

УДК 532.593

# СОВМЕСТНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ВОЛН И ТЕЧЕНИЙ НА ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ПРЕГРАДЫ БОЛЬШИХ ПОПЕРЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

В. В. БОНДАРЬ, В. А. ТКАЧЕНКО, В. В. ЯКОВЛЕВ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев  
03680 Киев – 180, МСП, ул. Желябова, 8/4  
email: vvyak@yandex.ru

Получено 07.08.2014

Рассмотрена задача совместного воздействия поверхностных гравитационных волн и течений на осесимметричные преграды больших поперечных размеров. Ее решение находится с помощью квазитрёхмерной модели трансформации волн в жидкости конечной переменной глубины на спутном и встречном течениях. Показано, что учет течения приводит к сдвигу максимумов волновых нагрузок, а учет переменной глубины жидкости над осесимметричной преградой приводит к увеличению волновых нагрузок за счет фокусировки дифрагированных волн.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** поверхностные волны, течения, преграды больших поперечных размеров, дифракция, волновые нагрузки

Розглянуто задачу спільної дії поверхневих гравітаційних хвиль і течій на вісисиметричні перешкоди великих поперечних розмірів. Її рішення знаходиться за допомогою квазітрёхвимірної моделі трансформації хвиль у рідині кінцевої змінної глибини на спутній та зустрічній течіях. Показано, що врахування течії призводить к зсуву максимумів хвильових навантажень, а врахування змінної глибини рідини над вісисиметричною перешкодою призводить до збільшення хвильових навантажень за рахунок фокусування дифрагованих хвиль.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** поверхневі хвилі, течії, перешкоди великих поперечних розмірів, дифракція, хвильові навантаження

The problem of simultaneous wave-current action on axisymmetrical obstacles of large cross-sections has been considered. It's solution is found using quasi-three-dimensional model of wave transformation on the fluid of finite variable depth for cocurrent and crosscurrent flows. It is shown that taking account of the current leads to the shift of maxima of wave loads, and taking into account the variable depth over the axisymmetrical obstacle leads to the wave loads increasing due to focusing of diffracted waves.

**KEY WORDS:** surface waves, currents, obstacles of large cross sections

## ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] рассмотрена задача совместного воздействия волн и течений на круглоцилиндрические преграды больших поперечных размеров. В этой работе мы обобщим полученные результаты на случай осесимметричных преград, таких как цилиндр с конической вставкой и конус.

## 1. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН И ТЕЧЕНИЙ С ЦИЛИНДРОМ С КОНИЧЕСКОЙ ВСТАВКОЙ

Ниже рассмотрим задачу дифракционного взаимодействия волн и течений с осесимметричными преградами больших поперечных размеров (рис. 1).

Пусть на преграду типа цилиндра с конической вставкой под углом  $\theta$  набегают трансформированные на течения плоские регулярные волны с по-

тенциалом скоростей

$$\Phi_i = \frac{igA_o}{\omega} \frac{chk_2(z+d_2)}{chk_2d_2} \times \exp(i(k_2x \cos \theta + k_2y \sin \theta + \omega t)), \quad (1)$$

где  $g$  – ускорение силы тяжести;  $A_o$  – амплитуда набегающей волны;  $\omega$  – круговая частота;  $d_2$  – глубина воды;  $t$  – время;  $k_2$  – волновое число, определяемое как действительный положительный корень дисперсионного уравнения [2]

$$\frac{\omega^2}{g} = k_2 \operatorname{th} k_2 d_2 + \frac{2\omega k_2 U \cos \alpha}{g} + \frac{k_2^2 U^2 \cos^2 \alpha}{g}. \quad (2)$$

Здесь  $U = \operatorname{const}$  – скорость течения;  $\alpha$  – угол, под которым оно подходит к сооружению. Множитель  $\exp(i\omega t)$  в дальнейшем опускается.

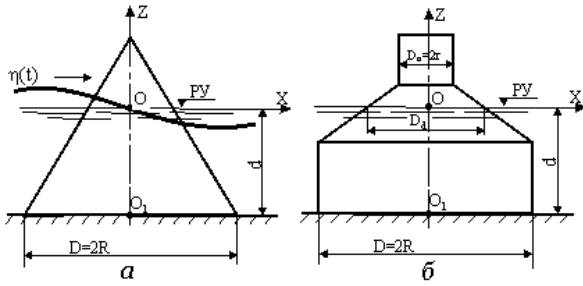


Рис. 1. Расчетная схема преград:  
 а – конус; б – цилиндрическая преграда  
 с конической вставкой

Решение задачи ищем в двух областях:

$$\Sigma_1 = \{(x, y) \in \Omega_1 (a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2), z \in [-d_1, 0]\},$$

$$\Sigma_2 = \{(x, y) \in \Omega_2 (x^2 + y^2 \geq b^2), z \in [-d_2, 0]\}.$$

Волновое движение в этих областях удовлетворяет уравнению Лапласа относительно искомых потенциалов скоростей  $\Phi_1$  (область  $\Sigma_1$ ) и  $\Phi_2$  (область  $\Sigma_2$ ):

$$\nabla^2 \Phi_j = 0, \quad j = 1, 2, \quad (x, y, z) \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \quad (3)$$

граничным условиям на свободной поверхности при  $z = 0$

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial z} - \frac{\omega}{g} \Phi_j = 0, \quad (x, y, z) \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \quad (4)$$

на цилиндрической и конической поверхностях преграды

$$\Phi_2 = \Phi_1, \quad (x, y, z) \in \Sigma_2 \cap \Sigma_1,$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \right|_{r=b} = [H(z + d_1) \left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \right|_{r=b}], \quad (x, y, z) \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2, \quad (5)$$

$$\left[ \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \vec{\nabla} \Phi_1 \cdot \vec{\nabla} d_1 \right] \Big|_{z=-d_1(x,y)} = 0,$$

на дне

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0, \quad (x, y, z) \in \Sigma_2, \quad (6)$$

где  $H(z + d)$  – функция Хевисайда.

Кроме того, потенциал скоростей рассеянного поля  $\Phi_s$  ( $\Phi_2 = \Phi_i + \Phi_s$ ) должен удовлетворять условиям Зоммерфельда [3]:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} \left( \frac{\partial \Phi_s}{\partial r} + ik \Phi_s \right) = 0, \quad (7)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

а потенциал трансформированного поля  $\Phi_1$  должен удовлетворять условию регулярности при  $d_1 = 0$ .

Для решения поставленной задачи воспользуемся выведенным в работе [4] уравнением, описывающим трансформацию поверхностных гравитационных волн в жидкости конечной переменной глубины. В рамках этого подхода искомые потенциалы скоростей представим в виде:

$$\Phi_1(x, y, z) = \frac{\text{ch} k_1 (z + d_1)}{\text{ch} k_1 d_1} \varphi_1(x, y),$$

$$(x, y) \in \Omega_1 \quad (a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2), \quad (8)$$

$$k_1 = k_1(x, y), \quad d_1 = d_1(x, y),$$

$$\Phi_2(x, y, z) = \frac{\text{ch} k_2 (z + d_2)}{\text{ch} k_2 d_2} \varphi_2(x, y), \quad (9)$$

$$(x, y) \in \Omega_2 \quad (x^2 + y^2 \geq b^2).$$

Условия сопряжения (5) относительно новых неизвестных функций  $\varphi_1(x, y)$  и  $\varphi_2(x, y)$  запишутся следующим образом:

$$\varphi_1|_{r=b} = \varphi_2|_{r=b},$$

$$B_1 \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right|_{r=b} = B_2 \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right|_{r=b},$$

$$B_1 = \int_{-d_1}^0 \frac{\text{ch} k_1 (z + d_1)}{\text{ch} k_1 d_1} dz, \quad (10)$$

$$B_2 = \int_{-d_2}^0 \frac{\text{ch} k_2 (z + d_2)}{\text{ch} k_2 d_2} dz.$$

При этом  $\varphi_2(x, y)$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 \varphi_2 + k_2^2 \varphi_2 = 0, \quad x, y \in \Omega_2, \quad (11)$$

а функционал  $\varphi_1(x, y)$  – уравнению

$$A \nabla^2 \varphi_1 + \vec{B} \nabla \varphi_1 + C \varphi_1 = 0, \quad (x, y) \in \Omega_1, \quad (12)$$

где

$$A = W k_1^{-2}, \quad W = \omega^2 / g,$$

$$\vec{B} = 2 \vec{\nabla} A - (\text{ch} k_1 d_1)^{-1} \vec{\nabla} d_1,$$

$$C = \nabla^2 A - \vec{\nabla} (\text{ch} k_1 d_1)^{-1} \cdot \vec{\nabla} d_1 - \text{ch} k_1 d_1 \nabla^2 d_1 + W.$$

Решение задачи (9)–(12) в области  $\Omega_2$  ( $x^2 + y^2 \geq b^2$ ) с учетом (7) представим в виде разложения по цилиндрическим функциям:

$$\varphi_i = \frac{ig A_0}{\omega} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m J_m(k_2 r) \cos m \theta,$$

$$\varphi_s = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m H_m^{(2)}(k_2 r) \cos m\theta. \quad (13)$$

Общую схему построения решения в области  $a \leq r \leq b$  можно представить следующим образом. Интервал  $[a, b]$  разбивается на два интервала  $[a, a + \varepsilon]$  и  $[a + \varepsilon, b]$ ,  $\varepsilon \ll b - a$ . На интервале  $[a, a + \varepsilon]$ , в силу малости функции  $H_1(r)$ ,  $k_1 \approx 1/\sqrt{H_1(r)}$ ,  $k_1(r)H_1(r) \ll 1$  и, следовательно,  $\text{ch}k_1(r)H_1(r) \approx 1$ ,  $k_1^{-2}(r) \approx H_1(r)$ . Аппроксимируя функцию  $H_1(r)$  прямой  $H_\varepsilon(r) = (r - a)/\chi$ ,  $\chi = \varepsilon/H_1(a + \varepsilon)$ , для функции  $R_m(r)$ , описывающей поведение радиальной составляющей потенциала скоростей  $\varphi_{1\varepsilon}$  на интервале  $[a, a + \varepsilon]$ , из уравнения (12) получим

$$\frac{d^2 R_m}{dr^2} + \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r - a} \right) \frac{dR_m}{dr} + \left( \frac{\varepsilon k_1^2(a + \varepsilon)}{r - a} - \frac{m^2}{r^2} \right) R_m = 0. \quad (14)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию регулярности в точке  $r = a$ , можно представить в виде обобщенного степенного ряда [3]

$$R_m(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n (r - a)^n, \quad (15)$$

где коэффициенты  $\gamma_n$  определяются из рекуррентных соотношений

$$\gamma_n = -\frac{1}{a^2 n^2} \{ [a(n - 1)(2n - 1) + a^2 \varepsilon k_1^2(a + \varepsilon)] \gamma_{n-1} + [(n - 2)(n - 1) - m^2] + 2a\varepsilon k_1^2(a + \varepsilon) \gamma_{n-2} + k_1^2(a + \varepsilon) \gamma_{n-3} \}.$$

Учитывая, что на интервале  $[a, a + \varepsilon]$

$$\frac{\text{ch}k_1(r)(z + H_1(r))}{\text{ch}k_1(r)H_1(r)} \approx 1,$$

общее решение  $\varphi_{1\varepsilon}$  можно записать в виде

$$\varphi_{1\varepsilon} = \sum_{m=0}^{\infty} d_m R_m(r) \cos m\theta. \quad (16)$$

В точке  $r = a + \varepsilon$  разбиения интервала  $[a, b]$  должны удовлетворяться условия сопряжения

$$\varphi_{1\varepsilon} = \varphi_1, \quad \frac{\partial \varphi_{1\varepsilon}}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}. \quad (17)$$

Решение задачи на интервале  $a + \varepsilon \leq r \leq b$  находится с помощью метода сплайн-коллокации [5]:

$$\varphi_1 = \frac{\text{ch}_1(r)(z + H_1(r))}{\text{ch}k_1(r)H_1(r)} \sum_{m=0}^{\infty} S_m(r) \cos m\theta, \quad (18)$$

где  $S_m(r)$  – приближенное решение уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 S_m}{dr^2} + \left( \frac{1}{r} + 2k_1^2(r) \frac{dk_1^{-2}(r)}{dr} - \frac{k_1^2(r)H_1'(r)}{\text{ch}k_1(r)H_1(r)} \right) \times \\ & \times \frac{dS_m}{dr} + (k_1^2(r) \left( 1 + \frac{d^2 k_1^{-2}(r)}{d^2 r} \right) - \\ & - H_1'(r) \frac{d[\text{ch}k_1(r)H_1(r)]^{-1}}{dr} - \\ & - \text{ch}[k_1(r)H_1(r)]^{-1} H_1''(r) - \frac{m^2}{k_1^2(r)r^2}) S_m = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

записанное в виде разложения по базису из нормализованных кубических В-сплайнов;

$$S_m(r) = \sum_{q=i-3}^i \delta_q^m B_q(r), \quad r \in [r_1, r_{i+1}],$$

$$a + \varepsilon = r_o < r_1 < \dots < r_N = b.$$

Неизвестные коэффициенты  $\beta_m$ ,  $\gamma_m$ ,  $\delta_q^m$  для каждого  $m$  находятся из условий сопряжения (9) и (17), а также из условия удовлетворения  $S_m(r)$  уравнению (19) в узлах коллокации  $\xi_i \in [a + \varepsilon, b]$ ,  $i = 0, \dots, N$ .

Дифракционные волновые силы и суммарный опрокидывающий момент определяются выражениями

$$\begin{aligned} \frac{F_x}{\rho g b^2 A} &= -k_2 \pi \text{Re} \{ i \exp(i\omega t) [\gamma_1 A_1 + A_2] \}, \\ \frac{F_z}{\rho g b^2 A} &= -2k_2 \pi \text{Re} \{ i \exp(i\omega t) [\gamma_o A_3 + A_4] \}, \quad (20) \\ \frac{M_y}{\rho g b^3 A} &= -k_2 \pi \text{Re} \{ i \exp(i\omega t) [\gamma_1 A_5 + A_6] \}, \end{aligned}$$

где

$$A_1 = \int_a^{a+\varepsilon} R_1(r) r H_1'(r) \frac{H_2}{b} dr,$$

$$A_2 = \int_{a+\varepsilon}^1 \frac{S_1(r) H_1'(r) (H_2/b)}{\text{ch}k_1(r)H_1(r) (H_2/b)} r dr,$$

$$A_3 = \int_a^{a+\varepsilon} R_o(r) r dr,$$

$$A_4 = \int_{a+\varepsilon}^1 \frac{S_o(r)}{\text{ch}k_1(r)H_1(r) (H_2/b)} r dr,$$

$$A_5 = \int_a^{a+\varepsilon} R_1(r) r \left[ (1 - H_\varepsilon(r)) H_1'(r) \frac{H_2}{b} - r \right] dr,$$

$$\begin{aligned} A_6 &= \int_{a+\varepsilon}^1 \frac{S_1(r)}{\text{ch}k_1(r)H_1(r) (H_2/b)} \times \\ & \times r \left[ (1 - H_1(r)) H_1'(r) (H_2/b)^2 - r \right] dr. \end{aligned}$$

Решения для конической преграды определяются выражениями (13), (16), (18) при  $d_1 = d_2$ .

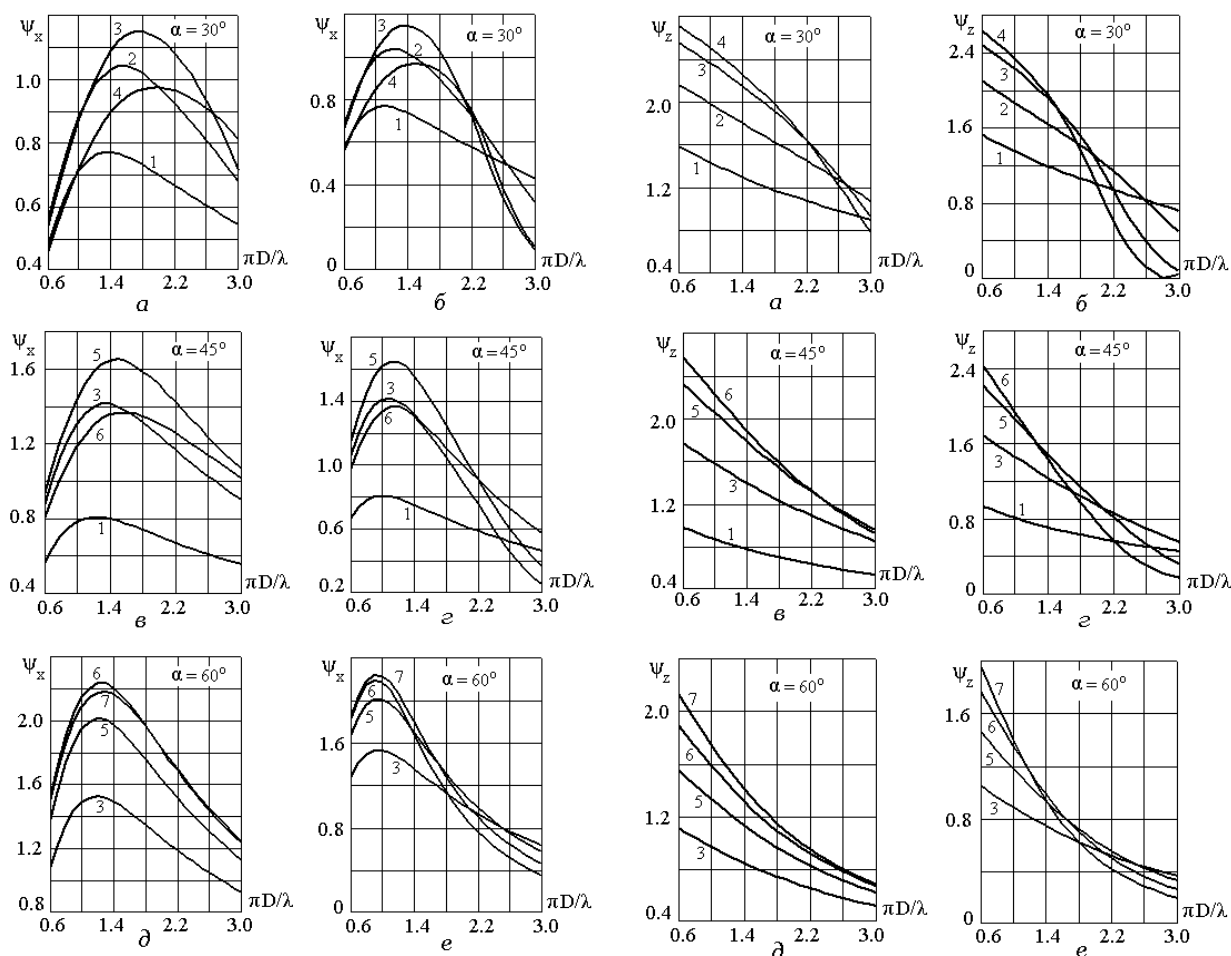


Рис. 2. Графики значений коэффициента  $\psi_x$  максимальной горизонтальной нагрузки на коническую преграду:

- 1 -  $d/R = 0.2$ ; 2 -  $d/R = 0.3$ ; 3 -  $d/R = 0.4$ ;
- 4 -  $d/R = 0.5$ ; 5 -  $d/R = 0.6$ ; 6 -  $d/R = 0.8$ ;
- 7 -  $d/R = 1.0$ ;

$\alpha, \beta, \delta$  – спутное течение;  $\beta, \gamma, \epsilon$  – встречное течение

Рис. 3. Графики значений коэффициента  $\psi_z$  максимальной вертикальной нагрузки на коническую преграду:

- 1 -  $d/R = 0.2$ ; 2 -  $d/R = 0.3$ ; 3 -  $d/R = 0.4$ ;
- 4 -  $d/R = 0.5$ ; 5 -  $d/R = 0.6$ ; 6 -  $d/R = 0.8$ ;
- 7 -  $d/R = 1.0$ ;

$\alpha, \beta, \delta$  – спутное течение;  $\beta, \gamma, \epsilon$  – встречное течение

## 2. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 2–7 представлены графики зависимости максимальных горизонтальной, вертикальной нагрузок и суммарного опрокидывающего момента:

$$\psi_x = \frac{F_x}{\rho g b^2 A}, \quad \psi_z = \frac{F_z}{\rho g b^2 A}, \quad \mu_{ys} = \frac{M_y}{\rho g b^3 A}$$

от волнового числа для встречного и спутного течений для конической преграды.

Из графиков следует, что наличие течений приводит к сдвигу максимумов горизонтальной нагрузки вследствие уменьшения длины волны на встречном течении и ее увеличении на спутном течении. Кроме того, дополнительный сдвиг максимумов происходит при увеличении угла накло-

на образующей конуса за счет фокусировки трансформированных над переменной глубиной воды.

Для вертикальной нагрузки с увеличением угла наклона образующей вертикальная составляющая волновой нагрузки уменьшается за счет уменьшения площади проекции переменной глубины на горизонтальную плоскость. Однако при встречном течении скорость падения величины вертикальной нагрузки с уменьшением длины волны существенно выше, чем при спутном течении, и для малых углов наклона образующей (рис. 3, б) возможна ситуация, когда за счет трансформации над областью переменной глубины происходит смена фазы действия нагрузки, то есть при прохождении гребня волны, когда вертикальная нагрузка должна

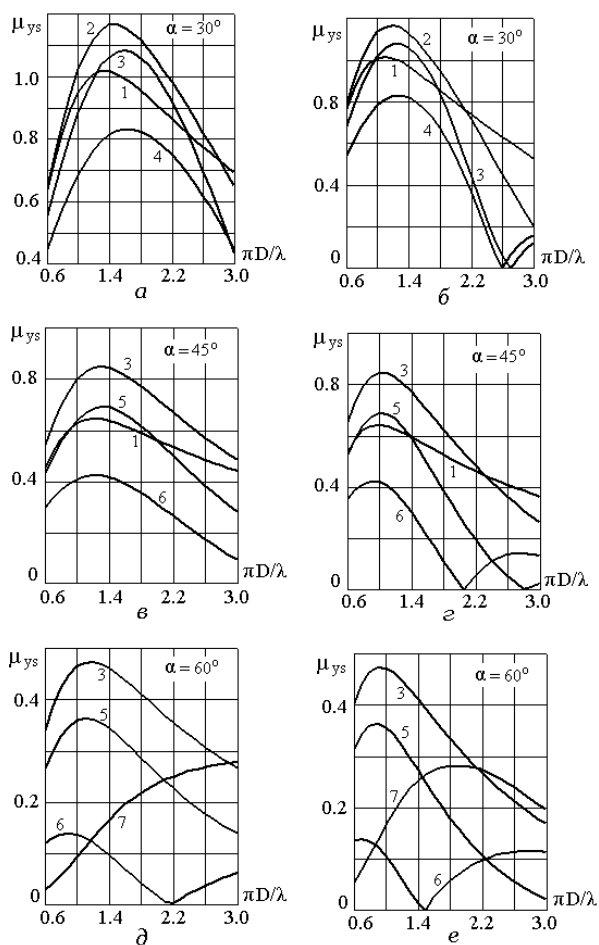


Рис. 4. Графики значений коэффициента  $\mu_{ys}$  максимального суммарного опрокидывающего момента от действия горизонтальной и вертикальной нагрузок на коническую преграду:

- 1 -  $d/R = 0.2$ ; 2 -  $d/R = 0.3$ ; 3 -  $d/R = 0.4$ ;  
 4 -  $d/R = 0.5$ ; 5 -  $d/R = 0.6$ ; 6 -  $d/R = 0.8$ ;  
 7 -  $d/R = 1.0$ ;

$a, \delta, \delta$  - спутное течение;  $b, z, e$  - встречное течение

быть придавливающей, за счет дифракционных эффектов нагрузка становится взвешивающей.

Наиболее четко эффект сдвига фаз при волновом воздействии наблюдается при анализе опрокидывающего момента (рис. 4), действующего на коническую преграду. Здесь для достаточно коротких волн на встречном течении, а для угла наклона образующей  $\alpha = 60^\circ$  и для спутного течения наблюдается изменение направления действия волны, то есть опрокидывающий момент направлен навстречу набегающей волне.

Аналогичные результаты получены и для цилиндра с конической вставкой. Однако для таких сооружений эффекты сдвига фаз проявляются слабее.

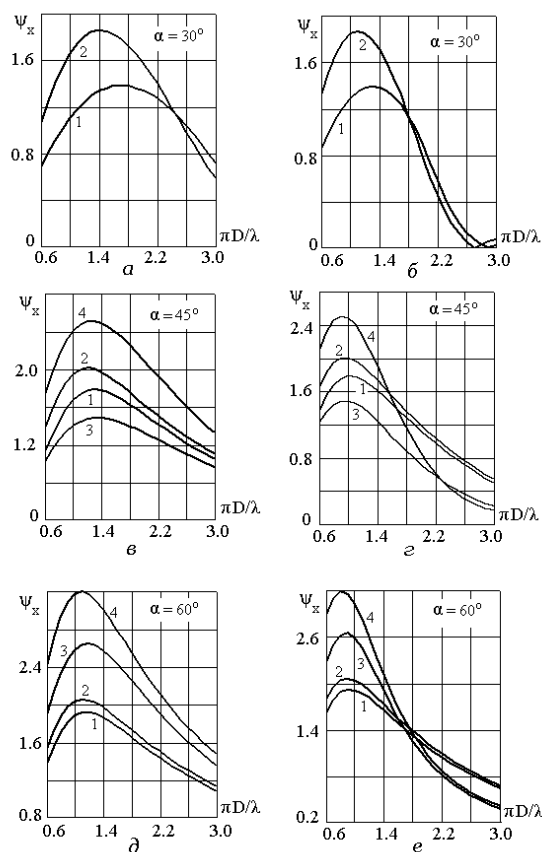


Рис. 5. Графики значений коэффициента  $\psi_x$  максимальной горизонтальной нагрузки на цилиндрическую преграду с конической вставкой: 1 -  $c/d = 0.125, d/R = 0.5$ ; 2 -  $c/d = 0.3, d/R = 0.5$ ; 3 -  $c/d = 0.125, d/R = 1.0$ ; 4 -  $c/d = 0.3, d/R = 1.0$ ;  $a, \delta, \delta$  - спутное течение;  $b, z, e$  - встречное течение

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача совместного воздействия поверхностных гравитационных волн и течений на осесимметричные преграды больших поперечных размеров. Ее решение находится с помощью квазитрехмерной модели трансформации волн в жидкости конечной переменной глубины на спутном и встречном течениях. Показано, что учет течения приводит к сдвигу максимумов волновых нагрузок, а учет переменной глубины жидкости над осесимметричной преградой приводит к увеличению волновых нагрузок за счет фокусировки дифрагированных волн. Кроме того, как и в случае круглоцилиндрических преград, для малых углов наклона образующей возможна ситуация, когда за счет трансформации волн над областью переменной глубины происходит смена фазы действия нагрузки, то есть при прохождении гребня волны,

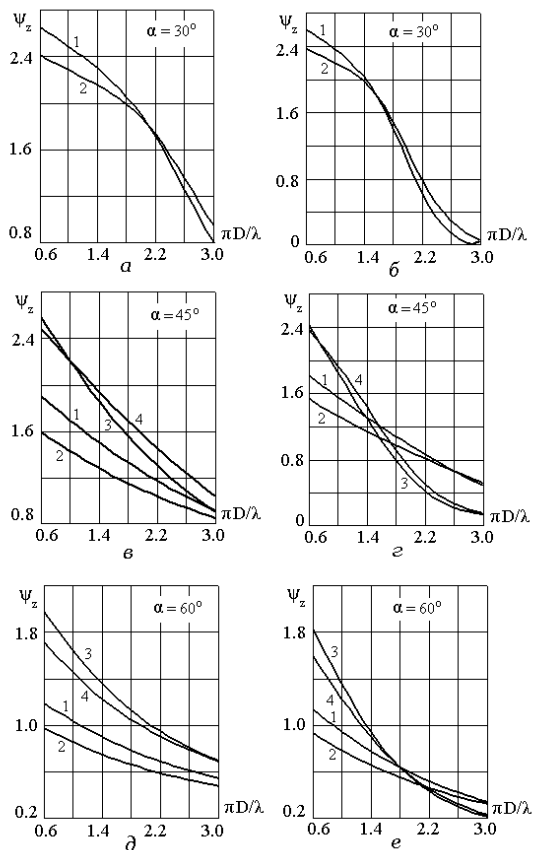


Рис. 6. Графики значений коэффициента  $\psi_z$  максимальной вертикальной нагрузки на цилиндрическую преграду с конической вставкой: 1 -  $c/d=0.125$ ,  $d/R=0.5$ ; 2 -  $c/d = 0.3$ ,  $d/R = 0.5$ ; 3 -  $c/d = 0.125$ ,  $d/R = 1.0$ ; 4 -  $c/d = 0.3$ ,  $d/R = 1.0$ ; а, в, д - спутное течение; б, г, е - встречное течение

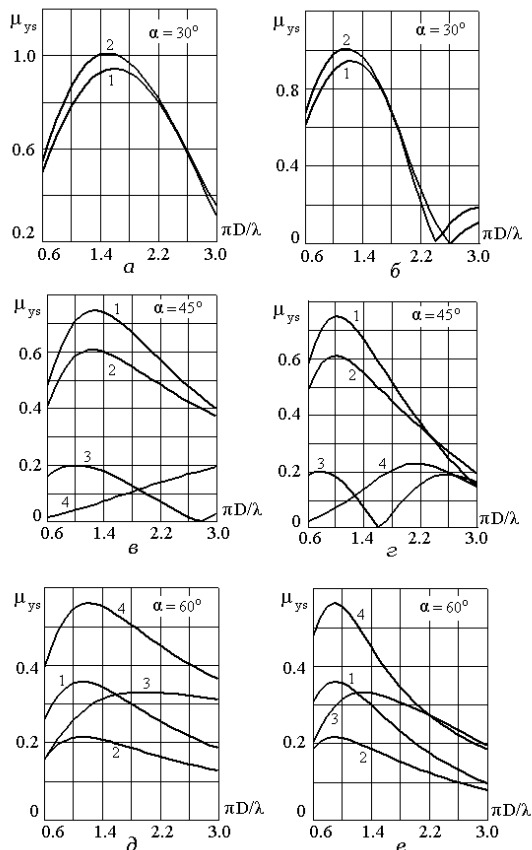


Рис. 7. Графики значений коэффициента  $\mu_{ys}$  максимального суммарного опрокидывающего момента от горизонтальной и вертикальной нагрузок на цилиндрическую преграду с конической вставкой: 1 -  $c/d=0.125$ ,  $d/R=0.5$ ; 2 -  $c/d = 0.3$ ,  $d/R = 0.5$ ; 3 -  $c/d = 0.125$ ,  $d/R = 1.0$ ; 4 -  $c/d = 0.3$ ,  $d/R = 1.0$ ; а, в, д - спутное течение; б, г, е - встречное течение

когда вертикальная нагрузка должна быть придавливающей, за счет дифракционных эффектов она становится взвешивающей.

1. Бондарь В.В., Ткаченко В.А., Яковлев В.В. Совместное воздействие волн и течений на круглоцилиндрические преграды больших поперечных размеров // Прикладна гідромеханіка.- 2014.- 16(88).- С. 14–22.

2. Конанкова Г.Е., Показеев К.В. Динамика морских волн.- М.: Изд-во МГУ, 1985.- 298 с.  
 3. Селезов И.Т., Сидорчук В.Н., Яковлев В.В. Трансформация волн в прибрежной зоне шельфа.- Киев: Наукова думка, 1983.- 208 с.  
 4. Яковлев В.В. Двумерные модели плановой трансформации волн в жидкости переменной глубины // Прикладна гідромеханіка.- 2000.- т.2 (74).- С. 119–125.  
 5. Завьялов Ю.С., Квасов В.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций.- М.: Наука, 1980.- 352 с.