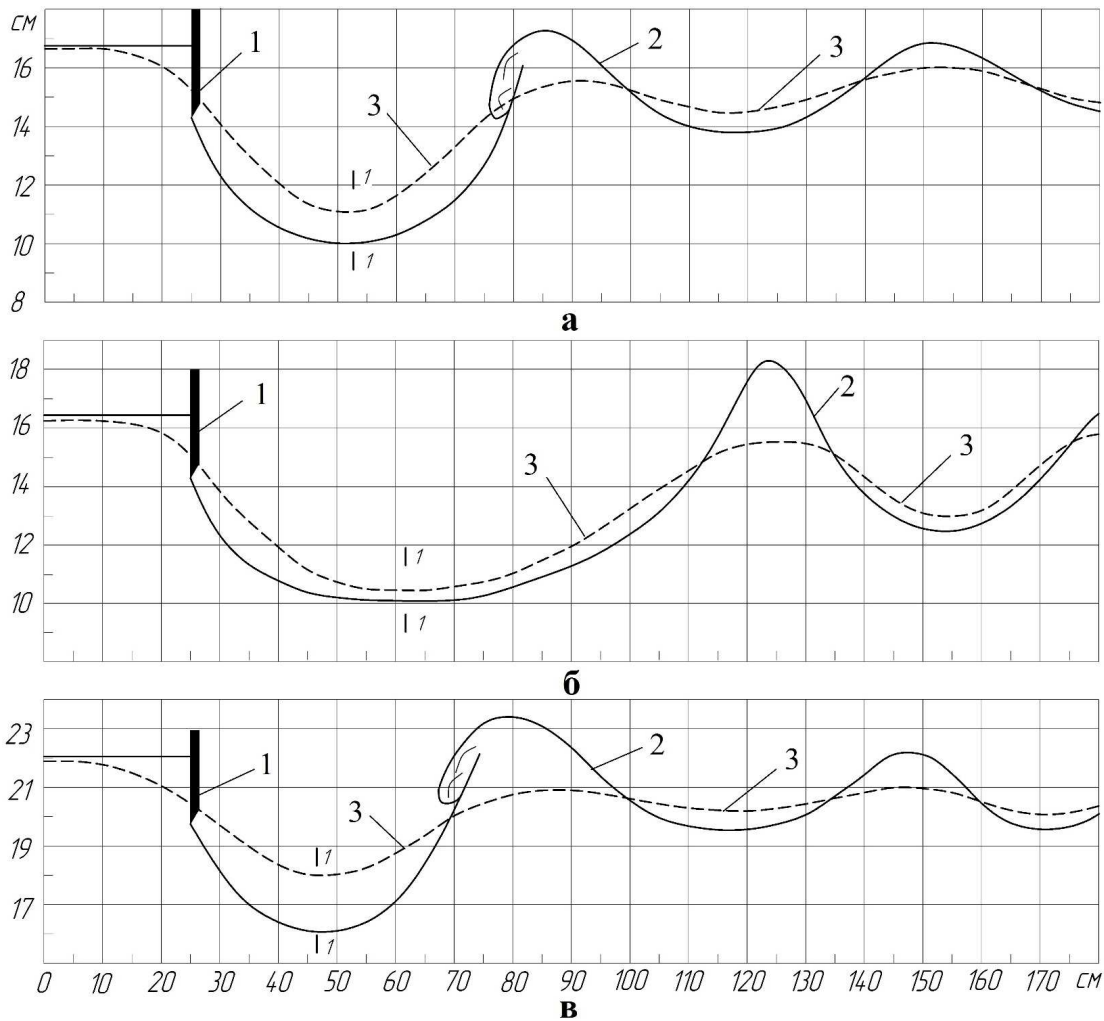


Рис. 2. Результати дослідів з хвилястим стрибком:  
 1 – затвор, 2 – крива вільної поверхні, 3 – п’єзометрична лінія; 1-1 – початковий переріз стрибка

Табл. 1. Характеристики дослідів, показаних на рис. 2

№ з/п	№ досл.	рис.	$h_{ш}, м$	$q, м^2/с$	$h_1, м$	$Fr_1$	$h_{n.1}, м$	$s_1$	$h_2, м$	$h_B, м$	$H_{B,б}, м$
1	28	2а	0.149	0.1449	0.101	2.076	0.1105	1.094	0.156	0.173	0.1675
2	29	2б	0.150	0.1449	0.101	2.076	0.1050	1.040	0.153	0.182	0.1645
3	31	2в	0.203	0.2249	0.161	1.235	0.1800	1.118	0.207	0.230	0.2205

периментах не фіксують наявності негідростатики у початковому перерізі стрибка.

**1.2. Теза про однозначність описання хвилясто-го стрибка характерним числом Фруда**

Основні характеристики та умови існування хвилястого стрибка в загальному випадку залежать від великої кількості діючих факторів – характеру розподілу швидкості, рівня турбулентно-

сті, форми поперечного перерізу і шорсткості русла, розвитку пограничного шару, чисел Фруда і Рейнольдса, похилу дна тощо. Для прямокутної форми поперечного перерізу русла до цих факторів додається ще вплив бокових ударних хвиль та відношення ширини потоку до його висоти.

У випадку відносно рівномірного розподілу швидкості і повністю розвинутої турбулентності у початковому перерізі стрибка для широких русел

з незначним похилом дна і відсутності істотного впливу бокових ударних хвиль звичайно вважається, що хвилястий стрибок однозначно описується характерним числом Фруда. За аналогією з досконалим гідравлічним стрибком характерним числом Фруда хвилястого стрибка, як правило, вважається число  $Fr_1$  у його початковому перерізі. Відповідно до цього практично всі залежності (крім формул автора), що описують основні характеристики (другу спряжену  $h_2$  і максимальну  $h_B$  глибини) та умови існування хвилястого стрибка, однозначно виражаються через число Фруда  $Fr_1$ . Необхідно підкреслити, що така точка зору повністю відповідає відомому положенню класичної гідравліки про однозначність описання (а відповідно і моделювання) потоків з вільною поверхнею характерним числом Фруда.

Проте детальні дослідження хвилястого стрибка та інших типів білякритичних течій рідини [25, 45] показали, що теза про однозначність описання хвилястого стрибка числом Фруда  $Fr_1$  відповідає дійсності лише за умови наявності гідростатичного розподілу тиску у його початковому перерізі.

У випадку відсутності гідростатики у зазначеному перерізі традиційні залежності для визначення глибин  $h_2$  і  $h_B$ , які не враховують цей фактор, дають істотно занижені результати і в якісному відношенні не відображають адекватно розглядуване явище. Для коректного описання хвилястого стрибка з негідростатикою у початковому перерізі його основні характеристики та умови існування необхідно визначати не одним, а двома факторами – в додаток до числа Фруда  $Fr_1$  необхідно враховувати ще один з коефіцієнтів, що оцінюють ступінь відхилення від гідростатики у вказаному перерізі стрибка.

Цей висновок переконливо підтверджує співставлення результатів двох дослідів, показаних на рис. 2, а, б. Шляхом підбору витрати, висоти підняття щита  $h_{\text{щ}}$  та глибини нижнього б'єфу (яку в першому наближенні можна характеризувати значенням другої спряженої глибини  $h_2$ ) ці досліді поставлені таким чином, що у них є однаковими питомі витрати  $q$ , початкові глибини  $h_1$  і, відповідно, числа Фруда  $Fr_1$ , але різною є ступінь відхилення від гідростатики у початковому перерізі стрибка. При проведенні лабораторних експериментів згадану ступінь відхилення від гідростатики у вибраному перерізі потоку зручно характеризувати за допомогою коефіцієнта негідростатичності:

$$s_1 = \frac{h_{\text{п.д.1}}}{h_1}, \quad (2)$$

де  $h_{\text{п.д.1}}$  – п'єзометричний тиск на дні, вираже-

ний у висоті водяного стовпа. Внаслідок різних значень коефіцієнта  $s_1$  у порівнюваних дослідах різними є глибини відповідно  $h_2$  і  $h_B$  та профіль вільної поверхні. Характерно, що при зменшенні глибини нижнього б'єфу зменшується не тільки коефіцієнт  $s_1$ , а й глибина верхнього б'єфу перед щитом  $H_{\text{в.б}}$ .

### 1.3. Теза, що необхідною і достатньою умовою існування хвилястого стрибка є вираз

$$1 < Fr_1 < Fr_1^{\text{lim}}, \quad (3)$$

де  $Fr_1^{\text{lim}}$  – число Фруда, що характеризує верхню границю формування хвилястого стрибка при його переході в досконалий гідравлічний стрибок з поверхневим вальцем. Вперше цю точку зору піддав сумніву А.М. Мельников [24], який у своїх лабораторних дослідженнях в області чисел Фруда  $Fr_1 = 1 - 3$  отримав не хвилястий, а досконалий стрибок з поверхневим вальцем. Така позиція А.М. Мельникова, разом з іншими його сумнівними твердженнями, принципово суперечила ustalеним канонам традиційної гідравліки і була піддана гострій критиці в роботах [57, 58]. Автори цих робіт визнали вище згадане твердження А.М. Мельникова помилковим, а саму помилку пояснювали малими значеннями початкової глибини стрибка  $h_1$ , внаслідок чого вплив сил тертя на дні був дуже великим, через що в дослідах порушувалися умови суцільності потоку. Для об'єктивності суджень необхідно визнати, що позиція опонентів А.М. Мельникова виглядала досить обґрунтованою, адже в окремих дослідах початкова глибина стрибка  $h_1$  становила всього 0.005 м [24]. Здавалося, що розглядуване питання вже вияснене остаточно, проте в роботах [25, 41] були опубліковані результати детальних лабораторних досліджень, які підтвердили позицію А.М. Мельникова і переконливо довели, що хвилястий стрибок можна зруйнувати і отримати гідравлічний стрибок з поверхневим вальцем при числах Фруда  $Fr_1 < 3$ , причому як завгодно близьких до одиниці. Характерно, що в згаданих дослідах початкова глибина хвилястого стрибка  $h_1$  була досить великою і доходила до 0.213 м. Таким чином, зазначений вираз (3) не визначає умови існування хвилястого стрибка.

**Серед інших недоліків існуючих уявлень про хвилястий стрибок, які істотно впливають на сучасний стан розвитку теорії цього явища, виділимо п'ять наступних.**

1) **Якісна невідповідність різних точок зору про характер зміни профілю вільної поверхні по довжині хвилястого стрибка.** Тра-

диційна гідравліка вважає, що глибини потоку під вершинами хвиль по довжині хвилястого стрибка зменшуються, а самі хвилі затухають [1–6]. В той же час в роботах [19, 21, 22, 27, 33, 38, 59], які основані на асимптотичному аналізі множинних шкал у турбулентному потоці та інших вихідних позиціях, отримано діаметрально протилежні результати, згідно з якими глибини під вершинами хвиль по довжині хвилястого стрибка не зменшуються, а, навпаки, збільшуються.

**2) Вивчення хвилястого стрибка без системного зв'язку з іншими типами білякритичних течій.** Як вже було сказано раніше, хвилястий стрибок відноситься до класу білякритичних течій рідини. Проте у більшості досліджень, хвилястий стрибок вивчався як окреме явище без системного зв'язку з іншими явищами цього класу. Отримані при цьому залежності відносяться тільки до хвилястого стрибка і не можуть бути поширені на інші типи білякритичних течій.

Найбільш показовим і очевидним у цьому відношенні є питання про спряжені глибини хвилястого стрибка. Класичне визначення першої  $h_1$  та другої  $h_2$  спряжених глибин хвилястого стрибка, як глибин у відповідних перерізах бурхливого і спокійного потоків (за аналогією з досконалим гідравлічним стрибком), ґрунтується на положенні про гідростатичний розподіл тиску по глибині у зазначених перерізах. Традиційна методика лабораторного визначення першої спряженої глибини хвилястого стрибка ґрунтується лише на візуальному виборі місцеположення початкового перерізу стрибка і зводиться до простої процедури вимірювання глибини потоку у вибраному перерізі. При цьому інструментальний контроль можливої наявності чи відсутності нахилу і кривизни елементарних струминок (а відповідно, наявності чи відсутності гідростатичного закону розподілу тиску) у згаданому перерізі потоку взагалі не проводиться.

Проте при експериментальному вивченні класу білякритичних течій рідини такий контроль конче необхідний. Справа в тому, що в природі є такі типи цих течій (кноідальні хвилі, безстрибкове вальцеве спряження б'єфів та ін.), які взагалі не можуть існувати з гідростатикою в їх початковому перерізі. В той же час гідродинамічний солітон, навпаки, може утворюватися лише за умови наявності гідростатики у вказаному перерізі, а хвилястий і класичний стрибки можуть існувати як з гідростатичним, так і негідростатичним розподілом тиску у їх початковому перерізі.

У цьому відношенні досить перспективною виглядає ідея виведення універсальних залежностей, загальних для всіх явищ розглядуваного класу і

дійсних при числах Фруда менших, рівних і більших одиниці, а також при наявності та відсутності гідростатики у їх початковому перерізі. Використання таких універсальних залежностей для конкретного явища дає можливість чітко відітнути його особливості та відмінності від інших.

**3) Ототожнення хвилястого стрибка і хвиль переміщення.** Враховуючи схожість ряду ознак, деякі автори [10, 60] ототожнюють **нерухомий** в просторі хвилястий стрибок та **рухомі** групові хвилі переміщення з гладкою хвилястою поверхнею. Проте аналіз умов існування, кінематичної структури, профілів вільної поверхні та інших характеристик показав, що порівнювані явища мають певні відмінності, внаслідок чого переносити результати вивчення одного явища на інше треба дуже обережно [8, 12, 61, 62].

**4) Ототожнення різних форм числа Фруда при описі хвилястого стрибка.** Число Фруда у початковому перерізі хвилястого стрибка, через яке виражають його основні характеристики та умови існування, найчастіше записують у таких двох формах:

$$Fr_1 = \frac{v_1^2}{gh_1} = \frac{q^2}{gh_1^3}, \quad (4)$$

$$F_1 = \sqrt{Fr_1} = \frac{v_1}{\sqrt{gh_1}} = \frac{q}{\sqrt{gh_1^3}}, \quad (5)$$

Обидва вирази є рівноправними і широко використовуються представниками різних наукових шкіл для описання різноманітних гідравлічних явищ. Через це можна вважати за прикре непорозуміння ситуацію, коли автори при аналізі інформації з різних джерел про хвилястий стрибок роблять певні узагальнення, але не враховують різниці між формулами (4) і (5), а використовувані значення чисел Фруда не зводять до спільної шкали.

**5) Якісна невідповідність теоретичної схеми та експериментальних даних, використуваних для порівняння.** Недивлячись на відносно вузький діапазон умов існування хвилястого стрибка, вчені виділяють окремі підвиди цього явища, які якісно відрізняються між собою за певними ознаками [17, 18, 41]. Логіка дій вимагає, щоб автори для підтвердження своїх теоретичних досліджень порівнювали отримані результати з тими експериментальними даними, які відповідають прийнятій теоретичній схемі. Проте в дійсності це відбувається таким чином далеко не завжди.

Типовим прикладом зазначеної невідповідності є ситуація з врахуванням впливу похилу дна на характеристики хвилястого стрибка. Досить часто при теоретичному розгляді цього явища похил дна

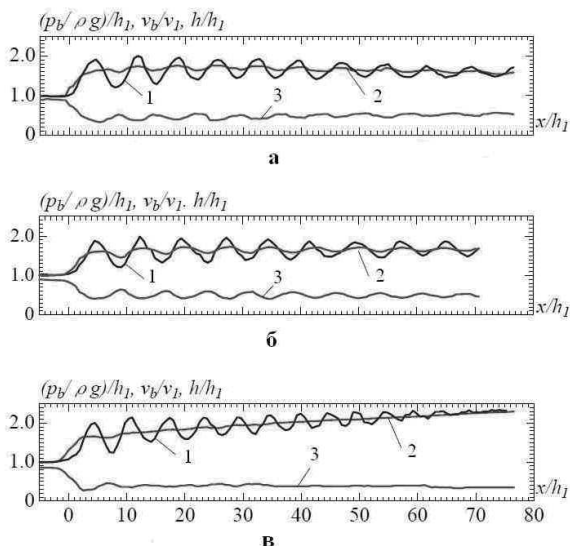


Рис. 3. Вплив похилу дна на характеристики хвилястого стрибка:

- а – горизонтальний канал ( $F_1 = 1.50$ ),  
 б – слабо нахилений канал ( $\operatorname{tg}\theta = 1/1000$ ,  $F_1 = 1.48$ ),  
 в – сильно нахилений канал ( $\operatorname{tg}\theta = 1/163$ ,  $F_1 = 1.47$ ),  
 1 – вільна поверхня ( $h/h_1$ ),  
 2 – донний тиск ( $(p_{\text{д}}/\rho g)/h_1$ ),  
 3 – придонна швидкість ( $v_{\text{д}}/v_1$ )

приймається нульовим або незначним, що істотно спрощує математичну модель. Цьому положенню відповідають також і результати експериментальних вивчень хвилястого стрибка, проведених багатьма авторами.

Спеціальні лабораторні дослідження впливу похилу дна на характеристики хвилястого стрибка виконали Х. Шансон та Х. Готох, І. Ясуда, І. Охтсу [39, 40], причому похил дна в цих експериментах змінювався в широких межах. Отримані результати виявили якісну відмінність хвилястого стрибка при похилах дна  $i < i_K$  та  $i > i_K$  (де  $i_K$  – критичний похил). Якщо  $i < i_K$  (включаючи горизонтальне положення дна), то глибини під вершинами хвиль зменшуються в напрямку руху потоку рідини, а якщо  $i > i_K$ , то збільшуються. Цей висновок наочно ілюструє рис. 3, запозичений з роботи [39].

Автори вищезгаданих робіт [19, 21, 22, 27, 33, 38, 59], які отримали розрахунковий профіль вільної поверхні хвилястого стрибка із збільшенням глибин під вершинами хвиль у напрямку руху потоку води, для перевірки результатів своїх теоретичних досліджень широко використовують експериментальні дані Х. Шансона та Х. Готох, І. Ясуда, І. Охтсу [39, 40]. Проте при цьому вони не аналізують вплив похилу дна на використовувані характеристики. З метою здійснення аналізу впли-

ву цього фактора на характеристики хвилястого стрибка підраховуємо значення критичного похилу для результатів ряду дослідів, отриманих у роботах [39, 40] і часто використовуваних іншими авторами. Результати таких розрахунків представлені в табл. 2.

У проведених розрахунках критичний похил визначався за відомою методикою [63] із формули Шезі

$$i_K = \frac{v_K^2}{C_K^2 R_K}, \quad (6)$$

де  $v_K = q/h_K$  – критична швидкість;  $C_K$  – критичний коефіцієнт Шезі, який визначався за формулою Маннінга  $C_K = R_K^{1/6}/n$  при коефіцієнті шорсткості  $n = 0.008$ ;  $R_K = (bh_K)/(b + 2h_K)$  – гідравлічний радіус;  $b$  – ширина лотка.

Як видно із табл. 2, у всіх використаних дослідках фактичний похил дна  $i_{\text{ф}}$  є більшим від критичного  $i_K$ . Проте, автори робіт [19, 21, 22, 27, 38], обмежуючись у своїх теоретичних дослідженнях лише малими значеннями похилу дна, для порівняння отриманих результатів використовують якісно інші експериментальні дані дослідів із  $i > i_K$ .

## 2. БАЗОВІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ВИКОРИСТОВУВАНІ ДЛЯ ОПИСАННЯ ПРОФІЛЮ ВІЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ ХВИЛЯСТОГО СТИБКА

Характерною рисою рівнянь, що застосовуються для розрахунків обрисів вільної поверхні хвилястого стрибка, є те, що вони використовуються не тільки для цього явища, а й для досить великого класу гідравлічних явищ з хвилястою поверхнею (потік на водозливах практичного профілю та з широким порогом, усамітнена хвиля, кної-дальні хвилі, хвилі переміщення та ін.). Виведення таких рівнянь ґрунтується на базових рівняннях класичної гідравліки – збереження енергії та моменту (кількості руху), нерозривності, рівняннях Ейлера, Бернуллі, Сен-Венана та ін. Для неусталених і усталених в часі течій з хвилястою поверхнею широко використовують нелінійні диференціальні рівняння в частинних похідних Буссінеска, Кортвега-де Фріса, Селезова [64]. Диференціальні рівняння, наведені у п. 2, віднесемо до рівнянь першого типу, тобто таких, які мають похідні першого та вищих порядків.

Серед названих фундаментальних закономірностей виділимо рівняння Кортвега-де Фріса [65], яке вирізняється своєю універсальністю, описує багато різноманітних явищ та процесів різної фізичної природи, відноситься до числа основних рів-

Табл. 2. Порівняння фактичного і критичного похилів дна для частини дослідів, висвітлених в роботах [39, 40]

№ з/п	шифри дослідів	джерело	$b$ , м	$q$ , м <sup>2</sup> /с	$h_1$ , м	$F_1$	$Fr_1$	$i_\Phi$	$\theta_\Phi$ , град.	$i_K$	$\theta_K$ , град.
1	НСУJ8e	[40]	0.25	0.028	0.041	1.077	1.160	0.00410	0.235	0.00266	0.152
2	НСУJ10c	[40]	0.25	0.080	0.084	1.049	1.100	0.00399	0.229	0.00286	0.164
3	НСУJ4b	[40]	0.25	0.119	0.105	1.119	1.252	0.00499	0.286	0.00306	0.176
4	НСУH1b	[40]	0.25	0.0416	0.053	1.088	1.184	0.00370	0.212	0.00269	0.154
5	НСУJ4a	[40]	0.25	0.120	0.109	1.062	1.128	0.00433	0.248	0.00307	0.176
6	fig.8a	[39]	0.80	0.0925	0.0889	1.110	1.232	0.00355	0.203	0.00183	0.105

нянь солітоніки і в загальному випадку для змінної у часі  $t$  деякої величини  $u$  має такий вигляд:

$$u_t - K_1 u u_x - K_2 u u_{xxx} = 0, \quad (7)$$

де  $K_1, K_2$  – деякі коефіцієнти, індекс біля  $u$  означає похідну по цьому параметру.

Для усталеного та неусталеного перманентного (стаціонарного) рухів профіль вільної поверхні відповідно в нерухомій та рухомій системах координат є незмінним, параметр часу  $t$  випадає з аналізу, внаслідок чого згадане рівняння істотно спрощується.

Наведемо найбільш характерні рівняння, що використовуються для побудови профілю хвилястого стрибка та інших гідравлічних явищ в умовах плоскої задачі. Зауважимо, що рівняння, використані у цій роботі, дещо перетворені і записані у прийнятих позначеннях.

1) Розширене рівняння енергії Буссінеска у формі Шансона [47] для прямолінійного дна

$$E = h + \frac{q^2}{2gh^2} + \frac{q^2}{3gh^2} h''. \quad (8)$$

Подібне рівняння отримав також В.М. Андерсен [15] для випадку критичної глибини  $h_K = 1$ .

2) Рівняння енергії Серра [44] для прямолінійного дна

$$E = h + \frac{q^2}{2gh^2} + \frac{q^2}{3gh^2} h'' - \frac{q^2}{6gh^2} h'^2. \quad (9)$$

3) Рівняння моменту (функції імпульсу) Серра [44] для прямолінійного дна

$$M = \frac{h^2}{2} + \frac{q^2}{gh} + \frac{q^2}{3g} h'' - \frac{q^2}{3gh} h'^2. \quad (10)$$

4) Розширене рівняння Бернуллі у формі Хагера і Хуттера [16] для прямолінійного дна

$$E = h + \frac{q^2}{2gh^2} \left( 1 + \frac{2hh'' - h'^2}{3} \right). \quad (11)$$

5) Розширене рівняння Бернуллі у формі Хагера [54] для прямолінійного дна

$$E = h + \frac{q^2}{2gh^2} \exp \left( \frac{2hh'' - h'^2}{3} \right). \quad (12)$$

6) Розширене рівняння Бернуллі типу Буссінеска у формі Хагера і Хуттера [16] для довільного дна

$$E = h + z + \frac{q^2}{2gh^2} \left( 1 + \frac{2hh'' - h'^2}{3} + hz'' - h'z' - z'^2 \right). \quad (13)$$

7) Розширене рівняння Бернуллі типу Буссінеска у формі Хагера [54] для довільного дна

$$E = h + z + \frac{q^2}{2gh^2} \exp \left( \frac{2hh'' - h'^2}{3} + hz'' - h'z' - z'^2 \right). \quad (14)$$

8) Рівняння Кастро-Оргаза, Жіральдеса, Айюзо [66] для перерізу, проведеному через найвищу точку гребеню водозливу

$$E = h + \frac{q^2}{2gh^2} \exp \left( \frac{2hh'' - h'^2}{K+2} - \frac{h'^2}{2K+1} + hz'' \right). \quad (15)$$

9) Рівняння енергії Монтеса і Шансона [31] для прямолінійного дна

$$\frac{E}{h} = \cos \theta + \beta \frac{U^2}{2gh} \left\{ 1 + \frac{2\varepsilon_0}{K+2+2N} \times \left[ 1 + N \left( 2 + \frac{2N}{K+2+N} \right) \right] - \varepsilon_1 \left( \frac{1+N}{3+N} \right) \right\} + O(\varepsilon^2), \quad (16)$$

де

$$\varepsilon_0 = \frac{hh''}{1+h'^2}, \quad \varepsilon_1 = \frac{h'^2}{1+h'^2},$$



причому

$$\varepsilon_0 = \frac{hh''}{1+h'^2}, \quad \varepsilon_1 = \frac{h'^2}{1+h'^2}, \quad \frac{dE}{dx} = S_0 - S_f.$$

10) Рівняння моменту Монтеза і Шансона [31] для прямолінійного дна

$$\frac{M}{h^2} = \frac{\cos \theta}{2} + \beta \frac{U^2}{gh} \left\{ 1 + \varepsilon_0 \left[ \left( \frac{2}{K+N+2} - \frac{1-2N}{K+2+2N} \right) - \varepsilon_1 \left( \frac{N+1}{N+3} \right) \right] \right\} + O(\varepsilon^2), \quad (17)$$

причому

$$\frac{dM}{dx} = h(S_0 - S_f).$$

11) Рівняння Бозе, Дея [67] для прямолінійного дна

$$h''' + \frac{5}{2} \left( \frac{gh \cos \theta}{q^2} - \frac{1}{h^2} \right) h' + \frac{5}{2q^2} \left( \frac{\tau_0}{\rho} - gh \sin \theta \right) = 0. \quad (18)$$

12) Рівняння Штайнрюка, Шнайдера, Грільхольфера [19] для прямолінійного дна

$$H''' + (H-1)H' - \beta H = 0. \quad (19)$$

У наведених залежностях використані такі позначення:  $h$  – довільна глибина,  $H$  – безрозмірне перевищення довільної точки вільної поверхні над поверхнею незбуреного потоку,  $z$  – положення довільної точки дна над площиною порівняння, штрихи над  $h$ ,  $H$  та  $z$  означають похідну зазначеного порядку по розмірній  $x$  та безрозмірній  $X$  поздовжній координаті відповідно,  $\beta$  – параметр, що характеризує зміну амплітуди і довжини хвиль,  $K$  – константа,  $N$  – показник, що залежить від градієнту тиску,  $S_0$  – похил дна,  $S_f$  – похил лінії енергії,  $\tau_0$  – донні дотичні напруження,  $\rho$  – густина рідини,  $\theta$  – кут нахилу дна до горизонту.

### 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПРОФІЛЮ ВІЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ ХВИЛЯСТОГО СТРИБКА

Наведені у п.2 диференціальні рівняння (7) – (19) містять першу, другу і третю похідні функцій  $h(x)$ ,  $H(X)$ ,  $z(x)$ . Через це безпосереднє аналітичне використання цих рівнянь для побудови профілю вільної поверхні потоку викликає серйозні ускладнення. За таких умов при виконанні практичних розрахунків для різних випадків реальних споруд на основі диференціальних рівнянь (7) – (19) часто використовують чисельні методи.

З метою отримання аналітичних розв'язків зазначених рівнянь та спрощення процедури розрахунків обрисів вільної поверхні прагнуть позбутися другої і третьої похідних у цих рівняннях. Наведемо деякі з таких рівнянь стосовно умов плоскої задачі, використовуваних для розрахунків профілю вільної поверхні хвилястого стрибка та інших явищ з хвилястою поверхнею в умовах усталеного чи неусталеного перманентного (стаціонарного) руху у випадку прямолінійного дна із  $z(x)$ ,  $z'(x)$ ,  $z''(x)$  рівними нулю. Диференціальні рівняння, використані у п.3, віднесемо до рівнянь другого типу, тобто таких, що містять лише перші похідні використовуваних функцій, а похідні вищих порядків відсутні.

1) Рівняння Кортевега-де Фріса у формі Бхатнагара [68] у вигляді кубічного поліному для стаціонарного руху

$$h'^2 = \frac{1}{3\delta} (-h^3 + 3Ch^2 + 6Ah + 6B). \quad (20)$$

2) Рівняння Серра, виражене через питому енергію  $E$  для прямолінійного дна [44],

$$h'^2 = \frac{6g}{q^2} \left( -\frac{h^3}{2} + Eh^2 + C_1h + \frac{q^2}{2g} \right). \quad (21)$$

3) Рівняння Серра, виражене через момент (функцію імпульсу)  $M$  для прямолінійного дна [44],

$$h'^2 = \frac{6g}{q^2} \left( -\frac{h^3}{2} + C_2h^2 - Mh + \frac{q^2}{2g} \right). \quad (22)$$

4) Рівняння Сміслова [69]

$$h'^2 = \frac{3g}{q^2} \left( -\frac{2}{3}h^3 + Eh^2 - \frac{q^2}{g} \ln h + C_3 \right). \quad (23)$$

5) Рівняння Андерсена [15], записане для випадку  $h_K = 1$

$$h'^2 = -2h^3 + 3Eh^2 - 3 \ln h + C_4. \quad (24)$$

6) Рівняння Іваса [8]

$$h'^2 = -\frac{g \cos \theta}{\gamma_1 q^2} \left( h^3 - C_5 \frac{q^2}{g \cos \theta} h^2 + \frac{2M}{\cos \theta} h - \frac{\alpha_M q^2}{g \cos \theta} \right). \quad (25)$$

7) Рівняння Бенджаміна-Лайтхілла та Кастро-Оргаза-Шансона [33, 70]

$$h'^2 = \frac{6g}{q^2} \left( -\frac{h^3}{2} + Eh^2 - S_1h + \frac{q^2}{2g} \right), \quad (26)$$

де

$$S_1 = \frac{h_1^2}{2} + \frac{q^2}{gh_1}.$$

8) Рівняння Хагера-Хуттера [16]

$$y'^2 = \frac{3}{f} [-y^3 + (2 + f - f\gamma)y^2 - (1 + 2f - 2f\gamma)y + f]. \quad (27)$$

9) Рівняння Хагера [54]

$$y'^2 = \frac{y_0'^2}{\Phi} y + 3 \left(1 - \frac{y}{\Phi}\right) \ln \frac{f}{2} + 6(y - 1) - 6 \left(2 + \frac{y}{\Phi}\right) \ln y - 3 \left(1 - \frac{y}{\Phi}\right) \ln(\Phi - y), \quad (28)$$

причому у формулах (27), (28):

$$y = \frac{h}{h_0}, \quad y' = \frac{dy}{dX}, \quad X = \frac{x}{h_0}, \quad f = \frac{q^2}{gh_0^3}, \quad \gamma = \frac{h_0'}{3},$$

$$\Phi = \frac{E}{h_0} = 1 + \frac{f}{2} \exp\left(-\frac{y_0'^2}{3}\right),$$

$h_0$  – глибина незбуреного потоку.

10) Рівняння Штайнрюка, Шнайдера, Грільхофера [19]

$$H'^2 = \frac{H}{3} + H^2 + 2RH + 2S, \quad (29)$$

де  $R' = \beta H$ ,  $S' = -\beta H^2$ .

Зауважимо, що в додаток до раніше використуваних позначень у п.3 введені такі позначення:  $A, B, C, \delta$  – деякі коефіцієнти,  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  – константи інтегрування,  $\gamma_1$  та  $\alpha_M$  – поправочні корективи.

#### 4. КОРОТКА ХАРАКТЕРИСТИКА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, НАВЕДЕНИХ У ПУНКТАХ 2 і 3

Детальний аналіз зазначених рівнянь дозволив виявити такі їх особливості та недоліки.

1) Розглядувані залежності відносяться до класу нелінійних диференціальних рівнянь. Для потоків з хвилястою поверхнею в умовах різко та швидко змінних рухів рідини лінеаризація таких рівнянь є досить непростою справою, а використання лінеаризованих рівнянь має суттєві обмеження.

2) Рівняння (7) – (19) містять в собі першу, другу і третю похідні використуваних функцій, що обмежує можливості спроби пошуку їх аналітичних розв'язків, зводячи безпосереднє використання цих рівнянь лише до чисельних методів.

3) Використання залежностей (20) – (29) вимагає встановлення значень питомої енергії  $E$ , функції імпульсу (моменту)  $M$ , коефіцієнтів  $A, B, C, \delta$ ,

$\gamma_1, \alpha_M$ , констант інтегрування  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  та параметру  $\beta$ . Знаходження цих величин здійснюються по-різному для різних явищ у залежності від їх типу, вибраної математичної моделі, способу задання граничних умов тощо. Значення вказаних величин прагнуть знайти для перерізів потоку з плавно змінним рухом і гідростатичним розподілом тиску. Цей прийом є цілком прийнятним для багатьох реальних практичних схем. Проте для явищ, на початковій ділянці яких такого перерізу взагалі не існує (кноїдальні хвилі, хвилястий стрибок з негідростатикою у початковому перерізі та інші), описаний прийом виявляється неприйнятним, а його використання приводить до неточностей та помилок [56].

4) Із рівнянь (20) – (29), які застосовуються для побудови профілю вільної поверхні хвилястого стрибка та інших типів хвилеподібних течій, виділимо рівняння Серра (21), (22), виражені відповідно через питому енергію  $E$  та момент  $M$ . Як показано в роботах [44, 45, 52], ці рівняння при коректному визначенні сталих інтегрування  $C_1, C_2$  є ідентичними, внаслідок чого дають однакові результати. При цьому

$$\frac{dM}{dx} = h \frac{dE}{dx}, \quad (30)$$

яке справедливе як для плавно, так і різко змінних рухів. Враховуючи цю обставину, Ф. Серр назвав формули (21), (22) двома формами однієї закономірності [44].

Для випадку прямолінійного дна з нульовим або невеликим похилом аналітичні розв'язки рівнянь (21), (22) зводяться до відомих формул усамітненої хвилі:

$$h = h_1 + (h_B - h_1) sch^2 \left[ \frac{x}{2} \sqrt{\frac{3g}{q^2} (h_B - h_1)} \right], \quad (31)$$

та кноїдальних хвиль:

$$h = h_1 + (h_B - h_1) cn^2 \left( \frac{x}{\Delta}, k \right), \quad (32)$$

де  $\Delta$  і  $k$  – параметри хвиль.

Характерною особливістю хвиль, описуваних формулами (31) і (32), є симетричний характер профілю вільної поверхні відносно вертикалей, що проходять через вершини цих хвиль (рис. 4). Необхідно підкреслити, що для усталеного руху розв'язки усамітненої і кноїдальних хвиль можна отримати безпосередньо із рівнянь Кортевега-де Фріса (7), (20).

5) До формул Серра (9), (10), (21), (22) можна звести велику частину диференціальних рівнянь,

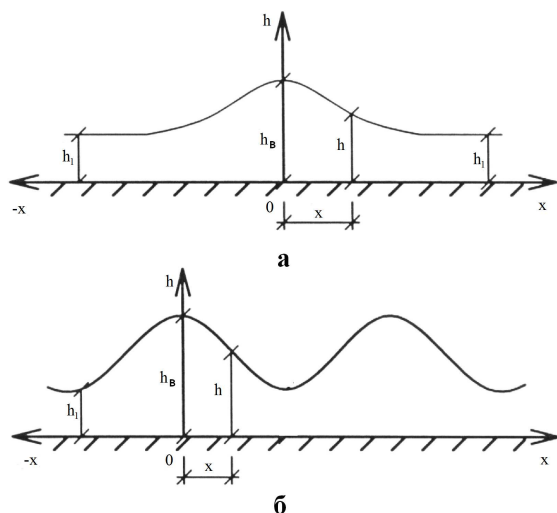


Рис. 4. Типи хвиль, використовуваних для побудови профілю хвилястого стрибка:  
а – усамітнена хвиля, б – кноїдальні хвилі

зазначених у п.п. 2 і 3, хоча вони були виведені авторами із різних вихідних схем. Для цього достатньо дещо спростити розглядувані рівняння, прийнявши необхідні значення розрахункових величин ( $\cos \theta = 1$ ,  $\alpha_M = 1$ ,  $\gamma = 1/3$ ,  $K = 1$ ,  $z = 0$  та ін.). До формули (9) зводяться рівняння (11), (13), до формули (10) – рівняння (17), до формули (21) – рівняння (25), до формули (22) – рівняння (26). Тут доречно підкреслити, що залежності (9), (10), (21), (22) та рівняння, що легко зводяться до них, широко використовуються в численних роботах при розгляді хвилястого стрибка та інших типів хвилеподібних течій [8, 31, 33, 39, 46, 52, 54, 59, 69].

6) Задачу розв'язування диференціальних рівнянь (21), (22) та тих, що зводяться до них, у вигляді розв'язків усамітненої (31) та кноїдальних хвиль (32) не можна вважати доведеною до кінця, адже залежності (31), (32) містять максимальну глибину  $h_B$ , яка априорі є невідомою, а визначення її є однією з основних цілей практичних розрахунків.

7) Геометричні і динамічні характеристики потоку у початковому перерізі розглядуваних явищ з мінімальною глибиною  $h_1$  залишаються нерозкритими. При цьому невиясненим виявляється питання про наявність чи відсутність нахилу і кривизни елементарних струминок (або іншими словами наявність чи відсутність гідростатики) у цьому перерізі.

8) Порівнюючи рівняння (11) і (12), можна ска-

зати наступне. Ці залежності відрізняються між собою лише наявністю експоненціальної функції у формулі (12), причому вони дають близькі результати. Проте перевагу із них необхідно віддати виразу (11). Ця формула, по суті, являє собою формулу Серра (9) і досить повно описує розглядувану задачу. Остання обставина має виняткове значення, адже при теоретичному вивченні поставленої проблеми формула (11) дає можливість отримати точні математичні розв'язки з використанням гіперболічного секанса  $\text{sch}(x)$  та еліптичної функції Якобі амплітуди косинуса  $\text{sn}(z, k)$ , що є неможливим на основі формули (12).

Причина такого положення полягає в наступному. Як відомо [71], експоненціальну функцію можна розкласти в ряд Тейлора:

$$\exp x = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots \quad (33)$$

Аналіз залежностей (11), (12) та (33) показує, що формули (11) і (12) є тотожними при врахуванні у формулі (12) лише перших двох членів ряду Тейлора, тобто за умови

$$\exp x = 1 + x. \quad (34)$$

Використання усіх наступних членів ряду Тейлора у кількісному відношенні мало впливає на остаточні результати. Проте з якісної точки зору таке використання істотно обмежує можливості знаходження аналітичного розв'язку поставленої задачі, зводячи їх лише до застосування чисельних і експериментальних методів.

Все сказане у цьому параграфі відноситься також і до рівнянь (14), (15), які також містять експоненціальну функцію, хоча і мають відповідні аналоги без цієї функції.

9) Рівняння (16) – (19), (27) – (29) передбачають застосування чисельних методів їх розрахунків, хоча для випадків  $E(x) = \text{const}$ ,  $M(x) = \text{const}$  залежності (19), (27) – (29) дають профілі усамітненої і кноїдальних хвиль.

10) Рівняння Буссінеска (8) не враховує нахил елементарних струминок. Оскільки ефект впливу кривизни струминок є набагато сильнішим, ніж дія їх нахилу [9], то цей недолік не сильно впливає на точність розрахунків.

Рівняння Сміслової (23) та Андерсена (24), отримані для схожих вихідних умов і при критичній глибині  $h_K = 1$ , є тотожними. Характерно, що результати розрахунків за цими формулами є дуже близькими до результатів за формулою Серра (21). Внаслідок того, що залежності (23),

(24) отримані на основі диференціального рівняння Буссінеска (8), в якому зневажається впливом нахилу елементарних струминок, ця обставина в певній мірі негативно впливає на точність цих залежностей. Крім того, формули (23), (24) містять член з натуральним логарифмом, що створює певні незручності для аналітичного використання цих формул. Враховуючи ці обставини, із трьох порівнюваних рівнянь (21), (23), (24) перевагу можна віддати формулі Серра (21).

11) Особливе місце серед рівнянь, що описують профіль вільної поверхні хвилястого стрибка та інших типів хвилеподібних течій займають рівняння, отримані на основі досить перспективного методу асимптотичного аналізу множинних масштабів, використаного в роботах [19, 21, 27, 38]. Базовим серед них є рівняння (19), яке виведено для потоків із сильно розвинутою турбулентністю за умов дуже малих значень кута  $\theta$  нахилу дна до горизонту та великих чисел Рейнольдса. При цьому використовується  $k - \epsilon$  модель турбулентності та модель рейнольдсових напружень у турбулентному потоці. Звичайно це рівняння розв'язують чисельними методами, хоча для окремих випадків отримані аналітичні розв'язки усамітненої хвилі, кноїдальних хвиль, а також окремих параметрів хвилястого стрибка.

Характерною особливістю профілю вільної поверхні хвилястого стрибка, отриманого в роботах [19, 21, 27, 38] на основі диференціальних рівнянь типу (19), є те, що глибини під вершинами хвиль досить інтенсивно збільшуються в напрямку руху потоку (рис. 5, запозичений з роботи [21]). При цьому для теоретичної схеми із  $x \rightarrow \infty$  ніякі обмеження (ні по максимальній глибині, ні по кількості хвиль, ні по довжині стрибка) не вводяться. Порівняння рис. 3, в та 5 показує, що теоретичне описання процесу зростання глибин під вершинами та піддошвами хвиль вздовж потоку в якісному відношенні не відповідає реальним даним. Характерно, що теоретичні значення глибин під піддошвами четвертої і наступних хвиль стрибка на рис. 5 перевищують максимальну глибину під вершиною першої хвилі.

Незважаючи на це, методика побудови профілю вільної поверхні хвилястого стрибка, висвітлену в роботах [19, 21, 27, 38], можна використовувати у першому наближенні при похилах дна і  $> i_K$ . При цьому розроблена методика потребує певного вдосконалення для врахування реальної інтенсивності затухання хвиль, визначення можливостей використання при похилах  $i < i_K$  та введення відповідних обмежень стосовно її застосування.

12) Побудова профілю вільної поверхні хвиля-

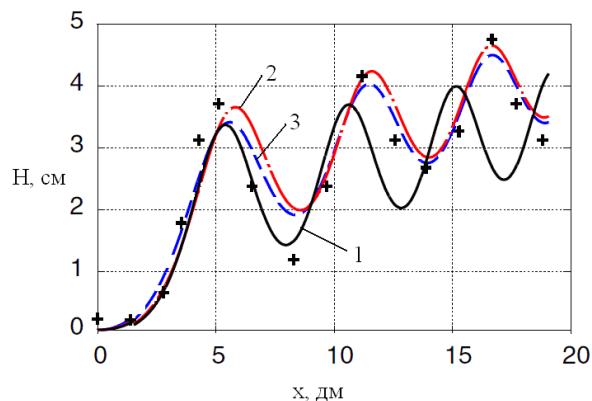


Рис. 5. Порівняння розрахункових профілів хвилястого стрибка за формулою (19) з експериментальними даними: 1 – чисельний розв'язок, 2 – розв'язок за програмою FLUENT на основі  $k - \epsilon$  моделі турбулентності, 3 – розв'язок за програмою FLUENT на основі моделі рейнольдсових напружень, + – експериментальні точки [39] для дослідів з  $q = 0.0925 \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $h_1 = 0.0889 \text{ м}$ ,  $\text{Re} = 98700$ ,  $\text{Fr}_1 = 1.232$ ,  $\beta = 0.0563$

стого стрибка на основі диференціальних рівнянь, наведених у п.п. 2 і 3, здійснюється аналітичними і чисельними методами.

Аналітичні методи найчастіше ґрунтуються на використанні розв'язків рівнянь Серра (21), (22) у вигляді усамітненої (31) та кноїдальних хвиль (32). При цьому отримують так званий "перервний" профіль стрибка, коли на різних ділянках розглядуваного явища використовують різні рівняння. Для побудови профілю хвилястого стрибка (рис. 1) "склеювання" розв'язків (31) і (32) здійснюють або в перерізі по вершині першої хвилі (точка А), або в перерізі, що проходить через точку перегину кривої вільної поверхні, розташовану за цією вершиною (точка Б). Звичайно вважається, що розподіл тиску у перерізі, проведеному через точку Б, є близьким до гідростатичного закону, а глибина  $h_2$  у цьому перерізі є другою спряженою глибиною хвилястого стрибка. У випадку наявності гідростатики у його початковому перерізі цю глибину (як і для досконалого стрибка) можна знайти за формулою Беланже

$$h_2 = \frac{h_1}{2} \left( \sqrt{1 + 8\text{Fr}_1} - 1 \right). \quad (35)$$

Якщо згадане "склеювання" здійснюється у перерізі по вершині першої хвилі стрибка з глибиною  $h_B$  [13, 30, 62], то ця глибина є спільною як для усамітненої, так і кноїдальних хвиль. Для ідеального випадку відсутності втрат енергії по довжині потоку, тобто за умови  $E(x) = \text{const}$ ,  $M(x) = \text{const}$  гли-

бина  $h_B$  є однаковою для всіх вершин хвиль розрахункового профілю хвилястого стрибка, а профілі хвиль є симетричними відносно вертикалей, що проходять через їх вершини.

Якщо "склеювання" розв'язків усамітненої і кноїдальних хвиль здійснюється у перерізі, що проходить через точку Б [13, 16, 30], то спільною для обох явищ є друга спряжена глибина  $h_2$  хвилястого стрибка. При цьому використовують різні методи розрахунків. В роботах [13, 30] після точки Б приймають не кноїдальні, а прості гармонічні хвилі мілкої води.

13) Існуючі методики розрахунків хвилястого стрибка, які основані на концепції  $E(x) = \text{const}$ ,  $M(x) = \text{const}$  мають обмежений діапазон умов застосування, характеризуються достатньою точністю лише в області відносно невеликих чисел Фруда (дещо більших одиниці), а при відносно великих значеннях  $Fr_1$  дають значні похибки. За таких умов досить перспективним напрямком розвитку теорії хвилястого стрибка є врахування в розрахунках втрат енергії, які відбуваються в межах стрибка внаслідок дії різних факторів – тертя на дні, вплив придонного пограничного шару, дисипація енергії в турбулентному потоці, утворення водоворотів, вплив просторових ефектів тощо. Наявність таких втрат у реальному потоці істотно впливає на профіль вільної поверхні та інші характеристики стрибка.

Проте реалізація ідеї врахування втрат енергії у хвилястому стрибку виявляється непростю справою. Безпосереднє аналітичне використання для цього диференціальних рівнянь першого типу (див. п. 2) у сукупності із залежностями, що описують ці втрати, ускладнюється наявністю у розглядуваних рівняннях першої, другої і третьої похідних функцій  $h(x)$ ,  $H(X)$ ,  $z(x)$ . Внаслідок цього таку задачу доводиться розв'язувати чисельними методами [21]. Прагнення позбутися в рівняннях першого типу другої і третьої похідних використовуваних функцій вимагає здійснення інтегрування цих рівнянь, яке відбувається при  $E(x) = \text{const}$ ,  $M(x) = \text{const}$ .

Враховуючи цю обставину, задачу врахування втрат енергії розв'язують у два етапи. На першому етапі приймають  $E(x) = \text{const}$ ,  $M(x) = \text{const}$  і здійснюють перехід від рівнянь першого типу до відповідних рівнянь другого типу. На другому етапі в розрахунки вводять залежності, що описують втрати енергії. При цьому для описання втрат енергії у хвилястому стрибку використовують різноманітні залежності.

В роботах [13, 15, 16, 31, 70] ці втрати знаходять за відомою формулою для досконалого гідравлі-

чного стрибка:

$$\Delta E = \frac{(h_2 - h_1)^3}{4h_1 h_2}, \quad (36)$$

де  $h_1$ ,  $h_2$  – перша і друга спряжені глибини.

Разом з цим, використання формули (36) різні автори здійснюють різними способами. А.А. Турсунов [13] прирівнює втрати енергії, підраховані за формулою (36), до питомої енергії, що переноситься хвилями.

В. Хагер і К.Хуттер [16] втрати, визначені за формулою (36), концентрують лише на ділянці між початковим перерізом стрибка і перерізом, проведеним через точку Б перегину кривої вільної поверхні. За таким способом розрахунковий профіль хвилястого стрибка є перервним – на ділянці від початкового перерізу до точки Б використовується рівняння усамітненої хвилі, а після точки Б – кноїдальних хвиль. Внаслідок того, що енергія в межах кноїдальних хвиль є меншою від початкової на величину  $\Delta E$ , глибини під вершинами кноїдальних хвиль (рівні між собою) є меншими, ніж під вершиною усамітненої хвилі. Але при цьому всі хвилі мають симетричний профіль відносно вертикалей, що проходять через їхні вершини.

В.М. Андерсен [15] відносить втрати енергії  $\Delta E$  до всієї довжини хвилястого стрибка від  $x_0$  до  $x_\infty$ . При цьому профіль вільної поверхні, який визначається рівнянням (24), є неперервним, а хвилі – асиметричними.

Автори робіт [31, 33, 59, 67] втрати енергії у хвилястому стрибку враховують на основі формул

$$\frac{dE}{dx} = S_0 - S_f, \quad (37)$$

$$\frac{dM}{dx} = h(S_0 - S_f). \quad (38)$$

При цьому значення похилу  $S_f$ , обумовленого силами тертя, визначають за допомогою формул Дарсі-Вейсбаха [33, 59], Маннінга [67], Маннінга-Штріклера [46]. Зауважимо, що згадані формули отримані для випадку рівномірного потоку, хоча роботи [43, 72] свідчать про наявність у хвилястому стрибку особливого хвилястого опору.

У статтях [19, 21, 27, 38] втрати енергії у хвилястому стрибку враховують як для потоків із сильно розвиненою турбулентністю через вплив пограничного шару, коефіцієнт  $\varepsilon$ , що характеризує рівень дисипації енергії, та інші характеристики турбулентних потоків.

Розв'язок використовуваних рівнянь з врахуванням втрат енергії в роботах [19, 21, 22, 27, 33, 38, 59] здійснюють чисельними методами. При цьому

профіль вільної поверхні хвилястого стрибка є неперервним із зростанням глибин під вершинами і підшвами хвиль у напрямі руху потоку, а профілі хвиль є асиметричними відносно вертикалей, що проходять через їхні вершини. Характерно, що інтенсивність зростання глибин під вершинами і підшвами хвиль вздовж потоку в цих роботах є набагато більшою, ніж в розрахунках В.М. Андерсена [15].

## 5. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ХВИЛЕПОДІБНИХ БІЛЯКРИТИЧНИХ ТЕЧІЙ З ВРАХУВАННЯМ МОЖЛИВОЇ НЕГІДРОСТАТИКИ У ЇХ ПОЧАТКОВОМУ ПЕРЕРІЗІ

### 5.1. Розрахункова схема

Необхідність розробки коректного методу описання білякритичних течій та хвилястого стрибка, який відноситься до цього класу гідравлічних явищ, а також потреба усунення вищезазначених недоліків вимагають застосування принципово нових підходів для вирішення поставлених задач. При цьому побудову математичної моделі необхідно здійснювати з позицій, загальних для всіх явищ розглядуваного класу.

За початковий переріз білякритичних течій рідини приймається переріз з мінімальною глибиною, за яким починається різке збільшення глибини, і в якому дотичні до кривої вільної поверхні та п'єзометричної лінії займають горизонтальне положення. Таке визначення допускає наявність у розглядуваному перерізі як негідростатичного, так і гідростатичного (коли обидві дотичні зливаються в одну лінію) розподілу тиску по глибині. Початкова глибина  $h_1$  називається також першою спряженою глибиною білякритичних течій.

У випадку формування хвилястого стрибка на ділянці бурхливого потоку значної довжини з кривою підпору типу  $C_1$  (чи  $C_0$ ) дотична до кривої вільної поверхні у початковому перерізі стрибка не є горизонтальною, а похідна  $h' > 0$ . Враховуючи невеликі абсолютні значення похилу  $h'$  на цій ділянці, а також той факт, що вплив нахилу кривої вільної поверхні є набагато меншим, ніж вплив її кривизни, при розгляді хвилястого стрибка впливом першої похідної  $h'$  у його початковому перерізі в більшості випадків можна нехтувати.

У запропонованій теорії білякритичних течій рідини концептуально новою є ідея врахування у явному вигляді можливих нахилу і кривизни елементарних струминок (або іншими словами можливо-го відхилення від гідростатичного закону розподілу тиску по глибині) у початковому перерізі до-

сліджуваних течій, про що говорилося у п. 1. Пропонований спосіб врахування вказаного фактора ґрунтується на використанні пов'язаних між собою таких коефіцієнтів – негідростатичності  $s_1$ , гідродинамічного тиску  $t_1$  та потенціальної енергії  $\beta_1$ . Індекс "1" тут означає, що ці коефіцієнти відносяться до початкового перерізу розглядуваних явищ.

Для загального випадку довільного перерізу хвилеподібного потоку зазначені коефіцієнти визначаються такими співвідношеннями:

$$s = \frac{h_{п.д.}}{h}, \quad t = \frac{F_{е.г.д.т.}}{F_{е.г.с.т.}}, \quad \beta = \frac{E_{пот.}}{h}, \quad (39)$$

де  $h_{п.д.}$  – п'єзометричний тиск на дні, виражений у висоті водяного стовпа;  $F_{е.г.д.т.}$  та  $F_{е.г.с.т.}$  – площі епюр гідродинамічного та гідростатичного тиску відповідно;  $E_{пот.}$  – питома потенціальна енергія,  $h$  – глибина потоку.

У випадку наявності параболічного закону розподілу гідродинамічного тиску по глибині, що характерний для перерізів потоку, проведених через вершини та підшви хвиль [9, 42, 51], зазначені коефіцієнти пов'язані між собою такими залежностями [9, 25]:

$$\beta = \frac{1+2s}{3}; \quad t = \frac{4s-1}{3}; \quad \beta = \frac{1+t}{2}, \quad (40)$$

причому для гідростатичного розподілу тиску коефіцієнти  $s$ ,  $t$ ,  $\beta$  дорівнюють одиниці.

Позитивною рисою описаного способу врахування можливої негідростатичності у початковому перерізі білякритичних течій є простота експериментального визначення коефіцієнта  $s_1$  (а відповідно і знаходження коефіцієнтів  $t_1$ ,  $\beta_1$ ) шляхом вимірювання лише двох величин – донного п'єзометричного тиску  $h_{п.д.1}$  та глибини потоку  $h_1$  у зазначеному перерізі.

Розрахункова схема розглядуваних явищ представлена на рис. 6. Дно вважається гладким, прямолінійним (без виступів чи уступів), а його похил  $0 < i < i_K$ .

Вісь  $Ox$  проходить по дну і направлена за течією, а вісь  $Oy$ , у відповідності з існуючими теоретичними схемами, проходить через вершину першої хвилі. У випадку гідростатичного розподілу тиску в початковому перерізі (переріз 0–0) нахил і кривизна кривої вільної поверхні відсутні, тобто  $h'$  та  $h''$  дорівнюють нулю, а у випадку негідростатичності (переріз 1–1) – нахил кривої вільної поверхні відсутній, а її кривизна є додатною, тобто  $h' = 0$ , а  $h'' > 0$ .

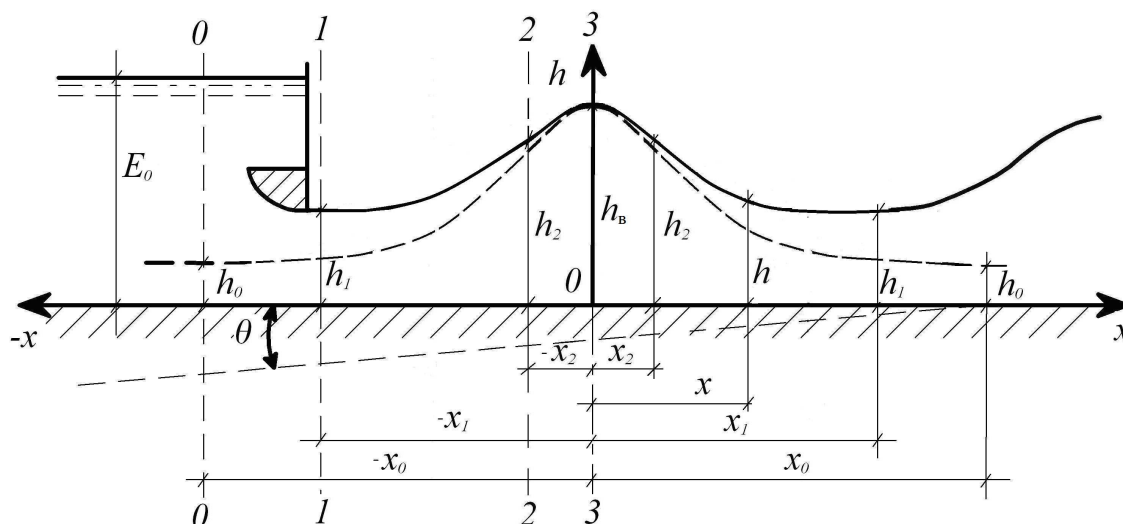


Рис. 6. Розрахункова схема хвилеподібних білякритичних течій

## 5.2. Математичне описання задачі

Побудована у відповідності до вищезазначених вимог математична модель хвилеподібних білякритичних течій ґрунтується на відомих залежностях Серра [44] для питомої енергії  $E$  та моменту  $M$ , які враховують нахил і кривизну елементарних струминок відповідно через першу  $h'$  та другу  $h''$  похідні функції  $h(x)$  кривої вільної поверхні.

Математична постановка проблеми може бути сформульована або через енергію  $E$ :

$$\left. \begin{aligned} E &= h + \frac{q^2}{2gh^2} + \frac{q^2 h''}{3gh} - \frac{q^2 h'^2}{6gh^2}, \\ \frac{dE}{dx} &= i - i_f, \\ \frac{dq}{dx} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

або через момент  $M$ :

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{h^2}{2} + \frac{q^2}{gh} + \frac{q^2 h''}{3g} - \frac{q^2 h'^2}{3gh}, \\ \frac{dM}{dx} &= h(i - i_f), \\ \frac{dq}{dx} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

У цих залежностях  $i$  – похил дна;  $i_f$  – похил лінії енергії, обумовлений силами тертя.

## 5.3. Граничні умови

Для характерних перерізів розглядуваних явищ при вибраному положенні координатних осей гра-

ничні умови можна виразити таким чином

$$\left. \begin{aligned} \text{переріз } 0-0: x &= -x_0 = -\infty, h = h_0, \\ &h' = 0, h'' = 0, E = E_0, M = M_0; \\ \text{переріз } 1-1: x &= -x_1, h = h_1, h' = 0, \\ &h'' > 0, E = E_1, M = M_1; \\ \text{переріз } 2-2: x &= -x_2, h = h_2, h' > 0, \\ &h'' = 0, E = E_2, M = M_2; \\ \text{переріз } 3-3: x &= 0, h = h_B, h' = 0, \\ &h'' < 0, E = E_B, M = M_B. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Індекси “0”, “1”, “2”, “B” в цих виразах і далі означають, що використані величини взяті відповідно у перерізах 0-0, 1-1, 2-2, 3-3.

## 6. УЗАГАЛЬНЕНЕ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПРОФІЛЮ ВІЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ БІЛЯКРИТИЧНИХ ТЕЧІЙ ТА ЙОГО РОЗВ'ЯЗКИ

### 6.1. Пропонований спосіб визначення енергії, моменту та сталих інтегрування

Процедура розв'язування систем диференціальних рівнянь (41), (42) висвітлена в роботах [44, 52, 69] і після інтегрування при  $E(x) = \text{const}$ ,  $M(x) = \text{const}$  приводить до необхідності використання залежностей (21), (22) відповідно. Подальше застосування цих залежностей вимагає знаходження значень  $E$ ,  $M$  та констант інтегрування  $C_1, C_2$ .

З метою розв'язування цієї задачі автори прагнуть для різних схем споруд використати переріз потоку із плавно змінним рухом, в якому розподіл тиску підпорядковується гідростатичному закону,

а похідні  $h'$  та  $h''$  дорівнюють нулю [15, 44, 59, 69, 70]. При цьому залежності (11), (12) зводяться до відомих формул

$$E = h + \frac{q^2}{2gh^2}, \quad (44)$$

$$M = \frac{h^2}{2} + \frac{q^2}{gh}. \quad (45)$$

Враховуючи відсутність такого перерізу в межах значної довжини окремих типів розглядуваних явищ (див. п. 1), в роботі [45] запропоновано знаходити значення  $E$  та  $M$  для початкового перерізу білякритичних течій в умовах можливої негідростатики за такими формулами:

$$E = E_1 = \beta_1 h_1 + \frac{q^2}{2gh_1^2}, \quad (46)$$

$$M = M_1 = t_1 \frac{h_1^2}{2} + \frac{q^2}{gh_1}. \quad (47)$$

При цьому константи інтегрування  $C_1$  та  $C_2$  визначаються такими залежностями:

$$C_1 = \left(\frac{1}{2} - \beta_1\right) h_1^2 - \frac{q^2}{gh_1}, \quad (48)$$

$$C_2 = (1 + t_1) \frac{h_1}{2} + \frac{q^2}{2gh_1^2}. \quad (49)$$

### 6.2. Узагальнене диференціальне рівняння профілю вільної поверхні

В результаті розгляду систем (41), (42) для граничних умов (43) з використанням залежностей (40), (46) – (49) в роботі [45] виведено наступне узагальнене диференціальне рівняння профілю вільної поверхні хвилеподібних білякритичних течій

$$h'^2 = \frac{3g}{q^2} \left\{ -h^3 + \left( 2\beta_1 h_1 + \frac{q^2}{gh_1^2} \right) h^2 - \left[ (2\beta_1 - 1) h_1^2 + \frac{2q^2}{gh_1} \right] h + \frac{q^2}{g} \right\}. \quad (50)$$

Необхідно підкреслити, що розв'язування обох систем (41), (42) приводить до однієї і тієї ж залежності (50). В цьому немає нічого особливого, адже розглядувані системи ґрунтуються на використанні диференціальних рівнянь Серра (11), (12), які дають тотожні результати (див. п. 4).

Домноживши і поділивши праву частину рівняння (50) на  $h_1^3$ , отримаємо його у безрозмірній формі:

$$h'^2 = \frac{3}{Fr_1} \left[ -\eta^3 + (2\beta_1 + Fr_1) \eta^2 - (2\beta_1 - 1 + 2Fr_1) \eta + Fr_1 \right], \quad (51)$$

де  $\eta = h/h_1$ .

### 6.3. Загальний розв'язок диференціального рівняння (51)

У роботі [45] здійснено інтегрування диференціального рівняння (51) та отримано його загальний розв'язок у вигляді наступної системи:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= 1 + (\eta_B - 1) cn^2 \left( \frac{x}{\Delta}, k \right), \\ \Delta &= 2h_1 \sqrt{\frac{\eta_B Fr_1}{3(\eta_B^2 - Fr_1)}}, \\ k &= \sqrt{\frac{\eta_B(\eta_B - 1)}{\eta_B^2 - Fr_1}}, \\ \eta_B &= \frac{1}{2} \left[ t_1 + Fr_1 + \sqrt{(t_1 + Fr_1)^2 - 4Fr_1} \right], \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

де  $\eta_B = h_B/h_1$ .

Цей розв'язок відповідає положенню координатних осей, показаному на рис. 6, описує кноїдальні хвилі і дійсний для таких умов:

$$\left. \begin{aligned} Fr_1 &\leq 1, \\ s_1 &\geq 1. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

При цьому максимальна глибина  $h_B$  хвилеподібних білякритичних течій рідини визначається такою формулою (у системі (52) це остання залежність):

$$\eta_B = \frac{1}{2} \left[ t_1 + Fr_1 + \sqrt{(t_1 + Fr_1)^2 - 4Fr_1} \right]. \quad (54)$$

Для умов поставленої задачі в роботі [25] виведено таке рівняння спряжених глибин білякритичних течій:

$$\eta_2 = \frac{h_2}{h_1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{t_1 + 2Fr_1} \times \cos \left\{ \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos \left[ \frac{3\sqrt{3}\alpha_{02} Fr_1}{\sqrt{(t_1 + 2Fr_1)^3}} \right] \right\}, \quad (55)$$

де  $\alpha_{02}$  – коефіцієнт кількості руху в перерізі з другою спряженою глибиною  $h_2$ . Рівняння (7) є загальним для всіх явищ розглядуваного класу, вільна поверхня яких може бути як хвилястою, так і вальцеподібною, причому воно дійсне при виконанні умов (53).

### 6.4. Частинні розв'язки диференціального рівняння

У випадку гідростатичного розподілу тиску в початковому перерізі досліджуваних явищ, коли коефіцієнти  $s_1 = t_1 = \beta_1 = 1$ , диференціальне рівняння (51) істотно спрощується і приймає наступний вигляд:

$$h'^2 = \frac{3}{Fr_1} (\eta - 1)^2 (Fr_1 - \eta), \quad (56)$$



а його розв'язок зводиться до відомої залежності (31) усамітненої хвилі.

Необхідно підкреслити, що проведений в роботі [45] аналіз показав, що умова  $s_1 = 1.0$ , використана у рівнянні (56), вимагає обов'язкового виконання додаткової умови  $Fr_1 > 1$ , тобто фізична реалізація розв'язку усамітненої хвилі можлива лише при

$$\left. \begin{array}{l} s_1 = 1.0, \\ Fr_1 > 1.0. \end{array} \right\} \quad (57)$$

Загальна формула (54) для визначення максимальної глибини  $h_B$  хвилеподібних білякритичних течій у випадку гідростатики в їх початковому перерізі зводиться до відомої формули Рассела – Буссінеска для усамітненої хвилі:

$$\eta_B = Fr_1. \quad (58)$$

Для явищ, у початковому перерізі яких виконуються умови (57) (досконалий і хвилястий гідравлічні стрибки, усамітнена хвиля та ін.), при коефіцієнті кількості руху  $\alpha_{02} = 1.0$  загальне рівняння спряжених глибин (7) зводиться до формули Беланже (35).

## 7. ПОРІВНЯННЯ ТЕОРЕТИЧНИХ І ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ПРОФІЛІВ ВІЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ ХВИЛЯСТОГО СТРИБКА

Виведене диференціальне рівняння (51) та його загальний розв'язок у вигляді системи (6) дозволяють аналітичним методом без залучення додаткових умов та емпіричних коефіцієнтів розраховувати обриси кривої вільної поверхні різних типів хвилеподібних білякритичних течій, в тому числі і хвилястого стрибка. Порівняння експериментальних і теоретичних профілів одиночної хвилі, гідродинамічного солітону та кноїдальних хвиль дало прийнятні результати [32], що свідчить про принципову правильність побудованої математичної моделі та виведених на її основі теоретичних залежностей. В межах цієї роботи розглядається питання про можливість застосування розробленої методики для розрахунків профілю вільної поверхні хвилястого стрибка. На даному етапі таке порівняння виконано лише для досить вузького діапазону дуже малих чисел Фруда, в якому фактичні втрати енергії у реальному потоці є невеликими, завдяки чому пропонується математична модель, побудована при  $E(h) = \text{const}$ ,  $M(h) = \text{const}$ , у повній мірі відповідає фізиці розглядуваного явища. Подібний підхід до проблеми використано також у роботі [73].

На рис. 7 для трьох дослідів здійснено порівняння експериментальних профілів хвилястого стрибка, отриманих у роботах [25, 40], з результатами теоретичних розрахунків за методами Хагера-Хуттера [16], ВНДПГ - Всеросійського науково-дослідного інституту гідротехніки [30] та пропонуваною, що ґрунтується на використанні системи рівнянь [52]. При цьому хвилястий стрибок розглядається як сукупність усамітненої (або одиночної з негідростатикою в початковому перерізі) і кноїдальних хвиль, а склеювання цих розв'язків здійснюється в перерізі по вершині першої хвилі стрибка. Суміщення порівнюваних профілів, розрахованих за різними методами, проведено також у вказаному перерізі.

Аналіз отриманої інформації про профіль вільної поверхні хвилястого стрибка в розглядуваній області малих чисел Фруда  $Fr_1$  дозволив установити наступне. Результати розрахунків за методами Хагера-Хуттера, ВНДПГ, а також автора при коефіцієнті негідростатичності  $s_1 = 1.0$  виявляються досить близькими між собою. У випадку наявності негідростатики у початковому перерізі хвилястого стрибка (рис. 7, в) методи Хагера-Хуттера та ВНДПГ, що не враховують цей фактор, дають якісно неприйнятні результати.

Розрахунки профілю вільної поверхні хвилястого стрибка для дослідів, показаному на рис. 7, в, за пропонуваним методом, що враховує наявність негідростатики у зазначеному перерізі, дають задовільну збіжність з експериментальними даними. Деяке розходження порівнюваних результатів можна пояснити впливом невеликого поверхневого вальця на гребені першої хвилі стрибка, хоча в теоретичній схемі вільна поверхня потоку вважається гладкою. При цьому пропонуваний метод ґрунтується на системі рівнянь (6) і для випадку негідростатики у початковому перерізі стрибка передбачає склеювання розв'язків одиночної хвилі (з негідростатикою в її початковому перерізі) з кноїдальними хвилями. Якщо допустити можливість наявності негідростатики в початковому перерізі хвилястого стрибка в дослідів Шансона, показаних на рис. 7, а, б (в яких відхилення від гідростатики взагалі не досліджувалося), і зробити розрахунки за пропонуваним методом, то теоретичні результати найкраще відповідатимуть експериментальним даним відповідно при значеннях  $s_1 = 1.025$  та  $s_1 = 1.035$ .

## ВИСНОВКИ

1. Виявлені недоліки існуючих уявлень про хвилястий стрибок, а також диференціальних рів-

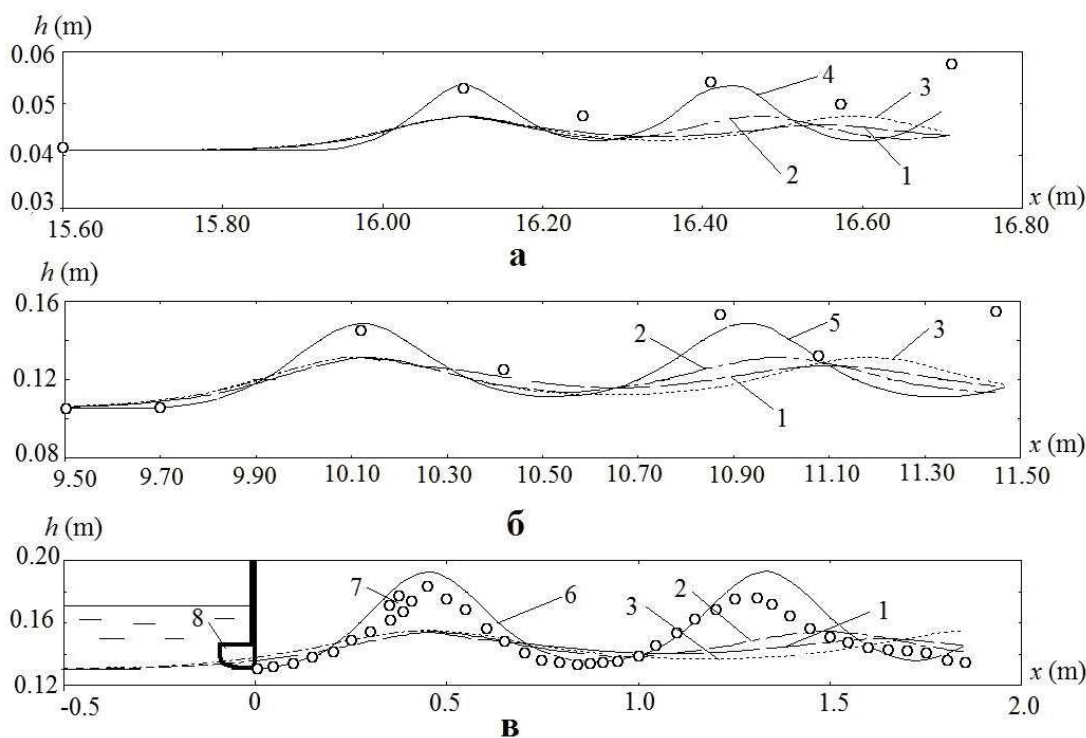


Рис. 7. Профілі вільної поверхні хвилястого стрибка:

а – дослід HCUJ8e [40] –  $q=0.028\text{м}^2/\text{с}$ ,  $Fr_1=1.17$ ,  $s_1=1.000$ ; б – дослід HCUJ4b [40] –  $q=0.119\text{м}^2/\text{с}$ ,  $Fr_1=1.25$ ,  $s_1=1.000$ ; в – дослід №16 [25] –  $q=0.162\text{м}^2/\text{с}$ ,  $Fr_1=1.20$ ,  $s_1=1.070$ ; 1 – 6 – теоретичні профілі; 1 – Хагера-Хуттера [16], 2 – ВНДІГ [30]; 3 – 6 – автора за системою (52), 3 –  $s_1=1.000$ , 4 –  $s_1=1.025$ , 5 –  $s_1=1.035$ , 6 –  $s_1=1.070$ , 7 – поверхневий валець, 8 – затвор,  $\circ$  – експериментальні точки

нянь, використовуваних для розрахунків профілю його вільної поверхні, обмежують можливості щодо коректного описання цього явища.

2. Запропонований метод врахування у явному вигляді (через коефіцієнти  $s_1$ ,  $t_1$ ,  $\beta_1$ ) можливих нахилу і кривизни елементарних струминок, а відповідно і відхилення від гідростатики у початковому перерізі білякритичних течій, є концептуально новим і дозволяє в значній мірі усунути вищезазначені недоліки.

3. Побудована математична модель та отримані на її основі узагальнене диференціальне рівняння профілю вільної поверхні (51), його загальний розв'язок (6) у вигляді кноїдальних хвиль, частинний розв'язок (31) у вигляді усамітненої хвилі, а також залежності (54), (7), (58), (35), що описують максимальну  $h_B$  та другу спряжену  $h_2$  глибини, достатньо повно враховують всі визначальні фактори, дозволяють коректно описати розглядувані явища та надійно визначити їх основні характеристики.

4. Порівняння теоретичних профілів вільної поверхні хвилястого стрибка, побудованих за пропо-

нованим методом, з результатами розрахунків за методами Хагера і Хуттера та ВНДІГ, а також експериментальними даними показало, що для випадку негідростатики у початковому перерізі стрибка теоретичні залежності Хагера і Хуттера та ВНДІГ, які не враховують цей фактор, дають незадовільні результати.

5. Співставлення результатів розрахунків теоретичного профілю хвилястого стрибка за запропонованим методом з експериментальними даними для випадку негідростатики в початковому перерізі стрибка показало їх задовільну збіжність у використаному діапазоні визначальних характеристик, що свідчать про принципову правильність побудованої математичної моделі.

6. Висвітлені в роботах [19, 21, 22, 27, 33, 38, 59] досить перспективні методи розрахунків профілю вільної поверхні, у яких враховуються втрати енергії у хвилястому стрибку, внаслідок чого розрахункові профілі характеризуються істотним збільшенням глибин під вершинами та відповідно під підшвами хвиль у напрямку руху потоку рідини, можна використовувати у першому наближен-

ні для випадків великих похилів дна  $i > i_K$ . Зазначені методи потребують відповідних уточнень щодо врахування інтенсивності затухання хвиль та можливості застосування цих методів для горизонтальних і слабо нахилених каналів із  $i < i_K$ .

1. Darcy H., Bazin H. Hydraulic research. Imprimerie imperiale.– Parts 1 and 2: Paris, 1865.– 104 p.
2. Vxss P. Berechnung der Wasserspiegellage // Forschungsarbeiten.– Heft 284, NW7: Berlin, 1927.– 96 s.
3. Бахметев Б.А. О неравномерном движении жидкости в открытом русле.– Л.: КУБУЧ, 1928.– 275 с.
4. Сухомел Г.Й. Гідравліка.– Х. - К.: Держсільгоспвидав, 1933.– 280 с.
5. Eisner F. Gerinne. Handbuch d.– Experimentalphysik: T.IV, 1932.– 89 p.
6. Павловский Н.Н. Гидравлический справочник.– М. - Л.: ОНТИ, 1937.– 890 с.
7. Краснитський М.С. Хвилястий стрибок // Прикладна механіка. Відділ технічних наук АН УРСР.– 1955.– т.1, в.2.– С. 235–238.
8. Iwasa Y. Undular jump and its limiting Condition for existence // Proc. 5th Japan National Congress for Applied Mechanics.– Токуо.– 1955.– P. 315–319.
9. Смыслов В.В. Теория водослива с широким порогом.– К.: Изд-во АН УССР, 1956.– 184 с.
10. Jones L.E. Some observations on the undular jump // Proc. ASCE, HD. , НУЗ.– 1964.– Vol.90.– P. 69–82.
11. Руссо Г.А. Основные характеристики гидравлического прыжка-волны // Гидротехническое строительство.– 1967.– №1.– С. 31–33.
12. Holtorff G. Eine exakte Theorie stationarer und fortschreitender wirbelfreier Schwerewellen // Die Wasserwirtschaft.– 1966.– №11.– P. 349–356.
13. Турсунов А.А. Околокритическое состояние безнапорных потоков воды // Изв. ВНИИГ.– 1969.– Т.90.– С. 201–224.
14. Вереземский В.Г. Косой прыжок и критическая глубина открытого потока // Труды координационных совещаний по гидротехнике.– 1969.– вып.52.– С. 46–57.
15. Andersen V.M. Undular Hydraulic Jump // Journal of the Hydraulics Division. ASCE.– 1978.– Vol.104, № HX8.– P. 1185–1188.
16. Hager W.H., Hutter K. On pseudo-uniform flow in open channel hydraulics // Acta Mechanica.– 1984.– Vol.53, № 3-4.– P. 183–200.
17. Chanson H., Montes J.S. Characteristics of undular hydraulic jumps. Experimental apparatus and flow patterns // Journal of Hydraulic Engineering, ASCE.– 1995.– Vol.121, №2.– P. 129–144.
18. Ohtsu I., Yasuda Y., Gotoh H. Hydraulic condition for undular jump formation // Journal of Hydraulic Research, IAHR.– 2001.– Vol.39, №2.– P. 203–209.
19. Steinryck H., Schneider W., Grillhofer W. A multiple scales analysis of the undular hydraulic jump in turbulent open channel flow // Fluid Dynamics Research.– 2003.– 1.– P. 41–45.
20. Lennon, J.M., Hill, D.F. Particle image velocity measurements of undular and hydraulic jumps // Journal of Hydraulic Engineering. ASCE.– 2006.– December.– P. 1283–1294.
21. Jurisits R., Schneider W., Bae Y.B. A multiple-scales solution of the undular hydraulic jump problem // Proc. Appl. Math. Mech.– 2007.– 7.– P. 4120007–4120008.
22. Bose S. K., Castro-Orgaz O., Dey S. Free surface profiles of undular hydraulic jumps // Journal of Hydraulic Engineering. ASCE.– 2012.– Vol.138, № 4.– P. 362–366.
23. Модзалевский А.И. Исследование волнистого прыжка.– Автореф. дис. канд. техн. наук.: М., 1960.– 21 с.
24. Мельников А.Н. Исследование несовершенного прыжка воды в прямоугольном призматическом русле с горизонтальным дном.– Автореф. дис. канд.техн.наук. НИМИ: Новочеркасск, 1961.– 21 с.
25. Рябенко А.А. Исследование околокритических течений в открытых руслах.– Дис. канд. техн. наук, УИИВХ: Ровно, 1975.– 184 с.
26. Dunbabin R. Velocity Distribution within an Undular Hydraulic jump // Honours Thesis. University of Tasmania.– 1996.– 2.– P. 23–25.
27. Grillhofer W. Undular jump in turbulent flow of channel with free surface. Thesis // Vienna University of Technology.– 2002.– 1.– P. 123–130.
28. Wols B. A. Undular hydraulic jumps. Master Sc. Thesis // Delft University of Tehnology.– 2005.– 1.– P. 6–9.
29. Ramazza M.F. Undular jump. Numerical Model and sensitivity Analysis. Thesis // University of Bologna.– 2008.– 1.– P. 16–22.
30. Гидравлические расчеты конструкций, управляющих бурными потоками. Рекомендации для проектирования / Под общ. ред. Ф.Г.Гуныко.– Л.: Энергия, 1974.– 110 с.
31. Montes J.C., Chanson H. Characteristics of Undular Hydraulic Jumps. Experiments and Analysis // Journal of Hydraulic Engineering, ASCE.– 1998.– Vol.124, №2.– P. 192–205.
32. Рябенко О.А. Профіль вільної поверхні хвилеподібних білякритичних течій та солітонні розв'язки деяких диференціальних рівнянь // Прикладна гідромеханіка.– 1999.– Т.1.(73), №4.– С. 26–41.
33. Castro-Orgaz O., Chanson H. Near-critical free-surface flows: real fluid flow analysis // Environmental Fluid Mechanics.– 2011.– Vol.11.– P. 499–516.
34. Fenton J.D. The cnoidal theory of water waves. Developments in offshore engineering // Ed. J.B. Herbich,.– Gulf: Houston.– 1998.– P. 55–100.
35. Rostami F., Shahrokhi M., Saod M.A.M., Yazdi S.R.S. Numerical simulation of undular hydraulic jump on smooth bed using volume of fluid method // Appl. Math. Modelling.– 2013.– 37(3).– P. 1514–1522.
36. Auel C., Albayrak I., Boes R. Turbulence Characteristics in Supercritical Open Channel Flows: Effects of Froude Number and Aspect Ratio // Hydraul. Eng. ASCE.– 2014.– 140(4).– P. 04014004.
37. Castro-Orgaz O. Weakly undular hydraulic jump: Effects of friction // Journal Hydraul. Res.– 2010.– 48(4).– P. 453–465.

38. Grillhofer W., Schneider W. The undular hydraulic jump in turbulent open channel flow at large Reynolds numbers // *Phys. Fluids, American Institute of Physics.*– 2003.– 15.– P. 730–735.
39. Gotoh H., Yasuda Y., Ohtsu I. Effect of channel slope on flow characteristics of undular hydraulic jumps. *WIT Trans // Ecology Envir.*– 2005.– Vol.83.– P. 33–43.
40. Chanson H. Flow Characteristics of Undular Hydraulic Jump. Comparison with Near-Critical Flows // *University of Queensland, Australia.*– 1995.– Report CH 45/95.– P. 346–353.
41. Рябенко А.А. Условия существования волнистого прыжка // *Гидротехническое строительство.*– 1990.– №12.– С. 29–34.
42. Смыслов В.В. Дослідження руху води через споруди з урахуванням кривизни та похилу вільної поверхні // *Вісті Інституту гідрології і гідротехніки АН УРСР.*– 1950.– т.6 (XIII).– С. 37–54.
43. Смыслов В.В. Исследование околокритических течений жидкости в открытых руслах // *Изв. вузов. Энергетика.*– 2007.– №1.– С. 97–103.
44. Serre F. Contribution a l'etude des écoulements permanents et variables dans les canaux // *La Houille Blanche.*– 1953.– №3.– P. 374–388.
45. Рябенко О.А. Теоретичні основи і методи розрахунків біякритичних течій рідини з вільною поверхнею.– Доктор. дис.: Рівне, 2003.– 390 с.
46. Hager W. H. Critical flow condition in open channel hydraulics // *Acta Mechanica.*– 1985.– Vol.54.– P. 157–179.
47. Chanson H. Free-surface flows with near-critical flow conditions // *Canadian Journal of Civil Engineering.*– 1996.– Vol.23, №6.– P. 1272–1284.
48. Favre H. Etude theorique et experimentale des ondes de translation dans les canaux decouvertes // *Dunod Paris.*– 1935.– 1.– P. 13–17.
49. Chow V.T. Open channel hydraulics. Mc Graw-Hill // *Book Company, Inc.*– 1959.– New. York, Toronto, London.– P. 46–58.
50. Fawer C. Étude de quelques écoulements permanents à filets courbes. Thèse // *Universite de Lausanne.*– 1937.– 1.– P. 1–127.
51. Khafagi A., Hammad S.Z. Velocity and Pressure Distribution in Curved Stream - Line Flow // *Water and Water Engineering.*– 1954.– March.– P. 106–115.
52. Iwasa Y. Analytical Consideration on Cnoidal and Solitari Waves // *Memoirs Faculty of Engineering, Kyoto University.*– 1955.– Vol.17, №3.– P. 264–276.
53. Matthew G. D. On the influence of curvature, surface tension and viscosity on flow over round-crested weirs // *ICE Proceedings of the Institution of Civil Engineers, London.*– 1963.– Vol.25, № 4.– P. 511–524.
54. Hager W.H. Equations for plane, moderately curved open channel flows // *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE.*– 1985.– Vol.111, №3.– P. 541–546.
55. Castro-Orgaz O., Hager W. One-dimensional modelling of curvilinear free surface flow: generalized Matthew theory // *Journal of Hydraulic Research, IAHR.*– 2014.– Vol.52, №1.– P. 14–23.
56. Рябенко О.А. Проблеми і парадокси біякритичних течій рідини // *Прикладна гідромеханіка.*– 2011.– Т13 (85).– С. 37–51.
57. Смыслов В.В. Высота волнистого прыжка и критерий перехода его к совершенному гидравлическому прыжку // *Изв. вузов. Строительство и архитектура.*– 1964.– №2.– С. 102–106.
58. Веземский В.Г. О прыжке и сужении бурного потока.– Автореф. дис. канд.техн.наук: МГМИ.- М., 1967.– 14 с.
59. Castro-Orgaz O., Roldain CanaTHs J., Dolz Ripolleis J. Resalto Hidraulico Ondulatorio // *Ingenieria del Agua.*– 2015.– 19.2.– P. 63–74.
60. Preissman A., Cunge J.A. Undular jump with small amplitude in trapezoidal channel // *Journal of Hydraulic Research, IAHR.*– 1967.– Vol.5, №4.– P. 281–294.
61. Montes J. S. A study of the undular jump profile // *Proc. 9th Australasian Fluid Mechanics Conf.*– 1978.– 1.– P. 148–151.
62. Рябенко А.А. О представлении волнистого прыжка и группы волн перемещения как совокупности уединенной и кноидальных волн // *Гидротехническое строительство.*– 1998.– №5.– С. 9–14.
63. Чугаев Р.Р. Гидравлика.– Л.: Энергоиздат, 1982.– 672 с.
64. Селезов И.Т. Распространение неустановившихся поверхностных гравитационных волн над неровным дном // *Прикладна гідромеханіка.*– 1999.– Т.1(73).– С. 102–109.
65. Korteweg D.J., de Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves // *Philosophical Magazine and Journal of Science.*– 1895.– Vol.39, ser.5.– P. 422–443.
66. Castro-Orgaz O., Giraldez J.V., Ayuso J.L. Critical flow over spillway profiles // *Water Management* 161.– 2008.– April.– P. 89–95.
67. Bose S.K., Dey S. Curvilinear flow profiles based on Reynolds averaging // *Journal of Hydraulic Engineering.*– 2007.– 133(9).– P. 1074–1079.
68. Bhatnagar P.I. Nonlinear waves in one-dimensional dispersive systems // *Clarendon Press, Oxford.*– 1979.– 1.– P. 214–231.
69. Смыслов В.В. К решению задачи о незатопленном водосливе с широким порогом // *Гидравлика и гидротехника.*– 1968.– Вып.7.– С. 26–32.
70. Benjamin T.B., Lighthill M.J. On cnoidal waves and bores // *Proceedings of the Royal Society of London.*– 1954.– A 224.– P. 448–460.
71. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике.– М.: Наука, 1973.– 832 с.
72. Рябенко А.А. Гидравлические сопротивления околокритических течений с волнообразной поверхностью // *Гидротехническое строительство.*– 2002.– №4.– С. 27–37.
73. Рябенко А.А., Галич О.А., Поплавский Д.М. Использование дифференциальных уравнений для расчетов профиля свободной поверхности волнистого прыжка // *Грузинский технический университет, Гидроинженерия.*– 2013.– №1-2 (15-16).– С. 36–44.