

УДК 301.17.15.13, 551.465

МОДЕЛИ КОМПАКТНЫХ КОМПЕНСИРОВАННЫХ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ С ВИНТОВОЙ СИММЕТРИЕЙ

П. В. ЛУКЬЯНОВ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев
03680 Киев – 180, МСП, ул. Желябова, 8/4
pavel_lukianov@bigmir.net

Получено 07.02.2012

Представлены одномерные модели компактных компенсированных вихревых течений с винтовой симметрией. Выполнено сравнение с существующими моделями и предложены области их применения.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: изолированный гауссиан, квазиточечный вихрь

Представлені одновимірні моделі компактних компенсованих вихрових течій з гвинтовою симетрією. Виконано порівняння з відомими моделями та запропоновані області їхнього застосування.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: ізольований гауссіан, квазіточковий вихор

One-dimensional models for compact compensated vortex flows with helical symmetry have been presented. The comparison of the models with the known ones has been carried out. These models areas' usings have been pointed out.

KEY WORDS: isolated Gaussian, quasi-point vortex

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматриваются модели, описывающие компактные вихревые течения с винтовой симметрией. Для задач, где область течения имеет конечный размер в радиальном направлении, компенсированность вихря [1–3] позволяет удовлетворить граничное условие прилипания на стенках. Поэтому, подобно течению Тейлора-Куэтта между двумя концентрическими цилиндрами, приведенные ниже модели можно использовать и как решение в рамках модели вязкой жидкости, и как решение без учета вязкости, задавая на неподвижных границах не равные нулю значения скорости. Для безграничной области используется модель, основанная на распределении в виде изолированного гауссиана и по своей сути является приближениями реальных нестационарных компактных вихрей, которые наблюдаются с помощью современной спутниковой и другой измерительной техники. Ее можно использовать для приближенного задания начального поля течения и последующего численного решения задачи на установление и дальнейшую эволюцию вихря.

В работе автора [4] был рассмотрен класс компактных винтовых вихрей (вихревых течений). Для цилиндрических вихрей компенсированность [2] обеспечивает конечный размер области вращающейся жидкости. В природе существует и другой вид течений – с винтовой симметрией. Это та-

кие вихревые течения, поля всех величин в которых сохраняются вдоль винтовой линии, описываемой следующими соотношениями [5]:

$$r = \text{const}, \quad z - \theta l = \text{const} \quad (1)$$

с шагом винтовой симметрии $h = 2\pi l$. При $l > 0$ течение называют с правой винтовой симметрией, при $l < 0$ – с левой.

Указанные течения изучались в работах [6–9]. Однако в этих исследованиях поле скорости, а заодно и другие связанные с ней поля, не являются компактными. Бесконечная кинетическая энергия, получающаяся согласно приведенным там полям скорости, может быть объяснена как результат действия источника конечной мощности в течение бесконечно долгого времени (стационарное приближение). В реальных условиях выхода на стационарный режим течения происходит установление динамического равновесия между производством количества движения и его диссипацией, что обеспечивает конечность энергии движения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В монографии [5] дан подробный вывод уравнений, описывающих течения с винтовой симметрией. Приведем лишь полученное там соотношение между продольной V_z и азимутальной V_θ компо-

нентами скорости для таких течений:

$$V_z = V_z^0 - \frac{r}{l} V_\theta, \quad (2)$$

где r – радиальная координата; l – константа винтовой симметрии.

Поскольку в соотношении (2) на азимутальную компоненту скорости не наложено никаких ограничений, то можно рассмотреть ряд моделей течений с винтовой симметрией. Так, в [5] указывается, что поле V_θ может быть как осесимметричным, так и неосесимметричным. В данной работе будут рассмотрены лишь модели осесимметричных вихревых течений с винтовой симметрией. По другому их еще называют вихрями с прямолинейной осью [5]. Все приведенные ниже одномерные модели вихрей с винтовой симметрией удовлетворяют уравнениям Гельмгольца, преобразуя их в тождества.

Что касается граничных условий, то модель, основанная на изолированном Гауссиане, имеет экспоненциальное убывание и может быть использована лишь для описания вихрей в безграничной области. Все остальные приведенные модели можно использовать как для приближенного описания свободных вихрей, так и для точного описания течений в круглых каналах (см. введение).

В данное время известна модель течения с винтовой симметрией, основанная на поле азимутальной скорости в виде [5]

$$V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right) \right] \quad (3)$$

с соответствующим полем продольной скорости

$$V_z = V_z^0 - \frac{\Gamma}{2\pi l} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right) \right], \quad (4)$$

где ε – некоторая константа, связанная с масштабом вихря.

Однако эта модель имеет два существенных недостатка. Во-первых, поле азимутальной скорости всегда некомпактно – с асимптотой в виде точечного вихря. И, как следствие, во-вторых, кинетическая энергия такого течения есть бесконечность, что нефизично. Приведенный профиль азимутальной скорости можно использовать лишь для описания течения в трубе в рамках невязкой модели, поскольку граничное условие прилипания не выполняется.

Таким образом, в литературе отсутствуют модели компактных вихревых течений с винтовой симметрией. Исходя из сказанного выше, целью дан-

ной работы является разработка моделей компактных осесимметричных вихревых течений с винтовой симметрией, основанных на полученных ранее зависимостях для компактных компенсированных полей азимутальной скорости.

2. ПРОСТЕЙШИЕ МОДЕЛИ КОМПАКТНЫХ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ С ВИНТОВОЙ СИММЕТРИЕЙ

Модель 1. На основе изолированного Гауссиана.

Если не принимать во внимание нестационарный характер автомодельных решений, описывающих ламинарную и турбулентную диффузию вихря, можно в качестве начального приближения поля азимутальной компоненты скорости использовать решение в виде изолированного Гауссиана:

$$V_\theta = \frac{r}{2} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right). \quad (5)$$

В соответствии с указанным решением (5), а также соотношением (2), поле продольной скорости, в компактном вихре с винтовой симметрией, имеет следующий вид:

$$V_z = -\frac{r^2}{2l} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right). \quad (6)$$

Решение (6) описывает компактное по Сэффмену [10] поле продольной компоненты скорости в тех задачах, где на оси отсутствует движение вообще (рис. 1). Поля всех характеристик во внешней области течения экспоненциально быстро убывают с ростом расстояния от оси вращения.

Все последующие модели описывают течения в конечных в радиальном направлении областях.

Модель 2. На основе квазиточечного вихря.

Эта простая модель описывает течение в трубе радиуса R , у которого азимутальная скорость имеет вид квазиточечного вихря [3]:

$$V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad 0 < r \leq R. \quad (7)$$

С учетом соотношения (2), радиальное распределение продольной скорости в таком течении описывается как

$$V_z = V_z^0 - \frac{\Gamma}{2\pi l} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad 0 < r \leq R. \quad (8)$$

В данной модели на оси вихря азимутальная скорость имеет особенность, как в точечном вихре. Полагая первое слагаемое в (8) равным нулю, получаем компактное вихревое течение с винтовой симметрией (рис. 1): вне радиуса вихря $r > R$ течение отсутствует вообще. На оси вращения продольная скорость имеет постоянное значение:

$$V_z(r=0) = -\frac{\Gamma}{2\pi l}.$$

Выражение (8), равно как и (6), отчетливо указывает на то, что знак продольной скорости на оси зависит от вида винтовой симметрии – правой или левой (см. выше). Представленное распределение продольной скорости совпадает с известным параболическим законом ламинарного течения жидкости по прямолинейной трубе с круглым сечением.

Модель 3. На основе компактного компенсированного вихря.

Распределение азимутальной скорости в таком вихре имеет вид [2, 3]:

$$V_\theta = \begin{cases} \frac{V_0 r}{a}, & 0 \leq r \leq a, \\ \frac{V_0 a (R^2 - r^2)}{(R^2 - a^2)r}, & a \leq r \leq R. \end{cases} \quad (9)$$

В соответствии с выражениями (2), (9), продольная компонента скорости описывается следующими соотношениями:

$$V_z = \begin{cases} V_z^0 - \frac{V_0 r^2}{al}, & 0 \leq r \leq a, \\ V_z^0 - \frac{V_0 a (R^2 - r^2)}{lR^2}, & a \leq r \leq R. \end{cases} \quad (10)$$

Представленное решение можно использовать для задач, где на границе ($r = R$) продольная скорость равна нулю. Для этого нужно положить $V_z^0 = 0$, что характеризует отсутствие продольной скорости на оси вращения, равно как на внешней границе (стенке). Выражение для продольной скорости физически может соответствовать течению в цилиндрической области, вдоль оси которой находится достаточно тонкий (нулевой толщины) цилиндр или проволока, на поверхности которых будет выполняться условие прилипания.

Очень близкой к приведенному распределению азимутальной скорости является формула Эскюдье, интерполирующая экспериментальные данные [12, 13]:

$$V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{R_*^2}\right) \right] + \frac{\omega r}{2}, \quad (11)$$

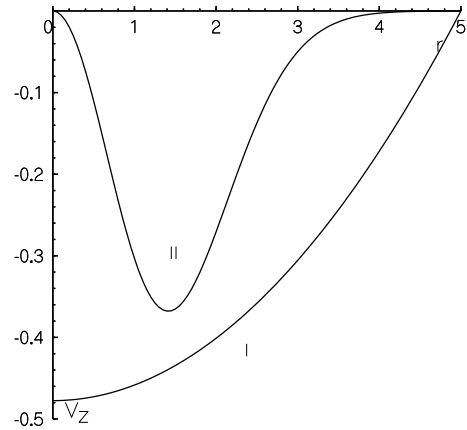


Рис. 1. Распределения продольной скорости: I – соответствует соотношению (6), II – соотношению (8); $\Gamma = 3$, $R = 5$, $a = 2$, $l = 1$

где ω , R_* – некоторые константы. В работах [12, 13] ничего не сказано об этих константах. И использовалась она для аппроксимации течения, у которого на оси и на границе продольная скорость не равна нулю. Здесь же используем понятие функции компенсированности [14]:

$$Int(r) = \int_0^r \omega_z r dr = V_\theta r, \quad (12)$$

согласно которому условием конечности размера вихря есть равенство:

$$Int(r = R) = 0.$$

Применяя его к соотношению (11), получаем:

$$V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{R_*^2}\right) \right] - \frac{\Gamma}{2\pi R_*^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{R^2}{R_*^2}\right) \right] r. \quad (13)$$

Выражение (13) отсутствует в литературе и приводится впервые. Распределение азимутальной скорости можно трактовать как компенсированный вихрь Бюргера-Лэмба-Озеена. На рис. 2 приведен его график.

Поле продольной скорости в течении с винтовой симметрией, соответствующее (13), имеет следующий вид:

$$V_z = -\frac{\Gamma}{2\pi l} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{R_*^2}\right) \right] +$$

$$+ \frac{\Gamma}{2\pi R^2 l} \left[1 - \exp\left(-\frac{R^2}{R_*^2}\right) \right] r^2. \quad (14)$$

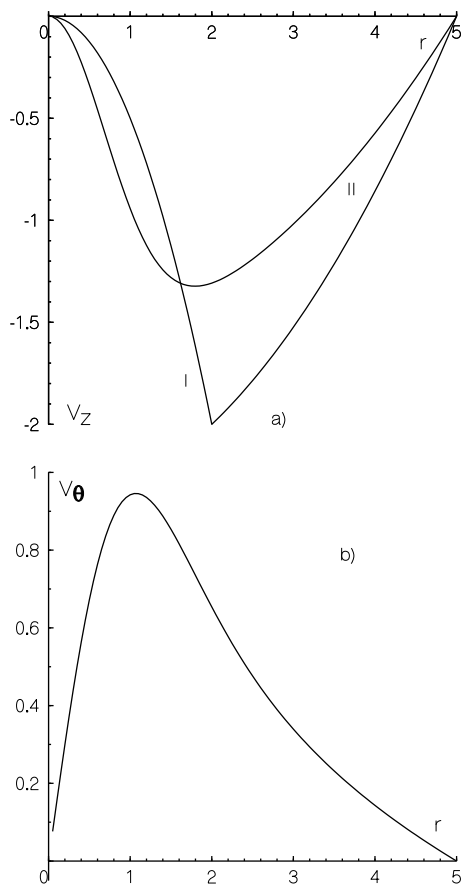


Рис. 2. Продольная (a) и азимутальная (b) компоненты скорости в модели 3: I соответствует (10), II – (14), $\Gamma = 10, V_0 = 1, R = 5, l = 1, R_* = 2$

На рис. 2 представлен его график. Преимущество полученного решения в сглаженности поля скорости: азимутальная скорость теперь описывается не составным вихрем (компактным компенсированным), а более сложной зависимостью, у которой на всем протяжении вихря есть две различные компоненты завихренности, интегрально компенсирующие друг друга.

Модель 4. На основе полого (кольцевого) компактного компенсированного вихря.

Когда течение жидкости происходит в области между двумя цилиндрическими поверхностями с внутренней границей некоторого ненулевого радиуса, поле азимутальной скорости и завихренности можно, в качестве невязких приближений, аппроксимировать полым компактным компенсированным вихрем [2, 5]:

$$V_\theta = \begin{cases} \frac{\Omega_0 (r^2 - r_0^2)}{2r}, & r_0 \leq r \leq r_0 + a, \\ \frac{\Omega_0}{2r} \left((r_0 + a)^2 - r_0^2 \right) - \frac{\Omega_0 \left((r_0 + a)^2 - r_0^2 \right) \left(r^2 - (r_0 + a)^2 \right)}{\left((r_0 + R)^2 - (r_0 + a)^2 \right)} = 0, & r_0 + a \leq r \leq r_0 + R. \end{cases}$$

Поле продольной скорости в вихре с винтовой симметрией тогда примет вид:

$$V_z = \begin{cases} -\frac{\Omega_0 (r^2 - r_0^2)}{2l}, & r_0 \leq r \leq r_0 + a, \\ -\frac{\Omega_0}{2l} \left((r_0 + a)^2 - r_0^2 \right) + \frac{\Omega_0 \left((r_0 + a)^2 - r_0^2 \right) \left(r^2 - (r_0 + a)^2 \right)}{\left((r_0 + R)^2 - (r_0 + a)^2 \right)} = 0 & r_0 + a \leq r \leq r_0 + R. \end{cases}$$

Также как и в предыдущем случае, данную модель дополним компенсированным сглаженным аналогом. Для области $r_0 \leq r \leq r_0 + R$ имеем:

$$V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi(r-r_0)} \left[1 - \exp\left(-\frac{(r-r_0)^2}{R_*^2}\right) \right] - \frac{\Gamma}{2\pi R^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{R^2}{R_*^2}\right) \right] (r-r_0). \quad (15)$$

$$V_z = -\frac{\Gamma r}{2\pi l(r-r_0)} \left[1 - \exp\left(-\frac{(r-r_0)^2}{R_*^2}\right) \right] + \frac{\Gamma}{2\pi R^2 l} \left[1 - \exp\left(-\frac{R^2}{R_*^2}\right) \right] (r-r_0)r. \quad (16)$$

Графические зависимости для выражений (15) и (16) не приводятся ввиду подобности соответствующих решений для случая нулевого диаметра внутреннего цилиндра.

Модель 5. На основе компактного компенсированного вихря с противотечением.

Наконец, рассмотрим модель, у которой поле азимутальной скорости описывается следующими соотношениями:

$$V_{\theta} = \begin{cases} 0.5\Omega_0 r, & 0 \leq r \leq a, \\ \frac{\Omega_0 a^2 + \Omega_1 (r^2 - a^2)}{2r}, & a \leq r \leq R_1, \\ \frac{\Omega_0 a^2 + \Omega_1 (R_1^2 - a^2)}{2r} - \\ - \frac{[\Omega_0 a^2 + \Omega_1 (R_1^2 - a^2)] (r^2 - R_1^2)}{2r (R_2^2 - R_1^2)}, & R_1 \leq r \leq R_2. \end{cases}$$

Соответствующие выражения для поля продольной скорости суть:

$$V_z = \begin{cases} -0.5 \frac{\Omega_0 r^2}{l}, & 0 \leq r \leq a, \\ -\frac{\Omega_0 a^2 + \Omega_1 (r^2 - a^2)}{2l}, & a \leq r \leq R_1, \\ -\frac{\Omega_0 a^2 + \Omega_1 (R_1^2 - a^2)}{2l} + \\ + \frac{[\Omega_0 a^2 + \Omega_1 (R_1^2 - a^2)] (r^2 - R_1^2)}{2l (R_2^2 - R_1^2)}, & R_1 \leq r \leq R_2. \end{cases}$$

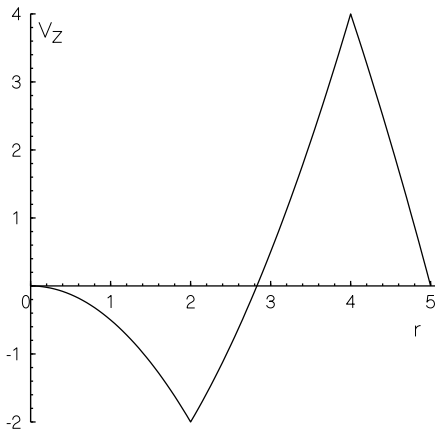


Рис. 3. Продольная скорость, соответствующая компенсированному вихрю с противотечением $\Omega_0 = 1, \Omega_1 = -1, R_1 = 3, R_2 = 5, a = 2, l = 1$

На рис. 3 представлено распределение продольной компоненты скорости. Видно, что внутренняя и внешняя области находятся в противотечении. На внешней границе области обе компоненты скорости строго равны нулю. Приведенная модель соответствует наблюдающимся в эксперименте зонам противотечения продольной компоненты скорости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Приведен ряд простейших одномерных моделей компактных осесимметричных вихревых течений с винтовой симметрией. В отличие от использованных ранее моделей, где поле одной из компонент скорости было некомпактным, все, без исключения, полученные аналитические выражения описывают полностью компактные поля скорости. Во-первых, течение в виде изолированного гауссиана можно использовать для приближенного описания наблюдающихся в природе реальных нестационарных компактных вихрей с целью задания начальных условий или для аппроксимации на относительно малых масштабах времени. Во-вторых, все остальные модели компенсированных вихрей соответствуют течениям с винтовой симметрией в круглых каналах (трубах).

Эти модели можно использовать при описании различных течений в рамках указанных ограничений, где наблюдается винтовая симметрия и ось вихря прямолинейна.

Автор выражает глубокую признательность докт. физ.-мат. наук А.Г. Стеценко за ряд критических замечаний, которые были учтены при доработке статьи.

1. Козлов В.Ф. Стационарные модели бароклинных компенсированных вихрей. // Известия АН ФАО.– 1992.– т.28, № 6.– С. 615-624.
2. Лукьянов П.В. Модели компактных компенсированных вихрей и их применение в задачах механики жидкости и газа // Прикл.гидром.– 2011.– Т. 13 (85), №2.– С. 37-43.
3. Лук'янов П.В. Одновимірні моделі компактних вихрів // Наукові вісті НТУУ КПІ.– 2010.– №4 (72).– С. 145-150.
4. Лукьянов П.В. Компактные винтовые вихри // Прикл.гидром.– 2011.– Т. 13 (85), №3.– С. 61-68.
5. Алексеев С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л. Введение в теорию концентрированных вихрей.– Новосибирск: Институт теплофизики СО РАН, 2003.– 503 с.
6. Park, W., Monticello, D.A. & White, R.B. Reconnection of magnetic fields including the effects of viscosity // Phys. Fluids.– 1984.– 27.– P. 137-149.
7. Landman, M.J. On the generation of helical waves in circular pipe flow // Phys. Fluids.– 1990.– A2.– P. 738-747.
8. David G. Dritschel Generalized helical Beltrami flows in hydrodynamics and magnetohydrodynamics // J. Fluid. Mech.– 1991.– vol. 222.– P. 525-541.
9. Alekseenko S.V., Kuibin P.A., Okulov V.L., Stork S.I. Helical vortices in swirl flow // J. Fluid Mech.– 1999.– vol. 382.– P. 195-243.

10. Сэффмэн Ф.Дж. Динамика вихрей.– М.: Наука, 2000.– 402 с.
11. Лук'янов П.В. Модель квазіточкового вихору // Наукові вісті НТУУ КПІ.– 2011.– №4 (78).– С. 139-142.
12. Лейбович С. Устойчивость и разрушение вихрей:современное состояние и перспективы // Аэрокосм. техника.– 1985.– Т. 3, № 4.– С. 162-181.
13. Escudier M.P., Borstein J., and Maxworthy T. The Dynamics of Confined Vortices // Proceeding of the Royal Society of London.– 1982.– V. A382.– P. 335-360.
14. Лукьянов П. В. Квазикомпактные вихреисточник и вихресток // Прикл.гідром.– 2012.– Т. 14 (86), №1.– С. .
15. Шторк С.И. Экспериментальное исследование вихревых структур в тангенциальных камерах // Дисс. канд. физ.-мат. наук .– Новосибирск: ИТ СО РАН, 1994.– 156 с.