

УДК 532.517

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕВОЛЮЦІЇ НЕРІВНОСТЕЙ ВЕЛИКОГО МАСШТАБУ НА РІЧКОВОМУ ДНІ

І. М. ГОРБАНЬ

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ
вул. Желябова, 8/4, 03680, МСП, Київ-180, Україна
E-mail: ivgorban@gmail.com

Одержано 30.01.2015

Виконане чисельне моделювання переносу домішок у придонній області відкритих водойм за наявності там нерівностей великого масштабу, яке ґрунтується на системі рівнянь мілкої води і рівнянні еволюції дна Екснера. Розвинений чисельний алгоритм поєднує центральну схему другого порядку Курганова-Ноелля-Петрової для інтегрування гідродинамічних рівнянь зі зваженою істотно неосцилюючою схемою "проти течії" п'ятого порядку, яка моделює транспорт наносів. Показано, що зв'язане моделювання гідро- та морфодинамічних процесів разом із застосуванням схем високого порядку забезпечує стійкість результатів у довгострокових розрахунках. Одержані часові і просторові характеристики еволюції піщаних кар'єрів та пагорбів на річковому дні, які показують, що в процесі розмиву не лише змінюється поперечний профіль нерівності, а й відбувається її перенос за течією.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: донна поверхня, розмив, перенос домішок, заглиблення, піщаний пагорб

Выполнено численное моделирование переноса примесей в придонной области открытых водоёмов при наличии там крупномасштабных неровностей. Оно основывается на системе уравнений мелкой воды и уравнении эволюции дна Экснера. Разработанный численный алгоритм объединяет центральную схему второго порядка Курганова-Ноелля-Петровой для интегрирования гидродинамических уравнений со взвешенной существенно неосциллирующей схемой "против течения" пятого порядка, которая моделирует перенос взвешенных частиц. Показано, что связанное моделирование гидро- и морфодинамических процессов, а также применение схем высокого порядка обеспечивает устойчивость результатов в долгосрочных расчётах. Получены временные и пространственные характеристики песчаных карьеров и холмов, которые показывают, что в процессе размыва не только изменяется поперечный профиль неровности, а и происходит её перенос за течением.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: донная поверхность, размыв, перенос примесей, углубления, песчаный холм

This paper deals with numerical simulation of bed-load sediment transport near large-scale irregularities placed on the bottom of open channels. It is founded on a shallow water system and a so called Exner equation that describes the evolution of topography. The numerical algorithm developed is coupled the Kurganov-Noelle-Petrova semidiscrete central-upwind scheme for integrating the hydrodynamic equations with a fifth order Euler-WENO scheme for sediment transport modeling. The splitting simulation of hydro- and morphodynamical processes as well as application of the high order schemes were shown to ensure stability of the results during a long-term modeling. The temporal and spatial characteristics of evolution of large-scale bottom irregularities such as sand humps and cavities were obtained. Those point out that sediment transport not only changes the cross profile of the irregularities but causes their moving on down the stream.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: river bottom, erosion, sediment transport, hollow, sand dune

ВСТУП

Річкова течія, як динамічна система, складається із взаємопов'язаних гідрологічного і морфологічного процесів. Гідродинамічні явища визначаються глибиною і швидкістю водного потоку, наявністю вихорів і активних турбулентних зон тощо. Морфологічні процеси включають розмив річкового дна і берегів, втягнення утворених частинок у рух, їхній перенос і випадання осадів. Прогнозування гідродинамічних і морфологічних змін у відкритих водоймах є важливим для отримання характеристик навколишнього середовища та його еволюції з метою попередження негативних наслідків техногенних і природних катастроф.

Протягом довгого часу наукову базу для дослідження річкових течій забезпечувала гідравліка. Її концептуальні моделі ґрунтуються на емпіричних

співвідношеннях, одержаних або зі спостережень за полем течії, або з лабораторних експериментів [1, 2]. В 90-х роках минулого сторіччя в річкову гідродинаміку почали широко впроваджуватися комп'ютерні технології. Їхньою перевагою є те, що вони реалізують пряме масштабне моделювання течії, дозволяють виявити вплив окремих факторів і є набагато дешевшими за натурні чи модельні експерименти [3]. Крім того, вони ґрунтуються на строгих математичних моделях, що усуває проблеми, пов'язані з вибором великої кількості емпіричних залежностей.

Зазвичай, для чисельного моделювання нестационарних руслових потоків з переносом домішок у придонній області використовуються система рівнянь мілкої води, що описує водний потік, і рівняння збереження маси наносів, за яким розраховується еволюція дна. Складність проблеми полягає в тому, що часові масштаби змін у річковому потоці

і на дні суттєво відрізняються, інколи – на декілька порядків. Їхнє співвідношення необхідно враховувати при побудові чисельних алгоритмів для розв'язання математичних рівнянь [4].

Якщо водний потік близький до стаціонарного і слабо залежить від змін на донній поверхні, гідроморфодинамічна система може розв'язуватися послідовно, коли спочатку інтегруються гідродинамічні рівняння до досягнення течією стану рівноваги, а потім оновлюється форма дна. Такий спрощений підхід застосовується для розв'язання багатьох практичних проблем річкової гідравліки [5], але його використання обмежене випадками, коли і потік, і донна поверхня змінюються дуже повільно.

При моделюванні нестационарних проблем, коли зміни на донній поверхні можуть впливати на потік, більш перспективним є одночасне розв'язання гідродинамічних і морфологічного рівнянь. В роботі [4] показано, що при зв'язаному інтегуванні гідроморфодинамічної системи чисельні апроксимації є достатньо стійкими, а результати моделювання – адекватними до фізичних процесів. Проблема полягає в тому, що в більшості випадків залежності потоку зважених частинок від параметрів водної течії мають складний емпіричний характер, інколи вони навіть не можуть бути записані в аналітичному вигляді. Це значно ускладнює знаходження швидкостей поширення збурень у процесах, що розглядаються. Хоча останнім часом зв'язаний підхід активно розвивався [6, 7], одержані розв'язки стосуються самої простої ступеневі залежності потужності потоку наносів від швидкості водної течії.

Зв'язування процесів може бути частковим, коли на одному і тому ж кроці по часові система розщеплюється на два оператори, які виконуються послідовно. Цей підхід є більш простим, ніж повністю зв'язаний, оскільки характеристичні швидкості у гідродинамічній і у морфологічній моделях оцінюються окремо. З іншого боку, він здатен описувати взаємний вплив процесів, оскільки результати гідродинамічного моделювання використовуються як вхідні дані при інтегуванні рівняння еволюції поверхні і навпаки. Стійкість таких алгоритмів залежить від типу і порядку чисельних схем, які застосовуються для інтегування гідроморфодинамічних рівнянь [4, 8, 9].

В цій роботі розвинений чисельний алгоритм, який поєднує центральну схему другого порядку Курганова-Ноєлля-Петрової (KNP-scheme) [10, 11] для інтегування гідродинамічних рівнянь зі схемою "проти течії" п'ятого порядку, за якою розраховується еволюція донної поверхні. Остан-

ня ґрунтується на зваженій істотно неосцілюючій апроксимації (WENO-approximation) потоку наносів, запропонованій в [12]. Розглянуті одновимірні реалізації цього алгоритму для незв'язаної і частково зв'язаної систем гідроморфодинамічних рівнянь. Виконані тестові розрахунки еволюції піщаного пагорбу, розташованого на дні прямокутного каналу. Порівняння одержаних результатів з відомим аналітичним розв'язком [4] показують, що обидва підходи, незв'язаний і частково зв'язаний, забезпечують прийнятну точність, але останній більше підходить для довгострокових розрахунків, оскільки майже повністю виключає хибні коливання шуканих розв'язків. Показано, що точність розрахунків визначається порядком чисельної схеми по простору і мало залежить від способу інтегування по часові, що істотно спрощує застосування цього алгоритму до моделювання практичних проблем.

Проведені довгострокові розрахунки, в яких отримані часові і просторові характеристики еволюції глибоких ям (кар'єрів) та піщаних пагорбів на річковому дні. Вони показують, що в процесі розмиву не лише змінюється поперечний профіль нерівності, а й відбувається її перенос за течією. Зроблені оцінки є важливими для прогнозування впливу крупномасштабних донних утворень на еволюцію річкових течій, розмивні процеси поблизу берегів, стійкість гідротехнічних споруд, тощо.

1. ТЕОРЕТИЧНА МОДЕЛЬ

Течії у природних водоймах, де вертикальний розмір є набагато меншим за горизонтальні, зазвичай описуються моделлю мілкої води. Її рівняння виводяться із загальних законів динаміки рідини інтегуванням по вертикальній координаті за умови гідростатичного розподілу тиску. Якщо вважати також, що параметри течії не змінюються вздовж поперечного перерізу русла, можна застосовувати одновимірну модель, яка у випадку прямокутного каналу зводиться до класичної системи рівнянь Сен-Венана [13]:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \right) = -gh \frac{dz_b}{dx} - ghS_f, \quad (2)$$

де x – горизонтальна змінна вздовж вісі каналу; t – час; g – прискорення вільного падіння; $h(x, t)$ – глибина води; $u(x, t)$ – швидкість течії; $q = hu$ – витрата води; $z_b(x, t)$ – функція, яка задає форму дна; S_f – нахил тертя.

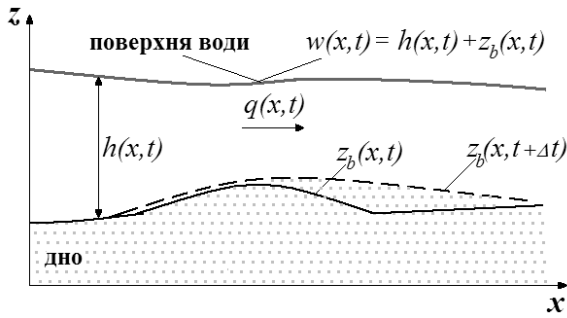


Рис. 1. Схема мілкої води в каналі з розмивним дном

Рівняння (1), (2) є осередненими по вертикальній координаті рівняннями збереження маси і моменту рідини відповідно. В цій постановці вважається, що конфігурація дна у каналі змінюється з часом (рис. 1). Еволюція дна описується рівнянням Екснера, яке випливає із закону збереження маси твердої речовини і має наступний вигляд:

$$(1 - p_m) \frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{\partial q_b}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

де p_m – пористість донного ґрунту. Функція $q_b(h, q)$ представляє собою потужність потоку зважених частинок, які переміщуються у придонному шарі. Вона залежить від гідродинамічних параметрів течії та фізичних властивостей наносів і має емпіричний характер.

Рівняння балансу наносів (3) описує перенос твердої речовини лише в межах придонної області, тоді як переміщеннями домішок у суспензійному шарі, а також їхнім випаданням на дно нехтується. Цей підхід є правомірним, оскільки в рівнинних водоймах у верхньому шарі переносяться, головним чином, мул і глина, які мають слабку здатність до осідання. З іншого боку, піщані частинки, які формують дно, майже не піднімаються вгору через те, що вертикальна складова турбулентної швидкості у такому потоці є, зазвичай, меншою за швидкість осідання частинки.

Для замикання системи рівнянь (1)–(3) використовуються емпіричні формули, які виражають тертя S_f і потужність потоку зважених частинок q_b через гідродинамічні змінні. Величина S_f зазвичай моделюється законами Дарсі-Вейсбаха або Маннінга:

$$S_f = \frac{f|u|}{8gR_h}, \quad (4)$$

$$S_f = \frac{n^2|u|}{R_h^{4/3}}, \quad (5)$$

де f, n – коефіцієнти Дарсі-Вейсбаха і Маннінга відповідно. Їхні значення для конкретних водойм

вираховуються за допомогою натурних експериментів.

Величина R_h в формулах (4), (5) є гідравлічним радіусом, який представляє собою відношення площини поперечного перерізу потоку до змоченого периметру. У випадку широкого прямокутного каналу, що тут розглядається, $R_h \sim h$.

Оцінки, які існують для визначення потужності потоку наносів q_b , як правило, сформульовані для гранульованих зв'язаних частинок і мають вигляд імовірнісних або детерміністичних законів. Покладаючи, що пульсації швидкості в потоці розподілені за нормальним законом, Ейнштейн [14] одержав залежність потоку зважених частинок від імовірності втягнення такої частинки у рух турбулентною течією. Детерміністичні моделі зв'язують транспорт наносів з фізичними характеристиками частинок і гідродинамічними параметрами течії. Найбільш простою є степенева формула Грасса [15], в якій потужність потоку наносів безпосередньо виражається через гідродинамічні змінні h і q :

$$q_b = A_g \frac{q}{h} \left| \frac{q}{h} \right|^{m_g - 1}, \quad 1 \leq m_g \leq 4. \quad (6)$$

Параметр A_g [m^2/c] залежить від розмірів частинок, що переносяться, і в'язкості рідини. Він визначається експериментальним шляхом. Малі значення A_g ($A_g \sim 0$) означають слабку взаємодію між течією води і транспортом наносів. Якщо $A_g \sim 1$, має місце сильна взаємодія.

Зазвичай в формулі (6) покладається $m_g = 3$. Тоді вона набуває вигляду:

$$q_b = A_g u^3. \quad (7)$$

Аналогічна формула отримана в ІГМ НАН України спеціально для умов річки Дніпро [2]:

$$q_b = D \frac{u^6}{h}, \quad (8)$$

де D – емпіричний коефіцієнт, $D \approx 2 \cdot 10^{-5}$ [c^5/M^3].

Більш практичні оцінки потоку наносів q_b ґрунтуються на положенні, що зважена частинка починає рухатися, коли дотичні напруження на дні τ_b перевищують задане критичне значення $\tau_{b\text{cr}}$. В ламінарному потоці зв'язок між дотичними напруженнями τ_b і силою тертя S_f на донній поверхні має вигляд:

$$\tau_b = \rho g h |S_f|, \quad (9)$$

де ρ – густина води; S_f знаходиться за емпіричними законами (4) або (5).

Зазвичай розглядають безрозмірні дотичні напруження τ_b^* і $\tau_{b\text{cr}}^*$:

$$\tau_b^* = \frac{\tau_b}{(\gamma_s - \gamma)d_s}, \quad \tau_{b\text{cr}}^* = \frac{\tau_{b\text{cr}}}{(\gamma_s - \gamma)d_s}, \quad (10)$$

де $\gamma = \rho g$, $\gamma_s = \rho_s g$ – питома вага води і наносів відповідно, ρ_s – густина наносів; d_s – середній розмір зважених частинок.

Порогове значення дотичного напруження $\tau_{b\,cr}^*$, при якому частинка, що лежить на дні, втягується у рух, залежить від параметрів течії і властивостей донних відкладень. Результати багатьох експериментальних досліджень по визначенню $\tau_{b\,cr}^*$ узагальнив Шильдс, який одержав емпіричну залежність $\tau_{b\,cr}^*$ від числа Рейнольдса придонного потоку, відому, як діаграма Шильдса [3]:

$$\tau_{b\,cr}^* = f(Re), \quad (11)$$

де $Re = U_* d_s / \nu$, U_* – дотична швидкість потоку води поблизу дна, ν – кінематична в'язкість рідини.

У врахуваннях використовується безрозмірна потужність потоку наносів:

$$\Phi = \frac{q_b}{\sqrt{\left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right) g d_s^3}}. \quad (12)$$

Для її визначення розвинені різні емпіричні моделі, які застосовуються в залежності від фізичних властивостей наносів та параметрів водної течії.

- Модель Мейера-Петера і Мюллера (1948) [16]:

$$\Phi = 8(\tau_b^* - \tau_{b\,cr}^*)^{3/2}, \quad (13)$$

де $\tau_{b\,cr}^* = 0.047$.

Ця формула є однією з найбільш відомих. Вона застосовується, якщо середній розмір зважених частинок $d_{50} = 0.4 \text{ мм} \div 29 \text{ мм}$, а нахил річкового дна не перевищує 2%.

- Рівняння Ван Ріня (1984) [17]:

$$\Phi = \frac{0.005}{C_D^{1.7}} \left(\frac{d_s}{h}\right)^{0.2} \sqrt{\tau_b^*} (\tau_b^* - \tau_{b\,cr}^*)^{2.4}, \quad (14)$$

де C_D – опір частинки.

- Модель Нільсена (1992) [18]:

$$\Phi = 12\sqrt{\tau_b^*} (\tau_b^* - \tau_{b\,cr}^*), \quad (15)$$

де $\tau_{b\,cr}^* = 0.05$.

- Модель Рібберінка (1998) [3]:

$$\Phi = 11(\tau_b^* - \tau_{b\,cr}^*)^{1.65}. \quad (16)$$

Пористість донного ґрунту p_m представляє собою відношення об'єму порожнеч у речовині до її загального об'єму:

$$p_m = \frac{V_v}{V_v + V_s}, \quad (17)$$

де V_v – об'єм порожнеч; V_s – об'єм твердої речовини. Якщо дно складається з однорідних гранульованих зв'язаних частинок, для знаходження p_m в роботі [3] запропоноване наступне емпіричне співвідношення:

$$p_m = \begin{cases} 1 - 0.525 \left(\frac{d_s}{d_s + 4\delta}\right)^3, & d_s < 1\text{mm}, \\ 0.3 + 0.175e^{\frac{-0.05(d_s - d_0)}{d_0}}, & d_s \geq 1\text{mm}, \end{cases} \quad (18)$$

де d_0 – відносний розмір частинок, зазвичай, складається $d_0 = 1 \text{ мм}$; δ – товщина водної плівки, що оточує частинку ($\delta \sim 0.0004 \text{ мм}$).

2. ЧИСЕЛЬНА МОДЕЛЬ

У цій роботі чисельна апроксимація рівнянь (1)–(3) буде виконуватися в рамках напівзв'язаного підходу, коли система розщеплюється на два оператори – гідродинамічний і морфологічний, які виконуються послідовно в рамках одного часового кроку. В цьому разі, кожне з рівнянь системи інтегрується незалежно від іншого найбільш придатним для цього способом, а взаємний вплив процесів враховується тим, що результати виконання одного оператора є вхідними даними для іншого, і навпаки. Стосовно процесів, які тут розглядаються, це означає, що рівняння мілкої води (1)–(2) розв'язуються при відомій з попереднього кроку функції дна z_b , а рівняння (3) використовується для оновлення топографії дна по вже відомим значенням гідродинамічних змінних.

Чисельний алгоритм, розвинений тут для розв'язання системи рівнянь (1)–(3), поєднує центральну схему другого порядку Курганова-Ноелля-Петрової (*KNP-scheme*) [10, 11] для інтегрування гідродинамічних рівнянь зі схемою "проти течії" п'ятого порядку, за якою розраховується еволюція донної поверхні. Остання ґрунтується на зваженій істотно неосцілюючій апроксимації (*WENO-approximation*) потоку наносів, запропонованій в [12].

2.1. Чисельна апроксимація рівнянь мілкої води

Головна складність при побудові чисельних апроксимацій для рівнянь мілкої води полягає в тому, що вони мають гіперболічну природу, внаслідок чого їхні розв'язки можуть містити розриви. Взаємодія потоку з сильно нерівним дном, яке є предметом дослідження цієї роботи, неминуче призводить до утворення складної конфігурації вільної поверхні, включно зі стрибками і хвилями розрідження. Коректна чисельна схема повинна не

лише описувати такі розв'язки без хибних осциляцій, а й зберігати їх протягом довгого часу. Одним із самих простих і ефективних підходів, які відповідають переліченим вимогам, є центральна схема "проти течії", обґрунтована в роботах [10, 11, 19]. Вона належить до проекційно-еволюційних методів типу Годунова [20], які мають високу роздільність та можуть знаходити розривні розв'язки. Докладне описання напівдискретної центральної схеми "проти течії" представлено у роботі [21], тому тут наведемо лише загальні її особливості.

Система рівнянь мілкої води (1), (2) є неоднорідним законом збереження, який у векторному вигляді може бути записаний наступним чином:

$$U_t + F_x(U) = S(U(x, t), x, t), \quad (19)$$

де U – вектор консервативних змінних; F – вектор потоків цих змінних; S – вектор-функція, яка задає джерела втрат консервативних змінних:

$$U = \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} q \\ q^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh\left(\frac{dz_b}{dx} + S_f\right) \end{pmatrix}.$$

Метод скінченних об'ємів Годунова для розв'язання рівняння (19) ґрунтується на його інтегральній формі:

$$\frac{d\bar{U}(x, t)}{dt} = -[F(U(x + \Delta x/2, t)) - F(U(x - \Delta x/2, t))] + \bar{S}(U(x, t), x, t), \quad (20)$$

де $\bar{U}(x, t)$ і $\bar{S}(U(x, t), x, t)$ – осереднені значення консервативних змінних і функції джерела втрат по лінійному об'єму $I(x) = \{\xi : |\xi - x| \leq \Delta x/2\}$:

$$\bar{U}(x, t) \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{I(x)} U(\xi, t) d\xi, \quad (21)$$

$$\bar{S}(U(x, t), x, t) \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{I(x)} S(U(\xi, t), \xi, t) d\xi.$$

Інтегральний закон (20) є більш загальним, ніж його диференціальна форма (19), оскільки дозволяє описати розриви у розв'язках, тоді як похідні в точках розриву не визначаються.

На однорідній розрахунковій сітці в просторі $(x - t) : t^n = n\Delta t$, $x_j = j\Delta x$ з рівняння (20) впливає наступна чисельна схема відносно осереднених

консервативних змінних:

$$\bar{U}_j^{n+1} = \bar{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\tilde{F}_{j+\frac{1}{2}}^n - \tilde{F}_{j-\frac{1}{2}}^n] + \bar{S}_j^n, \quad (22)$$

де функція $\tilde{F}_{j\pm\frac{1}{2}}^n$ апроксимує осереднені по часові потоки змінних через границі контрольного об'єму:

$$\tilde{F}_{j\pm\frac{1}{2}}^n \approx \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(U(x_{j\pm\frac{1}{2}}, t)) dt. \quad (23)$$

В класичних upwind схемах для розв'язання гіперболічних рівнянь чисельний потік $\tilde{F}_{j\pm\frac{1}{2}}^n$ оцінюється за допомогою ріманівських алгоритмів (солверів) [22]. Ріманівські солвери, які обчислюють значення функції від розривної змінної, будуються на основі характеристичної інформації про величину і напрямки поширення збурень, що дозволяє максимально точно описувати розриви у розв'язках. Центральні алгоритми ґрунтуються на відомій схемі Лакса-Фрідрікса [23]. Вони є значно простішими та універсальнішими, але протягом довгого часу їхнім істотним недоліком була велика чисельна дифузія. В роботі [19] розроблений новий клас центральних схем, де інтегрування за часом пропонується виконувати окремо по тій частині контрольного об'єму, де змінна неперервна, і по області розриву, ширина якої оцінюється за допомогою локальних швидкостей поширення збурень. Застосування характеристичної інформації дозволяє істотно зменшити чисельну дифузію центральних алгоритмів, наблизивши їх до схем "проти течії".

В напівдискретних центральних схемах інтегрування по простору і по часові виконується послідовно, отже, вони зводяться до системи звичайних диференціальних рівнянь відносно осереднених консервативних змінних:

$$\frac{d\bar{U}_j(t)}{dt} = -\frac{H_{j+\frac{1}{2}}(t) - H_{j-\frac{1}{2}}(t)}{\Delta x} + \bar{S}_j(t), \quad (24)$$

де $H_{j\pm\frac{1}{2}}(t)$ – чисельні потоки змінних крізь границі j -го контрольного об'єму.

Вигляд функції $H_{j+\frac{1}{2}}(t)$ залежить від способу апроксимації (реконструкції) змінних на границях елементарних об'ємів. Схема другого порядку Курганова-Ноелля-Петрової [10] ґрунтується на лінійній реконструкції змінних:

$$\tilde{U}(x, t) = \bar{U}_j(t) + (U_x)_j(x - x_j), \quad x \in I_j. \quad (25)$$

Для мінімізації коливань реконструйованих змінних при визначенні похідних у (25) використовуються спеціальні нелінійні функції від локальних градієнтів, які називаються лімітерами. В цій

роботі застосовується однопараметрична $\min\text{mod}$ -функція [24]:

$$(U_x)_j = \min\text{mod} \left(\theta \frac{\bar{U}_{j+1} - \bar{U}_j}{\Delta x}, \frac{\bar{U}_{j+1} - \bar{U}_{j-1}}{2\Delta x}, \theta \frac{\bar{U}_j - \bar{U}_{j-1}}{\Delta x} \right), \quad (26)$$

де $\theta \in [1, 2]$. Зауважимо, що коливання змінних будуть меншими при малих значеннях параметру θ із зазначеного діапазону, але дисипація чисельної схеми при цьому збільшується.

Застосування лімітеру робить цю чисельну схему нелінійною, отже, її розв'язки мають принаймні другий порядок точності в областях монотонності змінних, крім того, усуваються коливання шуканих величин поблизу великих градієнтів або розривів. Завдяки цьому, схема, що розглядається, належить до класу TVD-методів (Total Variation Diminishing), для яких помилка дискретизації з часом не збільшується [25].

Побудова чисельного потоку для схеми (24) докладно описана у роботі [10]. Тут наведемо остаточний вигляд функції $H(t)$:

$$H_{j+\frac{1}{2}}(t) = \frac{a_{j+\frac{1}{2}}^+ F(U_{j+\frac{1}{2}}^-) - a_{j+\frac{1}{2}}^- F(U_{j+\frac{1}{2}}^+)}{a_{j+\frac{1}{2}}^+ - a_{j+\frac{1}{2}}^-} + a_{j+\frac{1}{2}}^+ a_{j+\frac{1}{2}}^- \left(\frac{U_{j+\frac{1}{2}}^+ - U_{j+\frac{1}{2}}^-}{a_{j+\frac{1}{2}}^+ - a_{j+\frac{1}{2}}^-} - q_{j+\frac{1}{2}} \right), \quad (27)$$

де $U_{j+\frac{1}{2}}^\pm$, $a_{j+\frac{1}{2}}^\pm$ – значення консервативних змінних та екстремальних хвильових швидкостей зліва і справа від границі $x_{j+\frac{1}{2}}$ відповідно.

Швидкості $a_{j+\frac{1}{2}}^\pm$ описують ширину області розриву змінної $U_{j+\frac{1}{2}}^\pm$ на границі елементарного об'єму. Вони знаходяться наступним чином:

$$a_{j+\frac{1}{2}}^- = \min \left\{ \lambda_1 \left(J(U_{j+\frac{1}{2}}^-) \right), \lambda_1 \left(J(U_{j+\frac{1}{2}}^+) \right), 0 \right\}, \quad (28)$$

$$a_{j+\frac{1}{2}}^+ = \max \left\{ \lambda_2 \left(J(U_{j+\frac{1}{2}}^-) \right), \lambda_2 \left(J(U_{j+\frac{1}{2}}^+) \right), 0 \right\},$$

де λ_1, λ_2 – власні значення Якобіану $J = \partial F / \partial U$ рівняння (19), причому $\lambda_1 = u - \sqrt{gh}$, $\lambda_2 = u + \sqrt{gh}$. Величина $q_{j+\frac{1}{2}}$ в (27) вводиться для зниження системної дифузії на проекційному кроці. Її вигляд можна знайти в [11].

Інтегрування по часові в проекційно-еволюційних методах, до яких належить чисельний алгоритм, що розглядається, зазвичай виконується за явною схемою. Її стійкість забезпечується використанням багатокрокових SSP-схем високих порядків (*Strong Stability Preserving*) [26], які будуються на основі методу Рунге-Кутта. Крок по часові в цих схемах повинен відповідати критерію Куранта-Фрідрікса-Леві:

$$\frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq CFL \quad (29)$$

при $CFL = 0.5$. Величина a в (29) є максимальною швидкістю поширення збурень у розрахунковій області на заданому часовому кроці:

$$a = \max_j \left\{ \max \left\{ a_{j+\frac{1}{2}}^+, a_{j+\frac{1}{2}}^- \right\} \right\}.$$

Важливою вимогою до чисельних алгоритмів, які створюються для розв'язання неоднорідних гіперболічних рівнянь, подібних до (19), є збереження стаціонарних розв'язків з порядком точності не нижче другого. Тобто, при моделюванні стаціонарних проблем повинен виконуватися баланс між лівою і правою частинами рівнянь. В схемі, що розглядається, це забезпечується застосуванням кусково-лінійної апроксимації дна і спеціальних квадратур для дискретизації правої частини рівняння [27].

Інша складність полягає в тому, щоб забезпечити коректне моделювання гідродинамічних змінних, коли глибина води наближається до нуля, зокрема, при поширенні фронтів змочення поверхні. Тоді коливання змінної поблизу розривів можуть зупинити розрахунок через те, що вона може стати негативною. В цій схемі додатність глибини потоку у всій області течії досягається за допомогою спеціальної процедури корекції змінних, введеної в [27].

Виконані в [21] докладні тестування центральної схеми проти течії на класичних гідравлічних прикладах і даних лабораторних вимірювань в одно- і двовимірному випадках свідчать про те, що представлена чисельна модель:

- добре описує малі збурення вільної поверхні,
- дозволяє прогнозувати розповсюдження фронтів змочення на дні (*wet/dry fronts*),
- здатна зберігати стаціонарні гідравлічні розв'язки,
- адекватно описує генерацію хвиль при руйнуванні дамб і гребель,
- дозволяє описувати гідравлічні течії в каналах зі складною топографією дна, у тому числі там, де є ділянки незмоченої донної поверхні.

2.2. Схема високого порядку для рівняння балансу наносів

Рівняння еволюції донної поверхні (3) часто записують у наступному вигляді:

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + \xi \frac{\partial q_b}{\partial x} = 0, \quad (30)$$

де $\xi = 1/(1 - p_m)$.

Оскільки поле течії, а за ним і потужність потоку наносів залежать від форми донної поверхні, рівняння (30) представляє собою нелінійний закон збереження відносно змінної z_b . Для його розв'язання повинні застосовуватися методи, які можуть знаходити розривні розв'язки (*shock capturing schemes*). Традиційним алгоритмам, які використовують центральні схеми Лакса-Вендорфа або Мак-Кормака, властива наявність високочастотних хибних осциляцій у розв'язках. В роботі [4] показано, що ці коливання є наслідком нелінійної природи морфологічного рівняння (30). Для згладжування розв'язків у цих алгоритмах застосовуються різні регуляризаційні процедури, наприклад, введення штучної в'язкості [28] або фільтрування [29]. Схеми проти течії, які будуються на основі ріманівських солверів [4], є більш стійкими, ніж центральні, але мають низький порядок точності, тоді як акуратне моделювання морфологічних процесів потребує схем високого порядку.

В роботі [12] представлений новий алгоритм для розв'язання еволюційного рівняння (30), в якому висока точність результатів досягається використанням зваженої істотно неосцилюючої апроксимації потоку наносів (*WENO-approximation*). WENO-схеми вперше були введені в 1994 році в роботі [30] і з тих пір активно залучаються до чисельного інтегрування диференціальних рівнянь у частинних похідних, у тому числі гіперболічного типу. Їхньою перевагою є високий порядок точності в областях монотонності шуканих величин і стійка, неосцилююча поведінка одержуваних розв'язків поблизу розривів. Проведені в [12] розрахунки тестової морфологічної задачі про розмив піщаного пагорбу виявили істотні переваги запропонованої WENO-схеми над класичними алгоритмами щодо моделювання деформацій донної поверхні.

В цій роботі WENO-схема з [12] буде інтегрована в загальну чисельну модель, яка виконує зв'язані розрахунки гідродинамічних і морфологічних параметрів потоку.

Сучасні *shock-capturing* алгоритми для розв'язання рівняння (30) ґрунтуються на його хвильовій апроксимації і використовують фазові швидкості поширення збурень на донній поверхні [28].

Як вже відмічалось, потужність потоку наносів q_b залежить від багатьох факторів - швидкості течії, глибини води, характеристик хвиль, фізичних властивостей частинок, тощо. Але, якщо розглядати морфологічний процес на окремому кроці по часові, коли рівень води, гідродинамічні параметри течії і властивості наносів фіксовані, то q_b можна вважати функцією лише від рівня дна z_b , і тоді виконується:

$$\frac{\partial q_b}{\partial x} = \frac{\partial q_b}{\partial z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x}. \quad (31)$$

З урахуванням (31) рівняння (30) приймає вигляд:

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + C(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial x} = 0, \quad (32)$$

де $C(z_b) = \xi \frac{\partial q_b}{\partial z_b}$ - фазова швидкість поширення збурень на донній поверхні.

Очевидно, що (32) є рівнянням адвекції відносно змінної z_b . З нього випливає, що морфологічна еволюція відбувається як нелінійне поширення деформацій дна. Перенос форми дна в негативному і позитивному напрямках характеризується фазовими швидкостями $C^- = \min\{C, 0\}$ і $C^+ = \max\{C, 0\}$ відповідно, так що

$$C(z) = C^-(z) + C^+(z). \quad (33)$$

Транспорт наносів також складається з двох частин:

$$q_b = q_{b-} + q_{b+}, \quad (34)$$

де

$$\begin{aligned} q_{b-} &= (1 - p_m) \int_0^{z_b} C^-(z) dz, \\ q_{b+} &= (1 - p_m) \int_0^{z_b} C^+(z) dz. \end{aligned} \quad (35)$$

Подібно до методу скінченних об'ємів, дискретизація рівняння (30) у схемі, що розглядається, виконується на сітці, яка складається з відрізків $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$, так що точки $x_i = i\Delta x$, в яких оновлюється дно, лежать посередині розрахункових елементів. Для обчислення $\partial q_b / \partial x$ в цих точках застосовується схема першого порядку:

$$\left(\frac{\partial q_b}{\partial x} \right)_i = \frac{\hat{q}_{bi+\frac{1}{2}} - \hat{q}_{bi-\frac{1}{2}}}{\Delta x}. \quad (36)$$

Величини $\hat{q}_{bi\pm\frac{1}{2}}$ в (36) є чисельними апроксимаціями потужності потоку наносів q_b на кінцях елементарного об'єму. Головна задача при побудові чисельної схеми полягає в тому, щоб вона як можна краще оцінювала $\hat{q}_{bi\pm\frac{1}{2}}$, оскільки від цього залежить якість одержуваних результатів.

В роботі [12] пропонується розщеплювати чисельні потоки на границях контрольних елементів на лівосторонній і правосторонній, які потім обчислюються з урахуванням напрямку поширення збурень на донній поверхні. Завдяки цьому, одержана схема має природу "проти течії" і, як всі аналогічні підходи, здатна забезпечити високу стійкість розрахунків. Відповідно до (34) в точці $x_{i+\frac{1}{2}}$ маємо:

$$\hat{q}_{bi+\frac{1}{2}} = \hat{q}_{bi+\frac{1}{2}}^- + \hat{q}_{bi+\frac{1}{2}}^+. \quad (37)$$

Односторонні потоки $\hat{q}_{bi+\frac{1}{2}}^\pm$ обчислюються, виходячи зі значень q_b в сусідніх до $x_{i+\frac{1}{2}}$ точках. Чим більше точок застосовується для оцінки, тим вищим є порядок чисельної схеми.

Зважена істотно неосцилююча upwind апроксимація для лівостороннього потоку наносів $\hat{q}_{bi+\frac{1}{2}}^-$ задається виразами:

$$\hat{q}_{bi+\frac{1}{2}}^- = \begin{cases} \omega_1 q_{i+\frac{1}{2}}^{(1)} + \omega_2 q_{i+\frac{1}{2}}^{(2)} + \omega_3 q_{i+\frac{1}{2}}^{(3)}, & C_{i+\frac{1}{2}} \geq 0, \\ 0, & C_{i+\frac{1}{2}} < 0, \end{cases} \quad (38)$$

де

$$\begin{aligned} q_{i+\frac{1}{2}}^{(1)} &= \frac{1}{3}q_{bi-2} - \frac{7}{6}q_{bi-1} + \frac{11}{6}q_{bi}, \\ q_{i+\frac{1}{2}}^{(2)} &= -\frac{1}{6}q_{bi-1} + \frac{5}{6}q_{bi} + \frac{1}{3}q_{bi+1}, \\ q_{i+\frac{1}{2}}^{(3)} &= \frac{1}{3}q_{bi} + \frac{5}{6}q_{bi+1} - \frac{1}{6}q_{bi+2}. \end{aligned} \quad (39)$$

Ця апроксимація використовує три точки, які лежать зліва від границі $x_{i+\frac{1}{2}}$ (з індексами $i-2, i-1, i$), отже, має 3-й порядок точності. Подальше підвищення порядку схеми досягається за рахунок вагових коефіцієнтів. В роботі [31] описаний спосіб розрахунку коефіцієнтів $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, при яких схема (38) має 5-й порядок. Наведемо тут кінцеві результати цього дослідження:

$$\omega_1 = \frac{\alpha_1}{S_\alpha}, \quad \omega_2 = \frac{\alpha_2}{S_\alpha}, \quad \omega_3 = \frac{\alpha_3}{S_\alpha}, \quad (40)$$

де $S_\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{0.1}{(S_1 + \epsilon)^2}, \quad \alpha_2 = \frac{0.6}{(S_2 + \epsilon)^2}, \\ \alpha_3 &= \frac{0.3}{(S_3 + \epsilon)^2}. \end{aligned} \quad (41)$$

Величина ϵ в формулах (41) є малим числом, яке вводиться, щоб виключити ділення на нуль. Дискретні функції S_1, S_2, S_3 називаються мірою згладжування і виражаються через потік наносів у сусідніх до границі $x_{i+\frac{1}{2}}$ точках. Їхній вигляд можна знайти в [12].

Правосторонній потік $\hat{q}_{bi+\frac{1}{2}}^+$ розраховується за аналогічною технологією:

$$\hat{q}_{bi+\frac{1}{2}}^+ = \begin{cases} \omega_4 q_{i+\frac{1}{2}}^{(4)} + \omega_5 q_{i+\frac{1}{2}}^{(5)} + \omega_6 q_{i+\frac{1}{2}}^{(6)}, & C_{i+\frac{1}{2}} < 0, \\ 0, & C_{i+\frac{1}{2}} \geq 0, \end{cases} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} q_{i+\frac{1}{2}}^{(4)} &= -\frac{1}{6}q_{bi-1} + \frac{5}{6}q_{bi} + \frac{1}{3}q_{bi+1}, \\ q_{i+\frac{1}{2}}^{(5)} &= \frac{1}{3}q_{bi} + \frac{5}{6}q_{bi+1} - \frac{1}{6}q_{bi+2}, \\ q_{i+\frac{1}{2}}^{(6)} &= \frac{11}{6}q_{bi+1} - \frac{7}{6}q_{bi+2} + \frac{1}{3}q_{bi+3}. \end{aligned} \quad (43)$$

Вагові коефіцієнти $\omega_4, \omega_5, \omega_6$ обчислюються за формулами (40), де

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{0.3}{(S_4 + \epsilon)^2}, \quad \alpha_2 = \frac{0.6}{(S_5 + \epsilon)^2}, \\ \alpha_3 &= \frac{0.1}{(S_6 + \epsilon)^2}. \end{aligned} \quad (44)$$

Вигляд функцій S_4, S_5, S_6 є в роботі [12].

Аналогічно оцінюється потік на границі $x_{i-\frac{1}{2}}$, лише всі індекси у формулах зсуваються на одиницю вліво.

Для обчислення хвильових швидкостей на границях елементів сітки в класичних алгоритмах "проти течії" використовується центральна кінцево-різницева формула [4]:

$$C_{i+\frac{1}{2}} = \xi \frac{q_{bi+1} - q_{bi}}{z_{bi+1} - z_{bi}}, \quad (45)$$

яка втрачає чинність, коли $z_{bi+1} \approx z_{bi}$. Перевагою представленої в цій роботі схеми є те, що вона потребує інформації лише про знак швидкості, і тоді замість ділення в (45) може застосовуватися множення $(q_{bi+1} - q_{bi})(z_{bi+1} - z_{bi})$, яке виключає невизначеність при $(z_{bi+1} - z_{bi}) \approx 0$.

Якщо для дискретизації рівняння (30) по часові застосувати метод Ейлера, то остаточна чисельна схема для розрахунку еволюції донної поверхні набуває вигляду:

$$z_{bi}^{n+1} = z_{bi}^n - \frac{\Delta t_m}{\Delta x} \xi \left(\hat{q}_{bi+\frac{1}{2}} - \hat{q}_{bi-\frac{1}{2}} \right), \quad (46)$$

де Δt_m – крок дискретизації за часом морфологічного процесу.

В роботі [12] показано, що застосування багатокрокових схем типу Рунге-Кутта до моделювання динаміки дна слабо впливає на результати, в той самий час, воно потребує перерахунку гідродинамічних параметрів течії на проміжних кроках. Такий підхід може виявитися занадто затратним

при виконанні практичних розрахунків. Представлений тут алгоритм, який поєднує WENO-схему з методом Ейлера, є оптимальним щодо точності результатів і простоти реалізації. Зазначимо також, оскільки схема (46) є явною, вона потребує виконання стандартного критерію стійкості Куранта-Фрідрікса-Леві:

$$c \frac{\Delta t_m}{\Delta x} \leq 1, \quad (47)$$

де $c = \max_j \left\{ |C_{i+\frac{1}{2}}| \right\}$.

3. ТЕСТОВІ РОЗРАХУНКИ

В цьому розділі оцінюється здатність представленої чисельної моделі розраховувати гідродинамічні та морфологічні зміни у відкритих водоймах. Для того щоб виявити, який з двох підходів, стаціонарний чи нестаціонарний, забезпечує вищу точність результатів, гідроморфодинамічна проблема (1)–(3) розглядається у двох постановках.

У першій постановці, позначимо її **A1**, вважається, що морфологічні зміни на донній поверхні відбуваються так повільно, що не впливають на течію. Тоді рівняння мілкої води (1)–(2) розв'язуються при незмінному дні до тих пір, поки течія не досягне стану рівноваги, що відповідає виконанню наступного критерію:

$$|w_i^{n+1} - w_i^n| \leq tol, \quad (48)$$

де w_i – рівень вільної поверхні у вузлах розрахункової сітки; tol – задане мале значення. Після цього інтегрується еволюційне рівняння (3) для дна за умови, що всі параметри водної течії фіксовані. Очевидно, що в цьому формулюванні хвильові швидкості поширення збурень у гідродинамічному і морфологічному процесах істотно відрізняються, отже, морфологічний крок по часові Δt_m є набагато більшим, ніж гідродинамічний Δt . Загальний час процесу визначається за морфологічним кроком.

В нестаціонарній постановці, позначеної як **A2**, ніяких умов на течію і еволюцію дна не накладається, а гідродинамічні і морфологічне рівняння розв'язуються в межах одного й того самого кроку по часові Δt .

Тестові розрахунки, виконані в цій роботі, включають моделювання відомих морфологічних проблем, які мають аналітичні розв'язки [4, 12]. Крім того, що одержані чисельні результати порівнюються з точними розв'язками, у всіх морфологічних розрахунках перевіряється збереження об'єму твердої речовини. Її загальний об'єм у заданій області $[B_1, B_2]$ вираховується за формулою:

$$V(t) = \int_{B_1}^{B_2} (z_b(x, t) - z_{b\infty}) dx, \quad (49)$$

де $z_{b\infty}$ – умовний рівень незбуреного дна. Відносна помилка розрахунків обчислюється як

$$Error = \frac{V(t) - V(0)}{V(0)}. \quad (50)$$

3.1. Розмив піщаного пагорбу у стаціонарному потоці

Цей класичний приклад застосовується для апробації чисельних схем, які моделюють транспорт наносів у придонній області [12]. Розраховується розмив симетричного ізольованого пагорбу, розташованого на дні каналу, в умовах, коли гідродинамічні параметри течії не змінюються.

Початкову конфігурацію дна задає функція:

$$z_b(x, 0) = -h_0 + 2 \exp[-\beta(x - x_c)], \quad (51)$$

де h_0 – глибина води над горизонтальним дном; x_c – центр пагорбу; β – параметр, який визначає крутизну пагорбу. Покладається:

$$h_0 = 6 \text{ м}, \quad x_c = 150 \text{ м}, \quad \beta = 0.01.$$

Довжина розрахункової області дорівнює 300 м. Рівень та витрата води протягом всього розрахунку вважаються незмінними:

$$w(x, t) = 0, \quad q(x, t) = 10 \text{ м}^2/\text{с}.$$

Потужність потоку зважених частинок у розрахунках оцінюється за степеневою формулою Грасса (7) при $A_g = 0.001 \text{ с}^2/\text{м}$, пористість ґрунту $p_m = 0.4$. Параметри розрахункової схеми:

$$\Delta x = 1 \text{ м}, \quad \Delta t = 0.1 \text{ с}.$$

Результати розрахунків та їхнє порівняння з точним розв'язком [12] представлені на рис. 2. Тут можна бачити, що трансформації пагорбу внаслідок розмиву призводять до формування гострого фронту седиментних частинок, який рухається за течією. Важливим є те, що чисельна схема описує зміни конфігурації дна без хибних осциляцій і не втрачає стійкості протягом достатньо довгого розрахункового проміжку. Одержані чисельні результати добре узгоджуються з точним розв'язком.

3.2. Розмив піщаного пагорбу у нестаціонарному потоці

На цьому прикладі з роботи [4] тестується чисельний алгоритм для розв'язання повної системи гідроморфодинамічних рівнянь. Тут моделюються як еволюція донної поверхні, так і зумовлені нею зміни гідродинамічних параметрів течії. Розглядається канал довжиною 1000 м, на дні якого, при

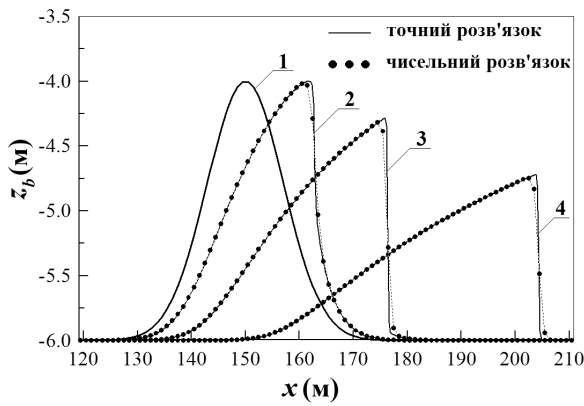


Рис. 2. Змінювання розмиву піщаного пагорбу у стаціонарному потоці. Порівняння чисельних результатів з точним розв'язком:
1 - $t = 0$; 2 - $t = 600$ с; 3 - $t = 2000$ с; 4 - $t = 6000$ с.

$300 \text{ м} \leq x \leq 500 \text{ м}$, розташований симетричний ізольований пагорб висотою 1 м, форма якого описується функцією:

$$z_b(x, 0) = \sin^2\left(\frac{\pi(x - 300)}{200}\right).$$

На початку розрахунків поверхня води незбурена, а витрата води скрізь в області постійна. Покладається:

$$w(x, 0) = 10 \text{ м}, \quad q(x, 0) = 10 \text{ м}^2/\text{с}.$$

Просторова сітка має крок $\Delta x = 5 \text{ м}$, крок по часові Δt в гідродинамічних розрахунках обчислюється з критерію Куранта-Фрідрікса-Леві (29) при $CFL = 0.5$, $\Delta t_m = 300 \text{ с}$. Зазначимо також, що на обох границях розрахункової області накладається умова відкритого каналу, яка означає вільне перетікання води і наносів через границю.

Потужність седиментного потоку оцінюється за степеневою формулою Грасса (7) при $A_g = 1 \text{ с}^2/\text{м}$ та $A_g = 0.001 \text{ с}^2/\text{м}$, що описує сильну і слабку взаємодію транспорту наносів з водною течією, відповідно, пористість ґрунту $p_m = 0.4$.

Повна гідроморфодинамічна проблема розглядається в обох постановках – **A1** і **A2**. Щоб уникнути різкого старту морфологічного процесу, спочатку знаходяться параметри стаціонарної течії, які вона має при фіксованій формі дна. Критерієм досягнення стаціонарного стану є умова (48) при $tol = 10^{-8}$. На рис. 3 наведені початкова конфігурація дна, а також форма вільної поверхні у стаціонарному потоці над нерозмивним пагорбом. З цих результатів випливає, що над випуклим дном поверхня води прогинається. Оскільки пагорб, що тут розглядається, має незначну висоту у порівнянні з глибиною води, то викривлення вільної поверхні є дуже слабким, і його не видно на основному графіку. Залежність, представлена на

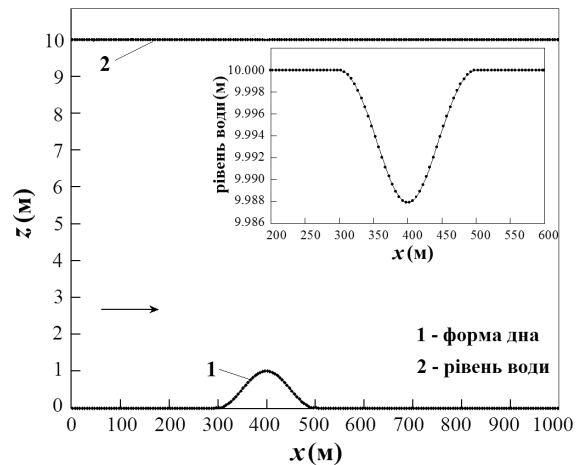


Рис. 3. Початкова конфігурація дна і рівень води в стаціонарному потоці над нерозмивним пагорбом

допоміжному рисунку, свідчить про те, що поверхня води над таким пагорбом прогинається трохи більше, ніж на 1 мм. Здатність застосованої тут чисельної схеми описувати такі незначні зміни параметрів течії без хибних коливань підтверджує її високу точність щодо розв'язання рівнянь мілкої води.

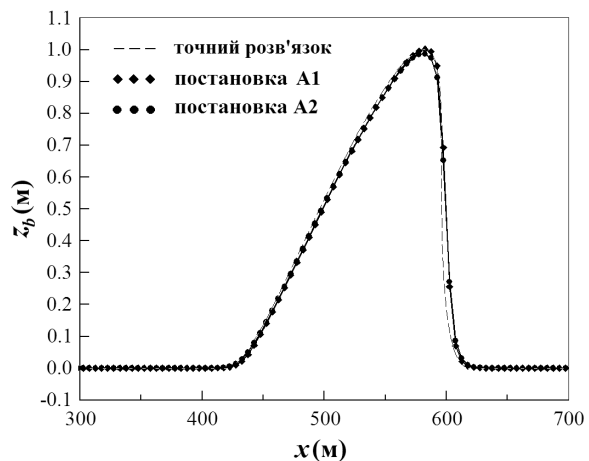


Рис. 4. Форма розмивного пагорбу при $t = 238079 \text{ с}$, $A_g = 0.001 \text{ с}^2/\text{м}$. Порівняння чисельних результатів з точним розв'язком

Отримані параметри стаціонарної течії над нерозмивним пагорбом покладаються у якості початкових умов повної гідроморфологічної проблеми, яка розраховує динаміку розмиву і зумовлені нею зміни параметрів водної течії. Рис. 4 ілюструє конфігурацію розмивного дна $z_b(x)$ при $t = 238079 \text{ с}$ (≈ 65 годин), яка одержана при слабкій взаємодії транспорту наносів з течією води. Тут порівнюються результати розрахунків незв'я-

заної **A1** і зв'язаної **A2** задач між собою, а також з наближеним аналітичним розв'язком, одержаним в роботі [4]. Можна бачити, що чисельна схема забезпечує акуратне моделювання придонного транспорту наносів в обох випадках. Це проявляється у відсутності хибних коливань у чисельних результатах та їхньої відповідності до аналітичного розв'язку.

Разом із топографією дна змінюються також гідродинамічні параметри течії. Рис. 5, *a* ілюструє форму вільної поверхні, яка відповідає дну, представленою на рис. 4. Можна бачити, що в процесі розмиву пагорбу генерується перепад глибин (скачок), який рухається разом з донним фронтом седиментних частинок. Викривлений профіль швидкості над розмитим пагорбом (рис. 5, *b*) демонструє наявність великих градієнтів швидкості над фронтальною частиною нерівності. На рис. 4, 5 видно, що в рамках розглянутого часового періоду (до 70 годин) результати моделювання за схемами **A1** і **A2** практично не відрізняються.

Щоб прояснити, чи не втрачається стійкість чисельної схеми з часом, ця тестова задача розраховувалася з тими самими параметрами до $t = 150$ годин (5400000 с). На рис. 6 показані конфігурації донної поверхні, одержані в незв'язаній **A1** (крива 2) і зв'язаній **A2** (крива 3) постановках. З них випливає, що оцінки напрямку і швидкості транспорту наносів в обох підходах співпадають, але наявність осциляцій на кривій 2 вказує на те, що застосування стаціонарної моделі з часом може призвести до втрати стійкості чисельної схеми.

Перевага зв'язаної постановки **A2** у довгострокових розрахунках підтверджується оцінкою відносної помилки (50) щодо збереження об'єму твердої речовини в чисельному моделюванні. Зображені на рис. 7 залежності помилки від часу показують, що стаціонарний підхід **A1** є більш коректним у короткострокових розрахунках, але на великому періоді його помилка збільшується досить швидко, що, очевидно, пов'язане з генерацією хибних коливань у результатах. Нестационарна постановка **A2** забезпечує високу точність результатів, але на її реалізацію потрібно набагато більше комп'ютерного часу, оскільки морфологічна еволюція розраховується тут з тим самим кроком Δt , що й гідродинамічна. Зазначимо, що в обох випадках помилка не перевищує порядок 10^{-4} , це свідчить про коректність представленої тут чисельної схеми щодо інтегрування законів збереження.

На рис. 8 показані динаміка піщаного пагорбу і відповідні до неї зміни на поверхні води, розраховані при сильній взаємодії потоку води і транспорту наносів ($A_g = 1 \text{ с}^2/\text{м}$). Для розв'язання

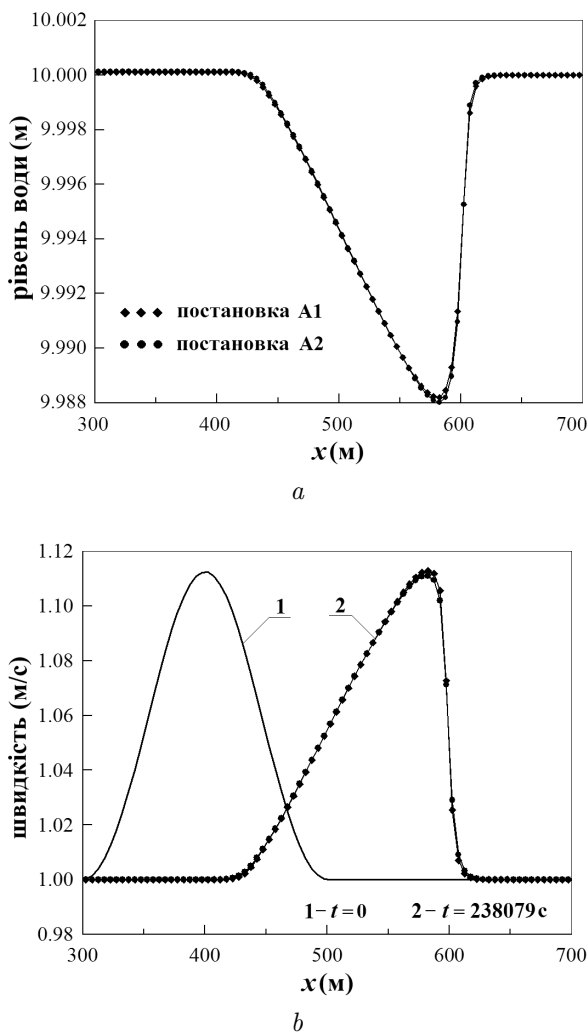


Рис. 5. Параметри гідродинамічної течії над розмитим пагорбом при $t = 238079$ с:
 а – форма вільної поверхні; б – швидкість течії

цієї задачі використовується нестационарна постановка **A2**, яка враховує взаємний вплив процесів. Представлені результати демонструють еволюцію дна протягом 15 хвилин. Тут можна бачити швидке переміщення пагорбу за течією і формування фронту седиментних частинок, що супроводжується утворенням хвилі на поверхні води. З часом, амплітуда цієї хвилі падає пропорційно до зменшення висоти пагорбу. Стійкість розрахунків і відсутність малих хибних коливань у результатах показують, що застосований чисельний алгоритм здатен моделювати гідралічні процеси з різкою зміною параметрів.

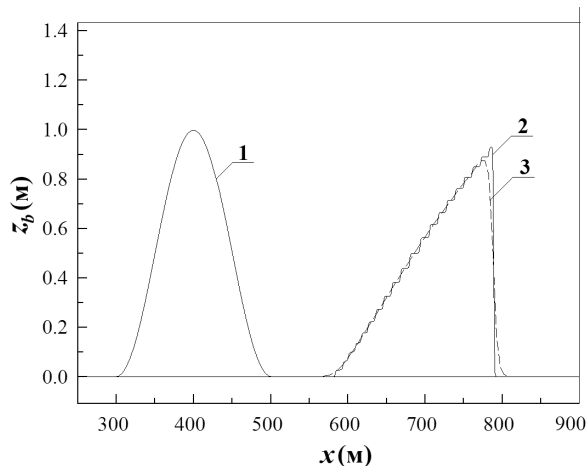


Рис. 6. Форма розмивного пагорбу при $t = 150$ годин:
 1 – початкова конфігурація пагорбу; 2, 3 – пагорб, розрахований в моделях **A1** і **A2**, відповідно

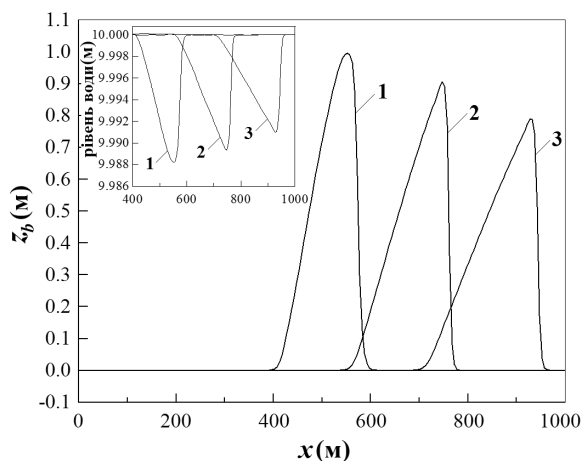


Рис. 8. Динаміка розмивного пагорбу та еволюція вільної поверхні при сильній взаємодії потоку води і транспорту наносів:
 1 – $t = 200$ с; 2 – $t = 500$ с; 3 – $t = 800$ с

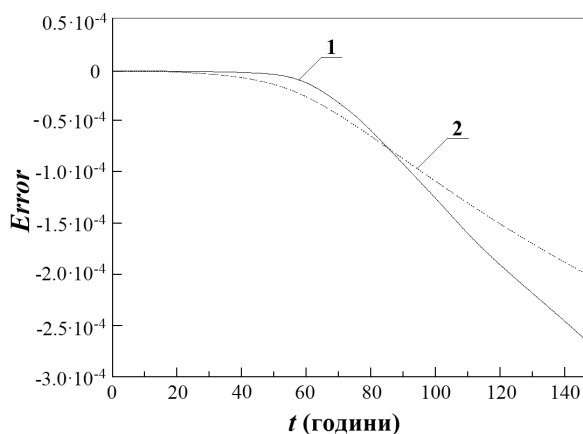


Рис. 7. Відносна помилка морфологічних розрахунків:
 1 – у стаціонарній моделі **A1**;
 2 – у нестационарній моделі **A2**

4. МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ КРУПНОМАСШТАБНИХ НЕРІВНОСТЕЙ РІЧКОВОГО ДНА

Деформації великих просторових масштабів на донній поверхні можуть бути як частиною природного рельєфу, так і наслідком інтенсивної промислової діяльності у береговій зоні. Такі утворення викликають порушення балансу наносів і поширення ерозії в річкових руслах, що може призвести до пошкоджень та руйнувань інженерних систем, які експлуатуються під водою (мостових опор, трубопроводів, кабелів та ін.). Тому дослідження еволюції нерівностей на річковому дні є важливим для попередження небезпечних екологічних та техногенних явищ в річкових басейнах.

4.1. Розмив піщаного пагорбу

Тут досліджуються механізм розмиву підводного пагорбу, а також зворотній вплив цього процесу на гідродинамічну течію. Розглядається канал довжиною 1000 м, на дні якого розташований симетричний піщаний пагорб, локалізований між 300 і 500 м. Головним чинником, який визначає деформації пагорбу в процесі розмиву, є швидкість потоку води навколо нього. Її величина залежить не лише від витрати води в каналі, а й від того, наскільки нерівність перекриває потік (від коефіцієнту запирання). Для дослідження впливу цієї характеристики на розмив будемо розглядати підводні пагорби різної висоти $d = 1$ м, $d = 1.5$ м і $d = 2$ м при одних і тих же початкових витраті q і рівні води w в каналі. Покладається:

$$w(x, 0) = 5 \text{ м}, \quad q(x, 0) = 10 \text{ м}^2/\text{с}.$$

Потужність потоку седиментних частинок оцінюється за степеневим законом (7) при $A_g = 0.005 \text{ с}^2/\text{м}$, пористість ґрунту $p_m = 0.4$. Інтегрування рівнянь (1)–(3) виконується в рамках зв'язаної постановки **A2** при $\Delta x = 2.5$ м, $CFL = 0.5$.

Спочатку інтегруються рівняння мілкої води до тих пір, поки течія над нерозмивним дном не набуде стану рівноваги. Одержані розподіли швидкості води u вздовж горизонтальної осі каналу x над пагорбами різної висоти d у стаціонарному потоці представлені на рис. 9. Вони показують, що залежність швидкості води від висоти пагорбу має суто нелінійний характер, що зумовлене природою закону збереження (1)–(2). Виконані за результатами рис. 9 оцінки числа Фруда ($Fr = u/\sqrt{gh}$) показують, що над пагорбом висотою 1 м і 1.5 м

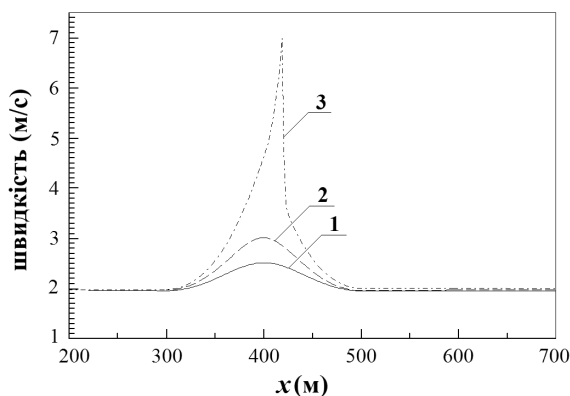


Рис. 9. Залежності швидкості потоку води u від горизонтальної координати x при різній висоті пагорбу:

1 – $d = 1$ м; 2 – $d = 1.5$ м; 3 – $d = 2$ м

ця характеристика змінюється від 0.3 до 0.4, тобто потік залишається докритичним у всій області. В той самий час, різке збільшення швидкості води над пагорбом висотою 2 м супроводжується переходом течії у закритичний режим, для якого $Fr \geq 1$.

На рис. 10 суцільними лініями показані початкові конфігурації дна і відповідні до них форми вільної поверхні для стаціонарної течії. Можна бачити, що у докритичному потоці поверхня води над пагорбом плавно прогинається (рис. 10, *a*). Амплітуда прогину складає приблизно 0.5 м. Перехід течії у закритичний режим супроводжується різким перепадом рівня води над пагорбом (гідрравлічним стрибком), величина якого перевищує 1.5 м (рис. 10, *b*). В цій області локалізується значна енергія води, що може викликати швидкі нерівномірні зміни як у потоці, так і на дні каналу.

Моделювання розмиву пагорбу показує, що першими у потік наносів втягуються частинки піску, розташовані на підвітряному боці пагорбу. Пісок, який знаходиться нагорі, переноситься швидше, ніж той, що прилягає до підніжжя нерівності. Як результат, верхня частина пагорбу зсувається наперед, і, таким чином, генерується різкий фронт седиментних частинок, який рухається за течією води. У закритичному потоці (рис. 10, *b*) розмив починається із сильного гідрравлічного удару об поверхню пагорбу, внаслідок чого він деформується. Але надалі поверхня пагорбу згладжується, і процес протікає за тим же сценарієм, що і на рис. 10, *a*. По мірі розмиву пагорб розтягується і набуває форми довгої нерівності з гострим переднім краєм. Розтягування і відповідне зменшення висоти пагорбу продовжуються до тих пір, поки профіль донної поверхні не вирівнюється. З рис. 10

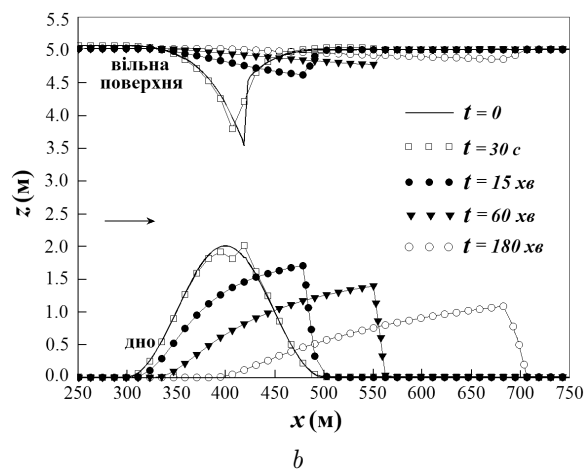
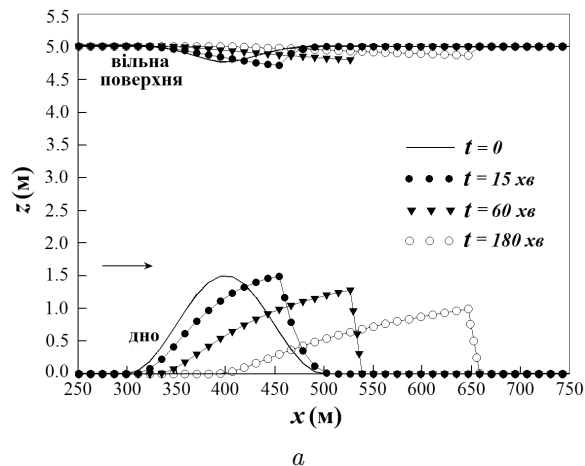


Рис. 10. Динаміка розмиву піщаного пагорбу і еволюція вільної поверхні при різній висоті пагорбу:
 $a - d = 1.5$ м; $b - d = 2$ м

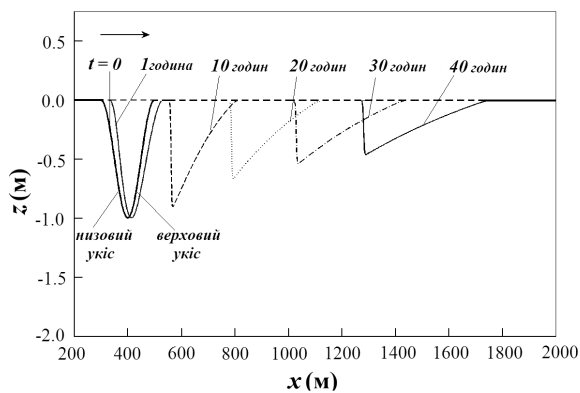
впливає, що при однакових гідродинамічних умовах на вході у канал нерівності більшого масштабу трансформуються швидше, ніж менші, що, очевидно, зумовлене більшою швидкістю води навколо великих нерівностей.

З рис. 10 випливає також, що форма вільної поверхні в процесі розмиву пагорбу змінюється відповідно до еволюції дна. Одночасно з формуванням фронту седиментних частинок на поверхні води утворюється хвиля, яка рухається паралельно переміщенням твердої речовини на дні каналу.

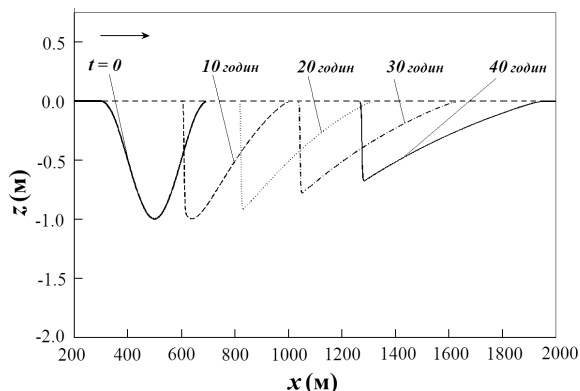
4.2. Обтікання і розмив донних заглиблень

В цьому розділі представлені результати чисельного моделювання транспорту наносів навколо донних заглиблень великих просторових масштабів. Такі заглиблення часто утворюються при розробці руслових кар'єрів для потреб будівель-

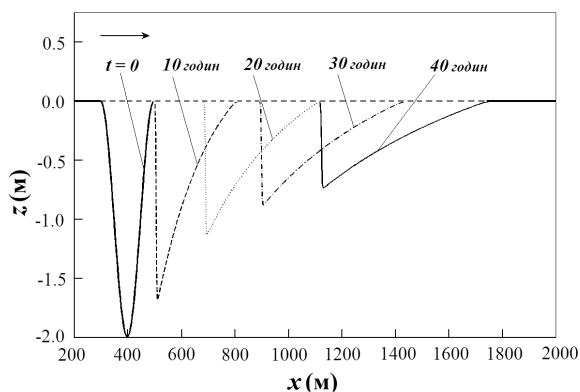
ної галузі. Через свої розміри вони можуть істотно впливати як на характеристики річкової течії, так і на морфологію русла, що може призвести до пошкоджень та руйнувань річкових інженерних споруд.



a



b



c

Рис. 11. Динаміка розмиву заглиблень різних розмірів при $w = 5$ м, $q = 10 \text{ м}^2/\text{с}$:

- a – глибина = 1 м, діаметр = 200 м;
- b – глибина = 1 м, діаметр = 400 м;
- c – глибина = 2 м, діаметр = 200 м

Тут аналізується вплив на динаміку заглиблень

їхніх розмірів. Розглядаються заглиблення параболічної форми глибиною 1 і 2 м та діаметром 200 і 400 м. Довжина розрахункового каналу дорівнює 2000 м, рівень і витрата води в каналі складають $w = 5$ м та $q = 10 \text{ м}^2/\text{с}$ відповідно. Об'єм стоку наносів оцінюється за степеневим законом (7) при $A_g = 0.005 \text{ с}^2/\text{м}$, $p_m = 0.4$. Параметри розрахункової схеми: $\Delta x = 2.5$ м, $CFL = 0.5$.

Результати розрахунків (рис. 11) показують, що якісно динаміка розмиву піщаного кар'єру не залежить від його розмірів. Відносно транспорту наносів у ньому є дві різні області: зона відкладення наносів (верховий укiс) і зона розмиву (низовий укiс). Підходячи до заглиблення, донні наноси, що транспортуються потоком, скочуються по верхньому укосі. Частина з них відкладається на бічній стінці, через що її нахил зменшується. Після того, як ця стінка набуває вертикальної форми, наноси опускаються на дно, швидко засипаючи кар'єр. В той самий час, удар потоку води об низовий укiс викликає його розмив, внаслідок чого збільшується діаметр кар'єру.

Крім того, що в процесі розмиву змінюється поперечний профіль заглиблення, воно ще й рухається вниз за течією. Порівняльний аналіз результатів, представлених на рис. 11, свідчить про те, що швидкість переміщення заглиблень більше залежить від їхньої глибини, ніж від поперечного розміру. Глибокі ями (рис. 11,c) рухаються набагато повільніше, ніж мілкі (рис. 11,a,b).

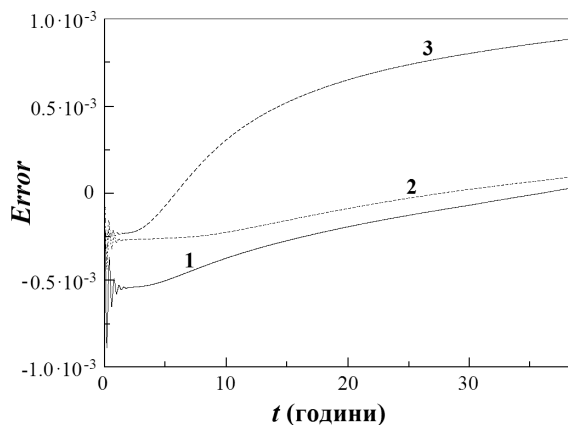


Рис. 12. Відносна помилка морфологічних розрахунків при обтіканні заглиблень різних розмірів:

- 1 – глибина = 1 м, діаметр = 200 м; 2 – глибина = 1 м, діаметр = 400 м;
- 3 – глибина = 2 м, діаметр = 200 м

Для оцінки точності проведених розрахунків на рис. 12 аналізується відносна помилка (50), за якою оцінюються втрати твердої речовини в процесі моделювання. Тут можна бачити, що у всіх розглянутих випадках її порядок не перевищує

10^{-3} . Найбільша помилка має місце при моделюванні розмиву глибоких ям, що пов'язане з великими градієнтами донної поверхні. Збільшення точності розрахунків може бути досягнуте зменшенням кроку просторової дискретизації.

Представлені результати свідчать про високу точність та стійкість виконаних гідроморфодинамічних розрахунків, що підтверджує здатність розробленого чисельного методу моделювати динаміку річкових течій і транспорт наносів у них на великих часових періодах. Очевидно, що успіх моделювання реальних морфологічних процесів істотно залежить від гіпотез, покладених в основу моделі, зокрема, про об'єм стоку наносів та тертя донної поверхні. Степенева залежність стоку наносів від швидкості потоку води, яка використовувалася у вище наведених розрахунках, описує процес лише наближено, і застосовується, головним чином, для тестування чисельних алгоритмів та якісних оцінок. Для одержання правдивих кількісних характеристик морфологічних процесів необхідно залучення більш практичних оцінок потоку наносів і гідравлічних параметрів.

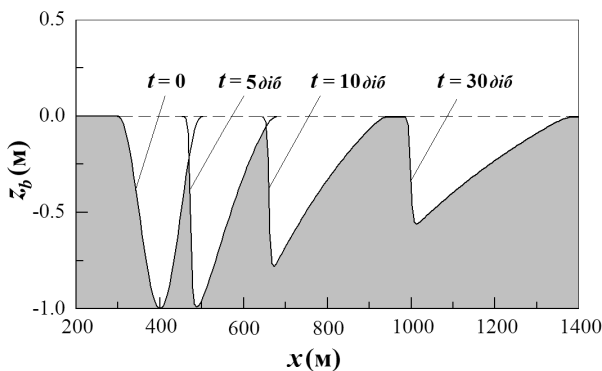


Рис. 13. Динаміка розмиву заглиблення глибиною 1 м і діаметром 200 м при $w = 5$ м, $q = 5$ м²/с

На рис. 13 наведені результати моделювання розмиву піщаного кар'єру, одержані з урахуванням тертя на донній поверхні, яке оцінювалося за законом Маннінга (5). Значення коефіцієнту шорсткості n бралось з діапазону $0.0125 \div 0.025$ с/м^{1/3}, який відповідає даним натурних експериментів на руслових ділянках річки Дніпро [32]. Потужність стоку наносів оцінювалася за формулою Мейера-Петера і Мюллера (13), що добре описує об'єм стоку наносів для рівнинних річок. Нахил дна в розрахунках покладался 2° . Діаметр частинок піску $d_s = 0.4$ мм, відношення густини седименту до густини води $\rho_s/\rho = 2.65$, що властиве для кварцу. Параметри гідродинамічної течії: $w = 5$ м, $q = 5$ м²/с. Отримані результати дозволяють оці-

нити характеристики "дрейфу" донного заглиблення заданих розмірів (глибина = 1 м, діаметр = 200 м). З рис. 13 випливає, що за добу таке заглиблення зноситься течією, середня швидкість якої дорівнює 1 м/с, приблизно на 20 м. Розвинені моделі і виконані розрахунки дають можливість спрогнозувати розвиток гідроморфодинамічної ситуації в річкових басейнах за наявності там піщаних кар'єрів великих просторових масштабів.

ВИСНОВКИ

1. Розвинений чисельний алгоритм для моделювання гідроморфодинамічних процесів у відкритих водоймах. Він поєднує центральну схему другого порядку Курганова-Ноелля-Петрової для інтегрування гідродинамічних рівнянь зі схемою "проти течії" п'ятого порядку, за якою розраховується еволюція донної поверхні. Остання ґрунтується на зваженій істотно неосцілюючій апроксимації потоку наносів.
 2. Розглянуті одновимірні реалізації цього алгоритму для незв'язаної і частково зв'язаної систем гідроморфодинамічних рівнянь. Виконані тестові розрахунки еволюції піщаного пагорбу, розташованого на дні прямокутного каналу. Порівняння одержаних результатів з відомими аналітичними розв'язками показують, що обидві моделі забезпечують прийнятну точність, але частково зв'язане моделювання краще підходить для довгострокових розрахунків, оскільки майже повністю виключає хибні коливання шуканих розв'язків.
 3. Проведені довгострокові розрахунки, в яких отримані часові і просторові характеристики еволюції глибоких ям (кар'єрів) та піщаних пагорбів на річковому дні. Показано, що в процесі розмиву не лише змінюється поперечний профіль нерівності, а й відбувається її перенос за течією.
 4. Одержані дані про швидкість переносу піщаних кар'єрів у реальних умовах річкової течії. Вони дозволяють спрогнозувати розвиток гідроморфодинамічної ситуації в річкових басейнах зі складним дном, а також оцінити вплив крупномасштабних донних утворень на еволюцію течій, розмивні процеси поблизу берегів, стійкість гідротехнічних споруд, тощо.
1. Сухомел Г. И. Исследование гидравлики открытых русел и сооружений.— Киев: Наукова думка, 1965.— 112 с.

2. Гришанин К.В. Динамика русловых потоков.– Ленинград: Госметеиздат, 1979.– 276 с.
3. Wu W. Computational river dynamics.– London: Taylor & Francis, 2008.– 488 p.
4. Hudson J., Sweby P.K. Formulations for numerically approximating hyperbolic systems governing sediment transport // J. Scient. Comput.– 19.– 2003.– P. 225–252.
5. Cunge J.A., Holly F.M., Verway A. Practical aspects of computational river hydraulics.– London: Pitman, 1980.– 300 с.
6. Castro-Diaz M.J., Fernandez-Nieto E.D., Ferreira A.M. Sediment transport models in shallow water equations and numerical approach by high order finite volume methods // J. Comput. and Fluids.– 37.– 2008.– P. 299–316.
7. Goutiere L., Soares-Frazao S., Savary C., Laraichi T., Zech Y. One-dimensional model for transient flows involving bed-load sediment transport and changes in flow regimes // J. Hydr. Eng.– 134(6).– 2008.– P. 726–735.
8. Kubatko E., Westerink J., Dawson C. An unstructured grid morphodynamic model with a discontinuous galerkin method for bed evolution // J. Ocean Model.– 15.– 2006.– P. 71–89.
9. Bouchut F., Morales de Luna T. An entropy satisfying scheme for two-layer shallow water equations with uncoupled treatment // J. Math. Model. and Num. Anal.– 42.– 2008.– P. 683–698.
10. Kurganov A., Noelle S., Petrova S. Semidiscrete central-upwind schemes for hyperbolic conservation laws and Hamilton-Jacobi equations // SIAM J. Sci. Comput.– 23(3).– 2001.– P. 707–740.
11. Kurganov A., Lin C.-T. On the reduction of numerical dissipation in central-upwind schemes // Commun. Comput. Phys.– 2(1).– 2007.– P. 141–163.
12. Long W., Kirby J.T., Shao Z. A numerical scheme for morphological bed level calculations // J. Coast. Eng.– 55.– 2008.– P. 167–180.
13. de Saint-Venant B. Theorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues des riviere at al'introduction des marees dans leur lit // C. R. Acad. Sci., Paris.– 73.– 1871.– P. 147–154.
14. Einstein H.A. Formulas for the transportation of bed load // J.Trans. ASCE.– 107.– 1942.– P. 561–573.
15. Grass A.J. Sediment transport by waves and currents.– SERC London Center Marine Technology: Report FL29, 1981.– 125 p.
16. Meyer-Peter E., Muller R. Formulas for bed-load transport // Report on 2nd meeting on international association on hydraulic structures research.– Stockholm.– 1948.– P. 39–64.
17. Van Rijn Sediment transport (I): bed-load transport // J. Hydraulic Div. ASCE.– 110.– 1984.– P. 1431–1456.
18. Nielsen P. Coastal bottom boundary layers and sediment transport.– London: World Scientific Pub Co Ink, 1992.– 250 p.
19. Kurganov A., Tadmor E. New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations // J. Comput. Phys.– 160.– 2000.– P. 241–282.
20. Годунов С.К. Разностный метод для численного решения уравнений гидродинамики с разрывами // Математический сборник.– М: Изд-во МГУ.– 1959.– С. 271–300.
21. Горбань В.О., Горбань І.М. Чисельні моделі нестационарних руслових процесів // Прикладна гідромеханіка.– 4.– 2013.– С. 55–75.
22. LeVeque R.J. Finite volume methods for hyperbolic problems.– Cambridge: Cambridge University Press, 2002.– 130 p.
23. Lax P.D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation // Commun. Pur. Appl. Math.– 7.– 1954.– P. 159–193.
24. Sweby P. K. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws // SIAM J. Numer. Anal.– 21.– 1984.– P. 995–1011.
25. Louaked M., Hanich L. TVD scheme for the shallow water equations // J. Hydraul. Res.– 27.– 1989.– P. 321–332.
26. Gottlieb S., Shu C.W., Tadmor E. Strong stability-preserving high order time discretization methods // SIAM Rev.– 43.– 2001.– P. 89–112..
27. Kurganov A., Levy D. Central-upwind schemes for the Saint-Venant system // ESAIM: M2AN.– 36.– 2002.– P. 397–425.
28. Johnson H.K., Zyserman J.A. Controlling spatial oscillations in bed level update schemes // J. Coast. Eng.– 46.– 2002.– P. 109–126.
29. Jensen J.H., Madsen E.Ø., Fredsøe J. Oblique flow over dredged channels:II. Sediment transport and morphology // J. Hydraul. Eng.– 125 (11).– 1999.– P. 1190–1198.
30. Liu X.-D., Osher S., Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes // J. Comput. Phys.– 115.– 1994.– P. 200–211.
31. Jiang G.-S., Shu C.-W. Efficient implementation of weighted ENO schemes // J. Comput. Phys.– 126.– 1996.– P. 202–214.
32. Исследование изменения режима р. Днепр и перспективных методов добычи и транспортировки песка в Каневском водохранилище.– Киев: Отчет ИГМ АН УССР, 1988.– 250 с.