

УДК 533.6.013.42

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В МОРЕ, ПОКРЫТОМ ЛЬДОМ

Т. Б. ГОНЧАРЕНКО, В. В. ЯКОВЛЕВ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев
03680 Киев – 180, МСП, ул. Желябова, 8/4
vvyak@yandex.ua

Получено 07.09.2014

Разложением по малому параметру исходной трехмерной задачи о гидроупругих колебаниях системы “упругая пластина – слой идеальной несжимаемой жидкости” получено обобщенное уравнение типа Кадомцева-Петвиашвили, описывающее распространение длинных двумерных изгибно-гравитационных волн в море, покрытом льдом. В предположении периодичности по поперечной координате построено точное решение полученного уравнения в виде волнового пакета. Определены соотношения между характерными параметрами задачи, которые обеспечивают существование такого решения.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: гидроупругие колебания, двумерные изгибно-гравитационные волны, динамическая система, периодические решения

Розкладанням за малим параметром вихідної тривимірної задачі про гідропружні коливання системи “пружна пластина – шар ідеальної нестисливої рідини” отримано узагальнене рівняння типу Кадомцева-Петвиашвілі, яке моделює розповсюдження довгих двовимірних згинно-гравітаційних хвиль у морі, вкритому кригою. В припущенні періодичності за поперечною координатою побудовано точний розв’язок отриманого рівняння у вигляді хвильового пакету. Визначені співвідношення між характерними параметрами задачі, що забезпечують існування такого розв’язку.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: гідропружні коливання, двовимірні згинно-гравітаційні хвилі, динамічна система, періодичні розв’язки

The generalised equation of Kadomtsev-Petviashvily type, which describes the propagation of long 2D flexible-gravitational waves in the sea, covered with ice, has been built using the expansion of initial 3D problem of hydro-elastic vibrations of the “flexible plate – layer of ideal incompressible fluid” system -in terms of a small parameter. Supposing the periodicity with respect to transverse coordinate the exact solution of the equation has been received. The relationship among character parameters of the problem, which allows the existing of such a solution, has been defined.

KEY WORDS: hydro-elastic vibrations, 2D flexible-gravitational waves, dynamic system, periodical solutions

ВВЕДЕНИЕ

Учет нелинейных эффектов в граничных условиях на поверхности жидкости приводит к получению новых, по сравнению с линейными моделями, типов уравнений, описывающих распространение изгибно-гравитационных волн. Стандартные подходы к построению решений полученных нелинейно-дисперсионных уравнений не применимы, и актуальным является построение приближенных решений или хотя бы областей существования этих решений. Нелинейные изгибно-гравитационные волны представляют собой комбинацию изгибной волны в ледяной пластине, плавающей на поверхности жидкости, и гравитационной волны. Существование этих волн обусловлено уравновешиванием давления жидкости, с одной стороны, и сил инерции массы льда и упругости пластины, с другой стороны. Сложность соответствующих граничных условий и необходимость учитывать нелинейные эффекты, которые

приводят к получению новых по сравнению с линейными моделями типов решений, описывающих поверхностные волны, ведут к новым попыткам как построения модельных уравнений, так и поиска их решений или хотя бы областей существования решений различного характера.

1. ДВУМЕРНЫЕ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В МОРЕ, ПОКРЫТОМ СПЛОШНЫМ ЛЬДОМ

Точное решение [1] обобщенного уравнения Кортвега-де-Вриза описывает распространение длинных нелинейных изгибно-гравитационных волн. Оно имеет структуру солитона с отрицательной амплитудой. С возрастанием сложности рассматриваемых моделей вопросы, связанные с традиционными проблемами существования и единственности решения получаемых дифференциальных уравнений, остаются без ответа [2], и основным критерием адекватности модели или реше-

ния являются свойства соответственно модели или решения, соответствующие физике рассматриваемого явления. Модель [1] очень хорошо отражает физику явления, поскольку полученное точное решение демонстрирует интересные и предполагаемые свойства солитонов с отрицательной амплитудой и, кроме того, это решение существует в непрерывной области изменения физических параметров задачи.

Известной моделью, в рамках которой описывается двумерное солитоноподобное решение для волн на воде, является уравнение Кадомцева-Петвиашвили (КП). Это уравнение впервые было предложено в работе [3], где для его построения использовались фактически общие представления о характере физических сил, взаимодействующих в данном процессе, и их математическом описании. В обзоре [4] приведена работа 1998 г. [5], где получено уравнение КП для моделирования изгибно-гравитационных и капиллярных волн. Однако один из основных эффектов, за счет которого и могут возникать наиболее интересные, в том числе солитоноподобные, решения, а именно влияние упругой пластины, при выводе уравнения в [5] не учитывается. Авторы мотивируют это тем, что такой учет “не дает вклада в уравнение”. Но если учитывается нелинейность, присутствующая в классическом уравнении Эйлера, логичным представляется хотя бы оценить, какого порядка вклад даст нелинейность за счет упругих сил. Учет, например, геометрически нелинейного прогиба упругой пластины дает добавку в коэффициент при третьей производной, а если говорить о решениях полученного уравнения или даже об области существования возможных решений различного характера, это не может не влиять на результат. Некорректный учет влияния нелинейных эффектов, как, например, в работе [6], приводит к неправильному моделированию исследуемых явлений, соответственно и к неточным выводам относительно существования волн того или иного характера в зависимости от параметров задачи. Искусственно вводя предварительное натяжение пластины, автор [8, 6] предопределил наличие дискретного спектра решений, при котором малое изменение одного из параметров приводит к исчезновению изгибно-гравитационного солитона, что не соответствует физике рассматриваемого явления.

2. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ

Основываясь на результатах [7], построим обобщенное уравнение типа Кадомцева – Петвиашвили (КП) для моделирования распространения двумерных изгибно-гравитационных волн в море, покрытом сплошным льдом. Для вывода уравнения используем метод, известный давно и применяемый в той или иной форме для получения подобных моделей вплоть до последнего времени [5, 8]. С точки зрения авторов, данная форма метода построения уравнения более соответствует физике рассматриваемого явления, тогда как в работе [8] обоснованность выбранного ряда для представления неизвестных функций не очевидна.

Задача о гидроупругих колебаниях системы “упругая пластина – идеальная несжимаемая жидкость” сводится к уравнению Лапласа относительно потенциала скоростей:

$$\beta \nabla^2 \varphi + \varphi_{zz} = 0 \quad (1)$$

с соответствующими граничными условиями на дне

$$\varphi_z + \beta (\vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} H) = 0 \quad (2)$$

и на поверхности раздела лед – вода

$$\zeta_t + \alpha [\zeta_x \varphi_x + \zeta_y \varphi_y] - \frac{1}{\beta} \varphi_z = 0, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \zeta + \varphi_t + \frac{1}{2} \alpha (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\beta} \varphi_z^2 + \\ + \gamma \zeta_{tt} + \delta \nabla^4 \zeta - \frac{\tau}{3} L(\zeta, \Phi) = 0, \quad (4) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} L(\zeta, \Phi) = & \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \\ & + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}; \quad (5) \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = & \sigma_x, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \sigma_y, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\tau - \text{компоненты} \\ & \text{тензора напряжений,} \end{aligned}$$

$$\nabla^4 \Phi = L(\eta, \eta), \quad (6)$$

$$L(\eta, \eta) = \eta_{xx} \eta_{yy} - \eta_{xy}^2.$$

Подстрочные индексы обозначают дифференцирование по соответствующим переменным. Безразмерные переменные введены следующим образом:

$$\begin{aligned} (x^*, y^*) &= (x, y) / \lambda, \\ (z^*, d^*, h_1^*) &= (z, d, h_1) / d_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta^* &= \zeta/A, \quad D^* = D/gd_0^4\rho_0, \\ t^* &= t\sqrt{gd_0}/\lambda, \quad \rho_i^* = \rho_i/\rho_2, \\ \varphi^* &= \varphi\sqrt{gd_0}/g\lambda A, \quad \alpha = \frac{A}{d_0}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\beta = \left(\frac{d_0}{\lambda}\right)^2; \quad \gamma = \beta\rho_1 h_1/\rho_2 d_0;$$

$$\delta = \beta D/(\rho_2 g d_0^2 \lambda^2); \quad i = 1, 2.$$

$$E^* = \beta E/((1 - \nu^2)\rho_2 g \lambda);$$

ρ_1, h_1, D, E – соответственно плотность, толщина, цилиндрическая жесткость и модуль упругости пластины; $\zeta(x, y, t)$ – прогиб пластины; A, λ – амплитуда и длина волны; d_0, ρ_2 – характерная глубина жидкости и ее плотность.

Построим длинноволновое приближение системы уравнений (1)-(6) с помощью разложения по малому параметру:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n (z + H)^n f^n(x, y, t). \quad (8)$$

Подставляя этот ряд в граничное условие на дне и приравнивая слагаемые при одинаковых степенях параметра β , получим соотношение

$$\begin{aligned} f^1 &= -\vec{\nabla} f^0 \cdot \vec{\nabla} H + \\ &+ \beta(\vec{\nabla} H \cdot \vec{\nabla} H)(\vec{\nabla} f^0 \cdot \vec{\nabla} H). \end{aligned} \quad (9)$$

Подстановка ряда (8) в уравнение Лапласа (1) приводит к соотношениям для $f^n, n = 1, 2, 3, 4, \dots$, которые можно выразить через f^0 . Подставляя эти соотношения в одно из условий на поверхности раздела, с учетом только слагаемых порядка α и β в предположении, что α и β – величины одного порядка малости, получим следующее соотношение ($f^0 = f$):

$$\begin{aligned} &\zeta_t + \vec{\nabla} \cdot [(H + \alpha\zeta) \vec{\nabla} f] - \\ &-\beta(\vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} H)(\vec{\nabla} H \cdot \vec{\nabla} H) - \\ &-\beta H \vec{\nabla} H \cdot \vec{\nabla}(\vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} H) - \\ &-\frac{\beta}{2} H^2 \vec{\nabla} H \cdot \vec{\nabla}(\nabla^2 f) - \\ &-\frac{\beta}{2} H^2 \vec{\nabla} \cdot [\nabla^2 f \vec{\nabla} H] - \\ &-\beta H \vec{\nabla} \cdot [(\vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} H) \vec{\nabla} H] - \\ &-\frac{\beta}{2} H(\vec{\nabla} H \cdot \vec{\nabla} H) \nabla^2 f - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-\frac{\beta}{2} H^2 \nabla^2(\vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} H) - \\ &-\frac{\beta}{6} H^3 \nabla^4 f = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставим разложение (8) в оставшееся граничное условие на свободной поверхности и, также удерживая только слагаемые порядка α и β , получим:

$$\begin{aligned} &\zeta + \gamma \zeta_{tt} + \delta \nabla^4 \zeta + f_t - \\ &-\beta H(\vec{\nabla} f_t \cdot \vec{\nabla} H) - \frac{\beta}{2} H^2 \nabla^2 f_t + \\ &+\frac{\alpha}{2}(\vec{\nabla} f)^2 + O(\beta^2) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Замена переменных

$$s = \beta x, \quad \xi = \varepsilon y, \quad \varepsilon = \frac{\lambda}{L} = O(\beta^{\frac{1}{2}}),$$

$$r = \int_0^x \frac{dp}{c(p, y)} - t, \quad c = \sqrt{H}$$

в предположении, что $\gamma = O(\beta)$ и $\delta = O(\beta)$, преобразует последние два уравнения к виду

$$\begin{aligned} &\zeta_r - f_{rr} - \frac{\alpha}{H}(\zeta f_r)_r - 2\beta H^{\frac{1}{2}} f_{rs} - \\ &-\frac{\beta}{2} H^{-\frac{1}{2}} H_s f_r + \beta \frac{H}{6} f_{rrrr} - \varepsilon^2 [J^2 H f_{rr} + \\ &+ f_r (JH)_\xi + 2JH f_{r\xi} + (H f_\xi)_\xi] = O(\beta^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\zeta - f_r + \frac{\alpha}{2H} f_r^2 + \frac{\beta H}{2} f_{rrr} + \\ &+ \gamma \zeta_{rr} - \frac{T\omega^x}{H} \zeta_{rr} + \delta \zeta_{rrrr} H^{-2} = O(\varepsilon\beta), \end{aligned}$$

где $\omega^x = \Phi_{yy}$, а $T = \alpha h_1 E^* (1 - \nu^2) A / \lambda$.

После ряда преобразований, обозначая $\zeta H^{\frac{1}{4}} = h$, приходим к следующему соотношению:

$$\begin{aligned} &h_s + \frac{3\alpha}{2\beta} H^{-\frac{7}{4}} h h_r + \frac{1}{6} H^{\frac{1}{2}} h_{rrr} + \\ &+ \frac{\gamma}{2\beta} H^{-\frac{1}{2}} h_{rrr} - \frac{T\omega^x}{2\beta H^{\frac{5}{2}}} h_{rrr} + \frac{\delta}{2\beta} H^{-\frac{5}{2}} h_{rrrrr} = \\ &= -\frac{\varepsilon^2}{2\beta} H^{-\frac{1}{4}} (H f_\xi)_\xi - \frac{\varepsilon^2}{2\beta} H^{-\frac{1}{2}} [J^2 H h_r + \\ &+ h (JH)_\xi + 2JH h_\xi]. \end{aligned}$$

Переходя к системе переменных (x, ξ, t) и умножая полученное в результате этого соотношение на $H^{\frac{1}{2}}\beta$, получим:

$$h_t + H^{\frac{1}{2}}h_x + \frac{3}{2}\alpha H^{-\frac{3}{4}}hh_x + \frac{\beta}{6}H^{\frac{3}{2}}[H^{\frac{1}{2}}(H^{\frac{1}{2}}h_x)_x]_x + \frac{\gamma}{2}H^{\frac{1}{2}}[H^{\frac{1}{2}}(H^{\frac{1}{2}}h_x)_x]_x - \frac{T\omega^x}{2H}H^{\frac{1}{2}}[H^{\frac{1}{2}}(H^{\frac{1}{2}}h_x)_x]_x + \frac{\delta}{2}H^{-\frac{3}{2}}[H^{\frac{1}{2}}(H^{\frac{1}{2}}(H^{\frac{1}{2}}(H^{\frac{1}{2}}h_x)_x)_x)]_x = -\varepsilon^2 H^{\frac{1}{4}}(Hf_\xi)_\xi.$$

Подстановка в последнее соотношение $h = H^{\frac{3}{4}}f_x$ с последующим сокращением на $H^{\frac{3}{4}}$ дает

$$f_{xt} + H^{\frac{1}{2}}f_{xx} + \frac{3}{2}\alpha f_x f_{xx} + \frac{\beta}{6}H^{\frac{5}{2}}f_{xxxx} + \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{T\omega^x}{2H}\right)H^{\frac{3}{2}}f_{xxxx} + \frac{\delta}{2}H^{\frac{1}{2}}f_{xxxxx} = -\frac{\varepsilon^2}{2}H^{\frac{1}{2}}f_{\xi\xi}.$$

Используя разложение дробных степеней H в ряд и обозначая $\eta = f_x$, окончательно получим:

$$\eta_t + \left(1 + \frac{3}{2}\alpha\eta\right)\eta_x + \left(\frac{\beta}{6} + \frac{\gamma}{2} - \frac{T\omega^x}{2}\right)\eta_{xx} + \frac{\delta}{2}\eta_{xxxx} = -\frac{\varepsilon^2}{2}f_{\xi\xi}. \quad (12)$$

Таким образом, мы получили уравнение, описывающее распространение двумерных изгибно-гравитационных волн в море, покрытом сплошным льдом. Как и в обобщенном уравнении КдВ [1], в этом уравнении появляется дополнительное слагаемое, включающее третью производную η_{xxx} , что приводит к существованию решений различного типа в зависимости от соотношения параметров при этой производной [1, 9].

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ

Привлекательность данной модели связана прежде всего с тем, что для обобщенного уравнения КдВ, которое описывает рассматриваемые волны в случае одной пространственной переменной и является частным случаем построенного уравнения типа КП, получены точные решения в виде антисолитона, демонстрирующие характерные для волн такого типа особенности [1]. Кроме того, для таких решений найдены непрерывные области изменения физических параметров, где они

существуют. Поскольку современные математические модели настолько сложны, что доказательство теоремы единственности и существования решений представляет собой еще более сложную задачу, чем непосредственно построение решения, о правомочности решения свидетельствует его соответствие физике явления [2]. Далее, это уравнение получено с учетом вклада упругих компонентов в слагаемых одного порядка.

Трудности, связанные с решением уравнения (12), приводят к естественного рода упрощениям при попытках построить какое-либо аналитическое его решение, например, к заданию определенных свойств, которыми решение должно обладать по новой переменной, т.е. по y . Например, пусть наше решение будет периодичным по y . Известно [4, 5], что в таких моделях интересующие нас солитоноподобные решения возникают, в частности, при бифуркации из состояния покоя – из нулевого числа спектра линейного оператора.

Представим наше уравнение в виде соответствующей динамической системы. В уравнении

$$\eta_{tx} + \eta_{xx} + \frac{3\alpha}{2}(\eta\eta_x)_x + \left(\frac{\beta}{6} + \frac{\gamma}{2} - \frac{T\omega^x}{2}\right)\eta_{xxx} + \frac{\delta}{2}\eta_{xxxxx} = -\frac{\varepsilon^2}{2}\eta_{yy} \quad (13)$$

произведем замену переменной $\tilde{x} = x - Ut$. Опустив тильду, перепишем его в виде

$$\frac{2(1-U)}{\delta}\eta_{xx} + \frac{3\alpha}{\delta}(\eta\eta_x)_x + \frac{1}{\delta}\left(\frac{\beta}{3} + \gamma - T\omega^x\right)\eta_{xxx} + \eta_{xxxxx} = -\frac{\varepsilon^2}{\delta}\eta_{yy}. \quad (14)$$

Обозначим

$$V = \frac{2(1-U)}{\delta}, \quad N = \frac{1}{\delta}\left(\frac{\beta}{3} + \gamma - T\omega^x\right), \quad M = -\frac{\varepsilon^2}{\delta}, \quad D = \frac{3\alpha}{\delta}. \quad (15)$$

Имеем:

$$V\eta_{xx} + D(\eta\eta_x)_x + N\eta_{xxx} + \eta_{xxxxx} = M\eta_{yy}. \quad (16)$$

В этом уравнении можно избавиться от коэффициентов посредством масштабной замены переменных, но мы пока что этого делать не будем для

того, чтобы оценить интересующие нас собственные значения в зависимости от физических параметров задачи.

Общий подход к решению уравнений такого типа состоит в следующем [4, 5]. Поскольку в типичной ситуации солитонное решение возникает как результат бифуркации из состояния покоя, то возмущают параметр при производной, который и отвечает за такую бифуркацию. В уравнении (16) это, к примеру, V . Далее в уравнении выделяют линейную часть и нелинейную, причем во вторую относят и слагаемые, возникающие благодаря возмущению. Для линейного оператора исследуют спектр, чтобы найти чисто мнимые собственные значения (СЗ), если они существуют, и проанализировать возможность их существования. Появление сопряженных чисто мнимых собственных значений в спектре линейного оператора как раз и свидетельствует о бифуркации, в результате которой возникает солитонное решение [4, 10].

Исследуя динамику собственных значений, можно найти области изменения параметров задачи, в которых возможны такие бифуркации. По полученным собственным значениям определяют собственные векторы и проекции оператора на соответствующие инвариантные подпространства. Наличие чисто мнимых СЗ говорит о существовании у оператора центрального многообразия, что позволяет понизить размерность рассматриваемой задачи. Искомое решение можно построить, используя теорию нормальных форм и теорему о центральном многообразии [5].

Пусть $V = V_0 + \tilde{\varepsilon}$, где V_0 – некоторое фиксированное значение, $\tilde{\varepsilon}$ – параметр возмущения. Представим возмущенное уравнение в виде динамической системы:

$$\dot{w} = Aw + F(\tilde{\varepsilon}, w), \tag{17}$$

где

$$w = (\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)^T, \tag{18}$$

$$\eta_i = \partial_x^i \eta, i = 1, \dots, 5,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ M\partial_{yy}^2 & 0 & -V & 0 & -N & 0 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

$$F(\tilde{\varepsilon}, w) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{\varepsilon}\eta_2 - D\eta_q^2 - D\eta\eta_2 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Система обладает рядом симметрий. Она инвариантна относительно трансляций по y , $\tau_a w(y) = w(y + a)$, относительно отражения $Sw(y) = w(-y)$ и является обратимой. Ищем решение уравнения (12), $4l$ -периодическое по переменной y . Тогда спектр A составляют значения g , удовлетворяющие соотношению

$$g^6 + Ng^4 - V_0g^2 = -M\frac{k^2\pi^2}{4l^2} \tag{21}$$

для любого целого положительного k . Очевидно, случай $k = 0$ исключает зависимость по y и приводит тем самым к обобщенному уравнению КдВ. Оператор A действительный, так что вследствие обратимости, если g – собственное значение, таковыми будут и \bar{g} , и $(-g)$.

Как известно [4, 10], бифуркация из состояния покоя возникает при попадании собственных значений линейного оператора на мнимую ось, т.е. мы будем искать $g = iq$, причем в силу выше сказанного достаточно рассмотреть вариант $q > 0$. В этом случае соотношение (21) принимает вид

$$f(q) = -q^6 + Nq^4 + V_0q^2 = -M\frac{k^2\pi^2}{4l^2}. \tag{22}$$

Правая часть положительна, так что при $k \neq 0$ равенство может иметь место только в том случае, если

$$f(q) = 0 \tag{23}$$

имеет корни и соответственно существуют интервалы изменения q , где функция положительна. Независимо от значения V_0 всегда получим в качестве корня (23) двукратный ноль, что говорит о форме кривой, приведенной на рис. 1. Это следствие инвариантности оператора относительно трансляции $\eta \rightarrow \eta + \text{const}$, $V \rightarrow V + \text{const}$ и его обратимости. На мнимую ось собственные значения приходят парами (опять же вследствие обратимости), когда график функции касается горизонтальной прямой $-M\frac{k^2\pi^2}{4l^2}$ (см. (22), рис. 1).

Проанализируем поведение полинома. Наличие действительных корней определяется дискриминантом $d = N^2 + 4V_0$ и знаком N . Дискриминант неотрицателен в области вне параболы на рис. 2. Очевидно, что внутри параболы действительных корней, кроме двух нулей, полином не имеет. Не имеет он их также при $\kappa = N\delta < 0$ и $U > 1$ в области вне параболы. При $\kappa = N\delta > 0$ и $U > 1$ в области вне параболы полином имеет четыре действительных корня помимо нуля, а при $U < 1$, незави-

симо от знака κ , – два. Соответственно для области III форма полинома представлена на рис. 1, а, для области IV – на рис. 1, б.

Отсюда следует, что интересующие нас бифуркации возможны для областей III и IV.

Рассмотрим более подробно функцию $f(q)$.

Из (22) заключаем, что первая бифуркация происходит при

$$\begin{aligned} f'_q &= 0, \\ 2q(-3q^4 + 2Nq^2 + V_0) &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Из условия существования экстремума для функции $f(q)$ можем записать значение

$$V_0 = 3q_0^4 - 2Nq_0^2. \quad (25)$$

Подставив его в $f(q)$, получим уравнение

$$2q_0^6 - Nq_0^4 = -M \frac{\pi^2}{4l^2}, \quad (26)$$

где $M < 0$. Отсюда имеем

$$q_0^2 > \frac{N}{2} \Rightarrow V_0 > -\frac{N}{4}$$

и для обобщенного КдВ (26) имеет четырехкратный нулевой корень (случай вырождения) и еще два корня для положительных N .

Следуя [5], получаем, что $\forall l \in (0, \infty)$ V_0 меняется в интервале $\left(-\frac{N}{4}, \infty\right)$, и для любого V_0 из этого интервала существует такой период, т.е. такое l , для которого V_0 является точкой бифуркации. При $l = \infty$ ($V_0 = -\frac{N}{4}$ и $V_0 = 0$) получаем 2D-решение (т.е. независимое от y решение обобщенного КдВ), возникшее из состояния покоя вследствие бифуркации. Для $V_0 < 0$ имеются четыре, для $V_0 > 0$ – два дополнительных собственных значения, которые лежат на мнимой оси. Эти собственные значения появляются вследствие влияния 2D-решений, возникающих по причине бифуркаций из $V_0 = -\frac{N}{4}$ или $V_0 = 0$.

В целом этим влиянием на бифуркационную диаграмму нельзя пренебрегать. Если представить уравнение (16) в виде динамической системы (ДС) по переменной y , то можно увидеть, что стационарные состояния такой ДС имеют структуру $(0, \zeta(x))$, где $\zeta(x)$ – решение уравнения обобщенного КдВ [1]. В [1] возмущение параметра бифуркации, при котором возможно существование решения солитонного типа, выражено непосредственно через физические параметры задачи, в чем сказывается преимущество сохранения их в явном виде (в коэффициентах уравнения модели) хотя бы до этапа построения ДС.

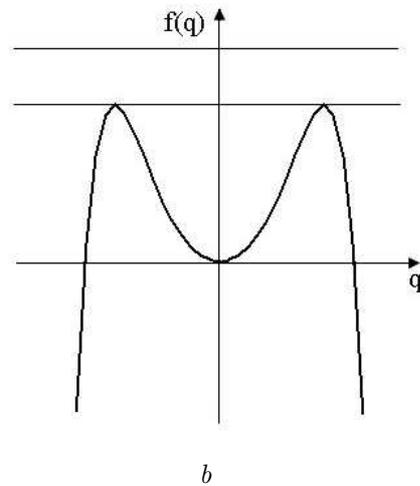
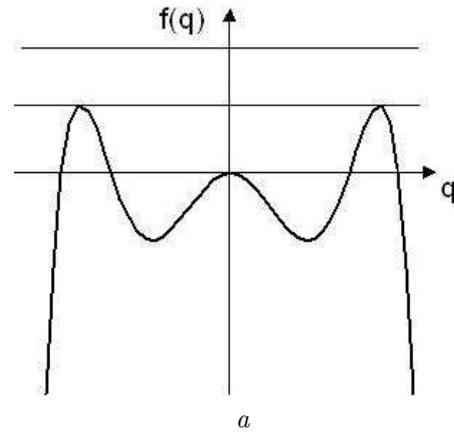


Рис. 1. Форма полинома (23) при $1 < U < 1 + \frac{k^2}{8\delta}$ и $k > 0$ (а); $U < 1$ (б)

Две новые пары СЗ приходят на мнимую ось, когда график полинома $f(q)$ пересекает впервые следующую по k линию $\frac{k^2\pi^2}{4l^2}$, параллельную q -оси (см. рис. 1). Затем СЗ расходятся вдоль мнимой оси, причем кратность их зависит и от граничных условий, которым искомое решение должно удовлетворять по переменной y .

Когда возникает вторая (следующая) бифуркация при (очередном) касании, первая не исчезает, только сдвигаются значения q , при которых она имеет место.

Уравнение (16) аналитически исследовать достаточно сложно. Несколько более легким в этом отношении является уравнение (26). Определяющее соотношение для его корней имеет вид:

$$R = -\frac{N^3}{M} + 27 \frac{k^2\pi^2}{4l^2}. \quad (27)$$

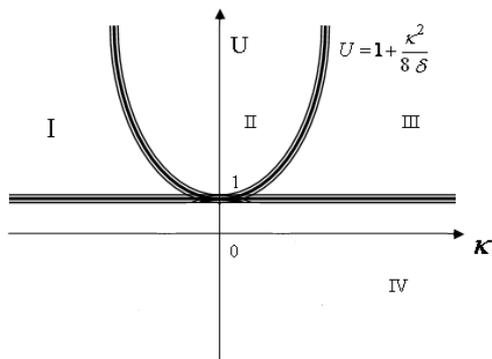


Рис. 2. Области существования корней полинома $f(q)$ в плоскости (k, U)

В зависимости от знака этого выражения мы будем иметь один, два или три различных действительных корня, причем нас интересует положительный наибольший из них. При $N > 0$ правая часть, очевидно, положительна, при $N < 0$ линией раздела областей с различными знаками для R является ветвь кубической параболы $M < 0$ (рис. 3, ветвь 1). Выше этой ветви интересующее нас значение положительно, ниже – отрицательно. Аналогичная парабола, точнее, ее ветвь при $M < 0$ (рис. 3, ветвь 2), проходящая чуть выше первой, определяет наибольший корень (26).

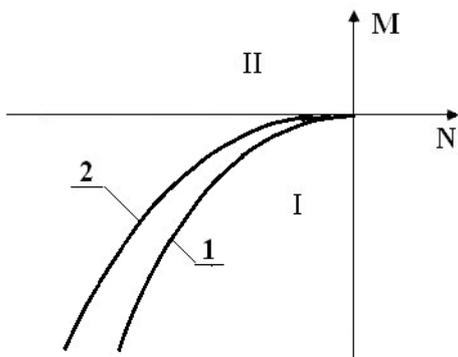


Рис. 3. Области существования корней полинома $f(q)$ в плоскости (N, M)

Область I на рис. 3 ($R > 0$) дает один действительный корень уравнения (26), область II ($R \leq 0$) – три, которые достаточно просто упорядочить. На рис. 3 положительная часть оси N и верхняя ветвь кубической параболы 2 служат границей, ниже которой наибольшим корнем будет

$$z_1 = -2r \cos \frac{\theta}{3},$$

а выше –

$$z_2 = 2r \left(0.5 \cos \frac{\theta}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\theta}{3} \right),$$

где

$$\theta = \text{Arc cos} \frac{Q}{r^3};$$

$$Q = \frac{1}{8 * 27} \left(-N^3 + \frac{27 k^2 \pi^2}{l^2} M \right);$$

$$r = \text{sign}(Q) \frac{|N|}{6}.$$

Единственный действительный корень в области I равен

$$q_0 = -2r * \text{ch} \frac{\theta}{3}, \quad \text{ch} \theta = \frac{Q}{r^3}.$$

Таким образом, мы получили собственное значение $\sigma = iq_0$, при котором происходит интересующая нас бифуркация, и нашли соотношения параметров задачи, при которых она может иметь место.

Для построения решения произведем в уравнении (16) масштабную замену переменных, чтобы избавиться от коэффициентов при производных. В результате получим уравнение

$$\partial_{yy}^2 \eta - V \partial_x^2 \eta + \partial_x(\eta \partial_x \eta) + s \partial_x^4 \eta + \partial_x^6 \eta = 0. \quad (28)$$

Положим $V = V_0 + \tilde{\varepsilon}$, где V_0 – некоторое фиксированное значение, $\tilde{\varepsilon}$ – параметр возмущения. Для построения $4l$ - периодического по переменной y решения представим возмущенное уравнение в виде динамической системы:

$$\dot{w} = Aw + F(\tilde{\varepsilon}, w), \quad (29)$$

где

$$w = (\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)^T, \quad \eta_i = \partial_x^i \eta, \quad i = 1, \dots, 5, \quad (30)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\partial_{yy}^2 & 0 & V_0 & 0 & -s & 0 \end{pmatrix}, \quad (31)$$

$$F(\tilde{\varepsilon}, w) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{\varepsilon} \eta_2 - \eta_1^2 - \eta \eta_2 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Как и ранее, система обладает рядом симметрий. Она инвариантна относительно трансляций по y , $\tau_a w(y) = w(y + a)$, относительно отражения $Sw(y) = w(-y)$ и является обратимой.

Определив для данного уравнения q_0 , построим собственные векторы линейного оператора.

Собственные векторы, соответствующие $C3 \pm iq_0$, т.е. такие φ_0 , что

$$A\varphi_0 = iq_0\varphi_0,$$

имеют вид:

$$\varphi_0 = (1, iq_0, -q_0^2, -iq_0^3, -iq_0^3, q_0^4, iq_0^5)^T \cos\left(\frac{\pi}{2l}y\right).$$

Для нахождения присоединенного вектора имеем:

$$A\varphi_1 = iq_0\varphi_1 + \varphi_0.$$

Тогда

$$\varphi_1 = (0, 1, 2iq_0, -3q_0^2, -4iq_0^3, -iq_0^3, 5q_0^4)^T \cos\left(\frac{\pi}{2l}y\right).$$

Искомое решение (28) может иметь только следующий вид [5]:

$$w = F\varphi_0 + G\varphi_1 + \overline{F}\overline{\varphi_0} + \overline{G}\overline{\varphi_1} + \Phi(\varepsilon, F, G, \overline{F}, \overline{G}).$$

Последнее слагаемое включает члены более высокого порядка по своим аргументам, а амплитуды F, G удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} F_x &= iq_0F + G + f(\tilde{\varepsilon}, F, G, \overline{F}, \overline{G}), \\ G_x &= iq_0G + g(\tilde{\varepsilon}, F, G, \overline{F}, \overline{G}). \end{aligned} \quad (33)$$

В нормальной форме наша система принимает вид:

$$\begin{aligned} F_x &= iq_0F + G + iFP(\tilde{\varepsilon}, |F|^2, \frac{1}{2}i(F\overline{G} - \overline{F}G)), \\ G_x &= iq_0G + iGP(\tilde{\varepsilon}, |F|^2, \frac{12}{i}(F\overline{G} - \overline{F}G)) + FQ(\tilde{\varepsilon}, |F|^2, \frac{1}{2}i(F\overline{G} - \overline{F}G)), \end{aligned} \quad (34)$$

где P и Q – полиномы от своих аргументов с действительными коэффициентами. Пусть

$$P(\varepsilon, v, K) = p_1\varepsilon + p_2v + p_3K + O((|\varepsilon| + |v| + |K|)^2),$$

$$Q(\varepsilon, v, K) = q_1\varepsilon + q_2v + q_3K + O((|\varepsilon| + |v| + |K|)^2).$$

Система (34) обладает двумя первыми интегралами:

$$Z = \frac{i}{2}(F\overline{G} - \overline{F}G), H = |G|^2 - \int_0^{|F|^2} Q(\varepsilon, s, Z) ds.$$

Коэффициент q_1 легко вычислить. Он связан с собственными значениями линеаризации системы (34):

$$\sigma = iq_0 + iP(\varepsilon, 0, 0) \pm \sqrt{Q(\varepsilon, 0, 0)},$$

так что

$$\sigma = iq_0 \pm \sqrt{q_1\tilde{\varepsilon}} + ip_1\varepsilon + O(|\tilde{\varepsilon}|^{\frac{3}{2}}).$$

В рассматриваемом случае $q_1 < 0$, поэтому

$$q_1 = \frac{1}{4(1 - 3q_0^2)}.$$

Коэффициент q_2 определяется с помощью выражения

$$q_2 = -\langle 2N_2(\phi_0, \Phi_{1100}) + 2N_2(\overline{\phi_0}, \Phi_{2000}), \phi_1^* \rangle,$$

где $\langle \cdot \rangle$ означает скалярное произведение в $L^2(-l, l)$, а ϕ_1^* – собственный вектор сопряженного к A оператора A^* , удовлетворяющий соотношениям

$$A^*\phi_1^* = -iq_0\phi_1^*, \quad \langle \phi_1, \phi_1^* \rangle = 1.$$

Вычислим

$$\begin{aligned} \phi_1^* &= r(q_0)(iq_0^3(2q_0^2 - 1), -q_0^2(2q_0^2 - 1), \\ &-iq_0(1 - q_0^2), 1 - q_0^2, -iq_0, 1)^T \cos\left(\frac{\pi}{2l}y\right), \end{aligned}$$

где

$$r(q_0) = \frac{1}{4lq_0^2(3q_0^2 - 1)}.$$

Коэффициенты Φ_{1100} и Φ_{2000} удовлетворяют уравнениям

$$A\Phi_{2000} + N_2(\phi_0, \phi_0) = 2iq_0\Phi_{2000},$$

$$A\Phi_{1100} + 2N_2(\phi_0, \overline{\phi_0}) = 0,$$

откуда получаем:

$$\Phi_{1100} = 0,$$

$$\Phi_{2000} = (1, 2iq_0, -4q_0^2, -8iq_0^3, 16q_0^4, 32iq_0^5)^t f_1,$$

$$f_1 = c_1 \cos h(\omega y) + c_2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2l}y\right) + c_3,$$

$$c_1 = \frac{2q_0^2 - 1}{12q_0^2(5q_0^2 - 1)(13q_0^2 - 2)} \operatorname{sech}(\omega l),$$

$$c_2 = \frac{1}{6q_0^2(1 - 5q_0^2)}, \quad c_3 = \frac{2q_0^2 - 1}{12q_0^2(1 - 5q_0^2)(13q_0^2 - 2)},$$

$$\omega = 2q_0^2 \sqrt{13q_0^2 - 2}.$$

Значение q_2 , определяемое аналогично [5], является положительной убывающей функцией q_0 и при $q_0 \rightarrow \infty$ имеет асимптотику

$$q_2 \rightarrow \frac{1}{12}, \quad q_9 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad q_2 \approx \frac{43}{13 \cdot 15 \cdot 96 q_0^6}.$$

Напомним, что $q_0 > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Форма зависимости $q_2(q_0)$ приведена на рис. 4.

Решение уравнения (28) через эти параметры выражается следующим образом:

$$\eta(x, y) = \pm 2 \sqrt{\frac{2\varepsilon q_1}{q_2}} \operatorname{sech}(\sqrt{\varepsilon q_1} x) * \cos(q_0 x) \cos\left(\frac{\pi}{2l} y\right) + O(|\varepsilon|^{\frac{3}{2}}).$$

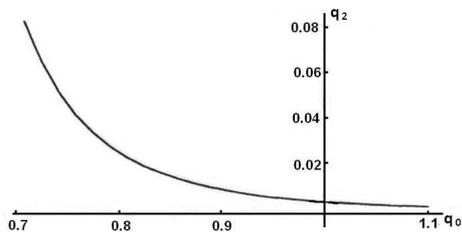


Рис. 4. Зависимость $Q_2(q_0)$

Форма полученного решения приведена на рис. 5.

4. ВАРИАНТ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПО Y

Рассмотрим уравнение (28) и предположим, что $V = V_1 + \mu$, где V_1 – некоторое фиксированное значение скорости, μ – малый параметр. В качестве динамической переменной берем y . Соответствующая уравнению (28) динамическая система имеет вид [11]:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \eta_1, \\ \dot{\eta}_1 &= V_1 \partial_x^2 \eta - s \partial_x^4 \eta - \partial_x^6 \eta + \mu \partial_x^2 \eta - \\ &\quad - (\partial_x \eta)^2 - \eta \partial_x^2 \eta, \end{aligned} \quad (35)$$

где точка обозначает дифференцирование по y .

Представим (35) в следующем виде:

$$\dot{w} = Aw + F(\mu, w), \quad (36)$$

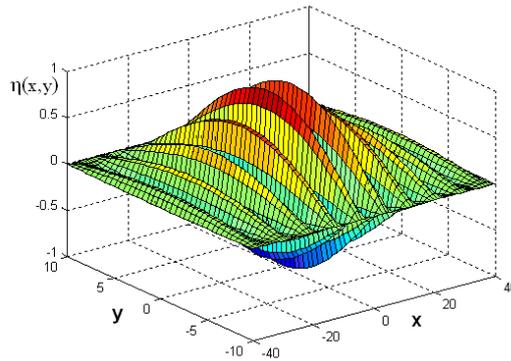


Рис. 5. Отклонение поверхности изгибно-гравитационной волны при $q_0 = -0.75, l = 10, \varepsilon = -0.015, t = 0$

где

$$\begin{aligned} w &= (\eta, \eta_1)^T, \quad \eta_1 = \partial_x \eta, \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ V_1 \partial_x^2 - s \partial_x^4 - \partial_x^6 & 0 \end{pmatrix}, \quad (37) \\ F(\mu, w) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \partial_x^2 \eta - (\partial_x \eta)^2 - \eta \partial_x^2 \eta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Как и ранее, система обладает рядом симметрий. Она инвариантна относительно трансляций по y , $\tau_a w(y) = w(y + a)$, относительно отражения $Sw(y) = w(-y)$ и является обратимой.

Будем искать четное $2l$ -периодическое по x решение (35). Для получения дисперсионного соотношения делаем подстановку

$$\begin{aligned} \eta &= \exp(\sigma y) \cos(nkx), \quad k = \frac{\pi}{l}, \\ n &\in N^+, \quad \sigma \in C. \end{aligned}$$

Тогда спектр оператора A определяется соотношением

$$\sigma^2 = -V_1 n^2 k^2 - s n^4 k^4 + n^6 k^6. \quad (38)$$

Вследствие обратимости и действительности оператора собственные значения являются симметричными относительно действительной и мнимой осей комплексной σ -плоскости. Интересующая нас бифуркация происходит, когда собственные значения парами приходят на мнимую ось. Нам достаточно рассмотреть $\sigma = iq$ для $q \geq 0$, т.е. (38) принимает вид:

$$f(q) = q^2 = V_1 n^2 k^2 + s n^4 k^4 - n^6 k^6 = g(n). \quad (39)$$

Собственные значения приходят на мнимую ось, когда график $f(q)$ касается горизонтальной линии $g(n)$. Первая бифуркация происходит при касании линией $g(1)$ графика $f(q)$ в точке $q = 0$. В нашем

случае обобщенного уравнения КП такая бифуркация возможна для обоих значений s . Ограничимся случаем $s = 1$, соответствующим изгибно-гравитационным волнам. Для таких s бифуркация происходит, если $k > \frac{1}{\sqrt{5}}$. Легко проверить, что для таких k $g(n) > g(n+1)$. Из (38) получаем, что первая бифуркация возникает при $V_1 = -k^2 + k^4$.

Отметим, что новая пара СЗ приходит на мнимую ось, когда график полинома $f(q)$ касается следующей “линии уровня” $g(n)$, параллельной оси q . Затем СЗ расходятся вдоль мнимой оси. Кратность расходящихся СЗ равна единице вследствие того, что мы рассматриваем только четные по x решения.

Ноль является СЗ для любого V_1 вследствие инвариантности $\eta \rightarrow \eta + \text{const}$, $V \rightarrow V + \text{const}$, имеет кратность 2 благодаря обратимости. Нулевое СЗ увеличивает размерность центрального многообразия на 2. Оба дополнительных измерения могут быть исключены с помощью тождеств

$$\int_{-l}^l \eta_1 dx = 0,$$

$$\int_{-l}^l \eta dx = \text{const},$$

где константа принимается равной 0, что соответствует случаю солитонных решений.

Применение теоремы о центральном многообразии приводит к заключению о том, что все малые ограниченные решения (35) имеют вид:

$$w = a_0 \varphi_0 + a_1 \varphi_1 + \Phi(\mu, a_0, a_1), \quad (40)$$

где φ_0, φ_1 – обобщенные собственные векторы A , соответствующие нулевому СЗ: $A\varphi_0 = 0, A\varphi_1 = \varphi_0$, $\Phi(\mu, a_0, a_1)$ – нелинейная функция своих аргументов. Амплитуды a_0, a_1 удовлетворяют усеченной системе

$$\dot{a}_0 = a_1, \dot{a}_1 = f(\mu, a_0, a_1), \quad (41)$$

$f(\mu, a_0, a_1)$ – нелинейная функция своих аргументов. Систему (41) представим в нормальной форме

$$\dot{a}_0 = a_1, \dot{a}_1 = -k^2 \mu a_0 + \text{В} a_0^2 + \text{Г} a_0^3 + O(\mu a_0, a_0^2). \quad (42)$$

Коэффициенты В, Г равны соответственно

$$\text{В} = 0, \text{Г} = \frac{1}{6(1-5k^2)} < 0.$$

Локальное решение (42) дается формулой

$$\hat{a}_0 = \pm k \sqrt{\frac{2\mu}{\Gamma}} \text{sech}(k\sqrt{|\mu|}y) + O(\mu). \quad (43)$$

Из (43), возвращаясь к старым обозначениям для пространственных переменных, получим выражение для возвышения свободной поверхности:

$$\eta(x, y) = \pm k \sqrt{\frac{2\mu}{\Gamma}} \text{sech}(k\sqrt{|\mu|}y) * \cos(kx - V_1 t) + O(\mu). \quad (44)$$

Форма полученного решения представлена на рис. 6.

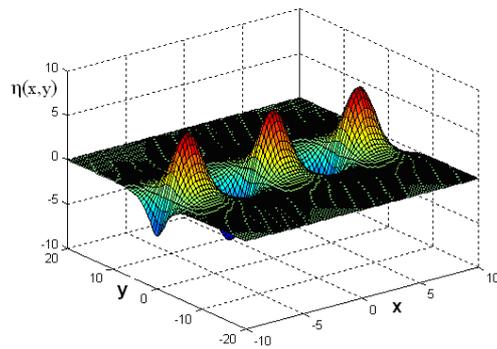


Рис. 6. Отклонение поверхности изгибно-гравитационной волны при $k = 0.85, \mu = 0.5, t = 0$

5. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ

Для нахождения собственных векторов имеем следующие уравнения:

$$A\varphi_0 = 0, A\varphi_1 = \varphi_0, \varphi_0 = (f_1, f_2).$$

Из (37) получим

$$0 \cdot f_1 + f_2 = 0,$$

$$Df_1 + 0 \cdot f_2 = 0,$$

$$f_2 = 0, \quad Df_1 = 0.$$

Таким образом, $\varphi_0 = (f_1, 0)$ определяется решением линейного однородного уравнения 6-го порядка, вековое уравнение для которого

$$\lambda^6 + s\lambda^4 - V_1\lambda^2 = \lambda^2(\lambda^4 + s\lambda^2 - V_1) = 0$$

имеет помимо двукратного нуля еще четыре корня, характер которых зависит от V_1 , s :

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{-s \pm \sqrt{1 + 4V_1}}{2}. \quad (45)$$

Динамика этих корней подробно проанализирована в работе [12].

$$\varphi_1 = (g_1, g_2),$$

$$A \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$g_2 = f_1, \quad Dg_1 = 0.$$

Таким образом, собственный и присоединенный векторы линейного оператора определяются корнями (45). Решение уравнения для f_1 , g_1 известно, в качестве такового выбран косинус (см. (44)).

Для дальнейшего полезно помнить, что стационарные состояния ДС такого вида – это объекты вида $(0, \zeta(x))$, где вторая координата есть решение обобщенного уравнения КдВ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разложением по малому параметру исходной трехмерной задачи о гидроупругих колебаниях системы “упругая пластина – слой идеальной несжимаемой жидкости” получено обобщенное уравнение типа Кадомцева-Петвиашвили, описывающее распространение длинных двумерных изгибно-гравитационных волн в море, покрытом сплошным льдом. Приведены динамические системы, соответствующие нелинейному уравнению и позволяющие рассмотреть те его решения, которые возникают как результат бифуркации из состояния покоя. В предположении периодичности по поперечной координате построено точное реше-

ние полученного уравнения в виде волнового пакета. Определены соотношения между характерными параметрами задачи, которые обеспечивают существование такого решения.

1. Ткаченко В.А., Яковлев В.В. Нелинейно-дисперсионная модель трансформации поверхностных волн в прибрежной зоне моря, покрытой льдом // Прикл. гідромеханіка.– 1999.– Т. 1(73), N 3.– С. 55–64.
2. Гринченко В.Т., Вовк И.В., Мацупура В.Т. Основы акустики. Учебное пособие.– Киев, 2009868 с.
3. Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И. Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах // ДАН СССР.– 1970.– Т. 192. N4.– С. 753–756.
4. Ильичев А.Т. Уединенные волны в средах с дисперсией и диссипацией (обзор) // МЖГ.– 2000.– N 2.– С. 3–27.
5. Naragus-Courcelle M., P'ichev A. Three-dimensional solitary waves in the presence of additional surface effects // Eur. J. Mech. B/Fluids.– 1998.– V. 17. N 5.– P. 739–768.
6. Марченко А.В. О длинных волнах в мелкой жидкости под ледяным покровом // ПММ.– 1988.– Т. 52. Вып. 2.– С. 230–235.
7. Демченко Р.И., Железняк М.И. Нелинейно-дисперсионные эффекты распространения поверхностных волн вдоль неоднородностей рельефа дна // Гидромеханика.– 1983.– Вып. 48.– С. 17–22.
8. Prabir Daripa Higher-order Boussinesq equations for two-way propagation of shallow water waves // Eur. J. of Mech. B/Fluids.– 2006.– V 25, N 6.– P. 1008–1021.
9. Гончаренко Т.Б., Яковлев В.В. Дослідження сталих нелінійних згинно-гравітаційних хвиль в морі, вкритому суцільною кригою // Прикл. гідромеханіка.– 2005.– Т. 7(79), N 2.– С. 3–7.
10. Iooss G., Peroueme M.-C. Perturbed homoclinic solutions in the reversible 1:1 resonance vector fields // J. Diff. Eqns.– 1993.– 102.– P. 62–88.
11. P'ichev A. Self-channelling of surface water waves in the presence of an additional surface pressure // Eur. J. Mech. B/Fluids.– 2001.– V. 18, N 5.– P. 501–510.
12. Ильичев А.Т., Марченко А.В. О распространении длинных нелинейных волн в тяжелой жидкости под ледяным покровом.– МЖГ: 1989, N 1.– 88–95 с.