

УДК 532.528,532.526

## ВЯЗКОЕ ВОВЛЕЧЕНИЕ ГАЗА В ВЕНТИЛИРУЕМОЙ КАВЕРНЕ ЗАДАННОЙ ФОРМЫ

Г. А. ВОРОПАЕВ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев  
03680 Киев – 180, МСП, ул. Желябова, 8/4  
vga@tbl.kiev.ua

Получено 8.02.2013

Представлена математическая модель вовлечения газа в вентилируемой осесимметричной каверне заданной формы при малых числах кавитации на основании определения характеристик ламинарно-турбулентного пограничного слоя, формирующегося на внутренней поверхности каверны. Применена модель переноса компонент тензора напряжений Рейнольдса при произвольных числах Рейнольдса для замыкания системы уравнений Рейнольдса в приближении пограничного слоя. На основании определенных характеристик ламинарно-турбулентного пограничного слоя, формирующегося на внутренней поверхности каверны, найдены величины вязкого вовлечения газа. Предложены интегральные оценки объемного расхода воздуха в вентилируемой каверне при разных числах Рейнольдса.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** кавитация, сдвиговый слой, вязкое вовлечение газа

Представлено математичну модель втягнення газу у вентильованій осесиметричній каверні заданої форми при малих числах кавітації на підставі визначення характеристик ламінарно-турбулентного примежового шару, який формується на внутрішній поверхні каверни. Застосовано модель переносу компонент тензора напружень Рейнольдса при довільних числах Рейнольдса для замикання системи рівнянь Рейнольдса у наближенні примежового шару. На підставі визначених характеристик ламінарно-турбулентного примежового шару, який формується на внутрішній поверхні каверни, знайдено значення в'язкого втягнення газу. Запропоновано інтегральні оцінки об'ємної витрати газу у вентильованій осесиметричній каверні при різних числах Рейнольдса.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** кавітація, зсувний шар, в'язке втягнення газу

A mathematical model of gas loss in ventilated axisymmetric cavity of the specified shape is presented at small cavitation numbers on the basis of definition of characteristics of the laminar-turbulent boundary layer formed on the internal surface of the cavity. The Reynolds stress model of turbulence at arbitrary Reynolds numbers is applied to closure the system of Reynolds equations in the boundary layer approximation. On the basis of the determined characteristics of the laminar-turbulent boundary layer formed on the internal surface of the cavity, values of viscous gas loss are found. Integral estimations of the volume gas consumption in a ventilated cavity are proposed at different Reynolds numbers.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** cavitation, shear layer, viscous gas involved

### ВВЕДЕНИЕ

При развитии кавитационном режиме обтекания тел каверна, наполненная газом или парами, характеризуется не только своими формой и размерами, числом кавитации ( $\sigma = (P - P_k)/(0.5\rho U_\infty^2)$ ) и числом Фруда ( $Fr = U_\infty/\sqrt{gd}$ ), но и определенным количеством уносимого газа из каверны [1-3]. Как правило, основные параметры развитого кавитационного течения определяются на основании модели идеальной несжимаемой жидкости [1-8]. При этом форма достаточно удлиненной каверны при постоянном по длине каверны числе кавитации и достаточно больших числах Фруда, когда влиянием весомости можно пренебречь, оказывается близкой к эллипсоидальной. В результате экспериментальных исследований были предложены два основных сценария для уноса газа из каверны. Первый сценарий реализуется при зна-

чительном влиянии весомости, когда каверна заканчивается полыми вихревыми шнурами [3, 5, 6, 12], и второй – в случае достаточно больших чисел Фруда при пренебрежимо малом влиянии весомости [1, 16]. Унос газа из каверны во втором случае осуществляется неустойчивой областью хаотического двухфазного течения жидкости в кормовой области каверны. При этом характеристики течения газа внутри каверны не учитываются.

Вместе с тем, в работе [14] было высказано предположение, что определяемые обычно эмпирически коэффициенты расхода газа в вентилируемой каверне могут зависеть от характера течения газа внутри каверны. Основная идея этой работы – установить связь между процессом увлечения газа при его эвакуации из каверны с толщиной формирующегося пограничного слоя на поверхности каверны, а следовательно, и с числом Рейнольдса, определяемым по скорости обтекания каверны,

длине каверны и кинематической вязкости газа каверны. Это предположение и его реализация дало основание для объяснения масштабных эффектов при определении коэффициентов уноса газа для натуральных объектов на основе маломасштабных экспериментов. Однако интегральные оценки вязкого уноса газа их каверны на основании положений работы [14] могут служить только качественной оценкой, требующей экспериментального определения констант уноса газа.

Содержанием настоящей работы является разработка методики определения локальных характеристик ламинарно-турбулентного сдвигового слоя газа, формирующегося на поверхности каверны в зависимости от формы каверны и числа Рейнольдса, на основании которых определяется вязкое вовлечение газа.

## 1. ВОВЛЕЧЕНИЕ ГАЗА

Независимо от реализующегося сценария уноса газа из каверны в виде тороидального пульсирующего вихря в конце каверны или двух продольных вихрей, формирующихся за миделевым сечением каверны в несжимаемой жидкости при потере осесимметричной формы, начальная стадия формирования сдвигового слоя газа за кавитатором должна происходить одинаково. Дальнейшее развитие сдвигового слоя за миделем каверны существенно зависит от вида и величины возмущений в сдвиговом слое. При сохранении осесимметричности течения в каверне сдвиговой слой должен и может замыкаться тороидальным вихрем, разрушающимся с определенной периодичностью или квазипериодичностью. При искривлении оси каверны и появлении поперечного градиента давления осесимметричность формы каверны нарушается, и вероятность формирования парных продольных вихрей на вогнутой поверхности каверны существенно повышается. Унос газа из каверны, скорее всего, осуществляется за счет обоих механизмов, но вклад каждого механизма в суммарный унос газа может быть различным по величине в зависимости от чисел кавитации, Фруда и Рейнольдса.

На основании алгоритма, изложенного ниже, можно определить характеристики ламинарно-турбулентного сдвигового течения (пограничного слоя), возникающего на внутренней поверхности осесимметричной каверны.

### 1.1. Модель вязкого вовлечения газа в осесимметричной вентилируемой каверне

В настоящей работе предполагается рассмотреть вовлечение газа в симметричной вентилируемой каверне и определить числовые значения объема вовлекаемого газа в зависимости от определяющих параметров кавитационного течения и числа Рейнольдса, когда можно пренебречь искажением формы каверны при конечных числах Фруда.

При рассмотрении вовлечения газа в вентилируемой каверне обтекающим потоком воды считается, что каверна имеет заданную форму, определяемую числом кавитации и числом Фруда:

$$R(x) = f_1(\sigma, Fr).$$

Зависимость формы каверны от числа Рейнольдса на первом итерационном этапе построения модели и ее численного алгоритма не предполагается. И ставится задача определения параметров течения газа каверны, вовлекаемого обтекающим ее потоком воды, и, как следствие, его объема как функции числа кавитации, числа Фруда, числа Рейнольдса и масштабного параметра  $\delta/d$ , где  $\delta$  – толщина сдвигового слоя,  $d$  – диаметр кавитатора.

На поверхности каверны сразу за кавитатором (рис. 1) развивается сдвиговой слой, который при пренебрежении подтормаживающим действием каверны на внешнее течение можно моделировать внутренним пограничным слоем течения газа в каверне. Изменяющиеся свойства по длине каверны этого пограничного слоя зависят от параметров газа в каверне, числа Рейнольдса и местной продольной и поперечной кривизны поверхности каверны. Учитывая вогнутость поверхности относительно внутренней нормали, можно предположить, что внутри каверны должен появиться поперечный градиент давления, зависящий от изменяемой продольной кривизны поверхности каверны и турбулентных напряжений Рейнольдса при турбулентной форме течения в каверне. При малых числах кавитации и больших длинах каверн параметры пограничного слоя существенно изменяются при смене режима течения внутри пограничного слоя при переходе от ламинарного к турбулентному, что определяется пороговым числом Рейнольдса. Большое значение для определения величины порогового числа Рейнольдса имеет качество увлекающей поверхности каверны, т.е. ее геометрическая и динамическая шероховатость, особенно в коротковолновой части спектра, так как поверхность каверны является свободной, и все возмущения в потоке воды передаются потоку газа

в пограничном слое каверны. Все эти перечисленные факторы заметно будут влиять на вовлечение газа и определять объем уносимого газа.

Таким образом, определив параметры ламинарно-турбулентного пограничного слоя по поверхности каверны, можно вычислить объем вовлекаемого газа в развивающийся пограничный слой, который будет

$$Q = \int_0^s (R(s) - \delta(s)) U_n(s, \delta) ds,$$

где  $U_n(s, \delta)$  – вертикальная скорость по нормали к поверхности каверны на внешней границе пограничного слоя, определяемая в процессе решения задачи пограничного слоя.

Оценку вовлечения газа пограничным слоем движущейся поверхностью каверны можно сделать на основании интегрального уравнения Кармана:

$$\frac{\tau}{\rho} = (2\theta + \delta^*) U_e \frac{dU_e}{dx} + U_e^2 \frac{d\theta}{dx},$$

как сделано это в работе [14], задавая функциональные зависимости толщины потери импульса и вытеснения от числа Рейнольдса, известные для многих течений. Однако в сужающейся части каверны с учетом изменяющихся продольного и поперечного радиусов кривизны отличие значений этих интегральных параметров для пограничного слоя в каверне от общепринятых значений этих параметров для простых течений может быть очень существенным.

Кроме того, самый существенный момент в пригодности получаемых оценок [14] – это необходимость постулирования ограничений на толщину пограничного слоя, которая должна быть существенно меньше местного радиуса каверны. В противном случае количественные оценки вовлечения газа в вентилируемой симметричной каверне будут некорректными. Более того, в зависимости от числа Рейнольдса и режима течения в каверне могут реализоваться пограничные слои, которые условно можно разделить на три случая. Первый случай – это когда толщина пограничного слоя существенно меньше радиуса каверны до конца каверны, второй – когда толщина пограничного слоя достигает радиуса каверны в конце каверны перед ее замыканием, и третий – когда толщина пограничного слоя становится равной радиусу каверны на значительном удалении от конца каверны. В первом случае результаты на основании интегральной оценки должны быть корректными, во втором случае такие оценки будут приводить к существенному завышению вовлечения, а в третьем

случае такие оценки, когда вовлечение достигает оси каверны вдали от конца каверны и интегральное уравнение Кармана вообще не пригодно, не корректны. В первом случае влияние числа Рейнольдса на длину каверны будет пренебрежимо малым и его можно не учитывать, во втором – число Рейнольдса не только определяет вовлечение газа, но и развивающийся пограничный слой, а, следовательно, и число Рейнольдса корректирует длину каверны. Третий случай, если он реализуется, отражает не только существенную зависимость параметров вентилируемой каверны от числа Рейнольдса, но и вязкое вовлечение должно изменять давление в конце каверны, а значит, число Рейнольдса влияет и на число кавитации.

Таким образом, необходима модель градиентного течения на внутренней поверхности каверны, адекватно учитывающая все перечисленные требования. Наиболее полной моделью турбулентного пограничного слоя является модель турбулентного пограничного слоя замкнутой с помощью модели переноса напряжений Рейнольдса с реальным учетом геометрии течения, которая позволяет определять локальные и интегральные характеристики турбулентного сдвигового течения в широком диапазоне чисел Рейнольдса.

При определении характеристик поля пространственного течения внутри вентилируемой каверны газ считается вязким и несжимаемым. Движение газа описывается системой уравнений Рейнольдса, замыкаемой на основании модели переноса напряжений Рейнольдса [17]:

$$\rho(\vec{U} \text{ grad } \vec{U}) = -\mu \text{ rot rot } \vec{U} - \text{ grad } P - \rho \text{ div}(\overline{u_i u_j});$$

$$\text{div} \vec{U} = 0, \quad (1)$$

где  $\vec{U}$ ,  $P$ ,  $\overline{u_i u_j}$  – соответственно вектор скорости, давление и одноточечные моменты второго порядка компонент пульсаций скорости, образующие тензор напряжений Рейнольдса.

Для криволинейного осесимметричного течения, формирующегося на внутренней поверхности каверны, метрические коэффициенты Ляме записываются в виде

$$H_1 = 1; \quad H_2 = r(s) - n \sqrt{1 - r_s'^2};$$

$$H_3 = 1 - n \frac{r_s''}{\sqrt{1 - r_s'^2}},$$

где  $x_3 = s$  – продольная координата по поверхности каверны;  $x_1 = n$  – поперечная координата, отсчитываемая по внутренней нормали от поверхности каверны;  $r$ ,  $r_s'$ ,  $r_s''$  – радиус каверны, первая

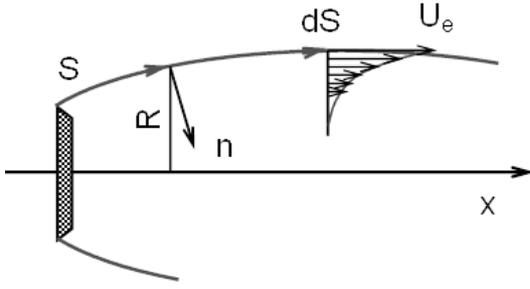


Рис. 1. Схема формирования градиентного течения внутри каверны,  $R(x)$  – текущий радиус каверны

и вторая производная изменения радиуса каверны соответственно.

Система уравнений (1) без учета массовых сил в проекции на координатные оси в криволинейной системе координат для осесимметричного случая в приближении пограничного слоя представима в виде [19]:

$$\begin{aligned} & \frac{U_s}{H_3} \frac{\partial U_s}{\partial s} + U_n \frac{\partial U_s}{H_1 \partial n} + \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial n} U_s U_n = \\ & = -\frac{1}{H_3} \frac{\partial P}{\partial s} + \frac{1}{Re_\delta} \frac{s_0}{\delta_0} \times \\ & \times \left[ \frac{\partial^2 U_s}{H_1^2 \partial n^2} + \frac{\partial \ln(H/H_1^2)}{H_1^2 \partial n} \frac{\partial U_s}{\partial n} + \frac{U_s}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{H_2}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial n} \right) \right] - \\ & - \frac{u_*^2}{U_\infty^2} \frac{s_0}{\delta_0} \left[ \frac{\partial \ln(H_2 H_3^2)}{H_1 \partial n} \overline{u_s u_n} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial n} \overline{u_s u_n} \right], \\ & \frac{\partial P}{\partial n} = U_s^2 \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial n} - \left( \frac{u_*}{U_\infty} \right)^2 \times \\ & \times \left[ \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial n} (H_2 H_3 \overline{u_n^2}) - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial n} \overline{u_\phi^2} - \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial n} \overline{u_s^2} \right], \\ & \frac{\partial}{\partial s} (H_2 U_s) + \frac{\partial}{\partial n} (H_2 H_3 U_n) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $u_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ ;  $\tau_0$  – трение на поверхности каверн;  $Re_\delta = \delta_0 U_\infty/\nu$ ;

$$\frac{\delta_0}{s_0} \sim \frac{u_*^2}{U_\infty^2} \sim \frac{1}{Re_\delta}.$$

Для решения полученной параболизированной системы уравнений необходимо определение продольного градиента давления на внешней границе пограничного слоя, который для задач внутреннего течения определяется из условия сохранения расхода жидкости для произвольного сечения.

Полученная система уравнений остается незамкнутой, т. е. необходимы четыре дополнительных

уравнения. Эту задачу и решает система уравнений для переноса напряжений Рейнольдса.

Уравнения переноса для компонент тензора напряжений Рейнольдса  $\overline{u_i u_j}$  в осесимметричном случае в приближении пограничного слоя в ортогональной криволинейной системе координат записываются в виде [19]:

$$\begin{aligned} & U_3 \frac{1}{H_3} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\overline{u_3^2}}{2} \right) + U_1 \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\overline{u_3^2}}{2} \right) = \\ & = -\overline{u_1 u_3} \frac{\partial U_3}{\partial n} - \frac{U_3}{u_1 u_3} \frac{\partial H_3}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial n} - \frac{\overline{u_3^2}}{u_3^2} \frac{1}{H_3} \frac{\partial U_3}{\partial s} - \\ & - U_1 \overline{u_3^2} \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial n} - \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial n} \left[ H \frac{\overline{u_3^2}}{2} u_1 \right] - \\ & - \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial n} \overline{u_3^2 u_1} + \frac{1}{H} \frac{p}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} (H_2 u_3) + \\ & + \nu \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial n} \left[ H \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\overline{u_3^2}}{2} \right) \right] + \nu \overline{u_3^2} \times \\ & \times \left[ \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial n} \frac{\partial H_2}{\partial n} - \left( \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial n} \right)^2 \right] + \\ & + \nu \frac{1}{H_3^2} \overline{u_3} \frac{\partial u_1}{\partial s} \frac{\partial H_3}{\partial n} - \nu \frac{1}{H_\alpha^2} \frac{\partial u_3}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u_3}{\partial x_\alpha}; \\ & U_3 \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\overline{u_2^2}}{2} \right) + U_1 \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\overline{u_2^2}}{2} \right) = \\ & = \frac{1}{H} \frac{p}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (H_3 u_2) - \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial n} \left[ H \frac{\overline{u_2^2}}{2} u_1 \right] - \\ & - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial n} \overline{u_2^2 u_1} - \overline{u_2^2} \left( \frac{U_1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial n} + \frac{U_3}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial s} \right) + \\ & + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial n} \left[ H \frac{\overline{u_3^2}}{2} u_1 \right] - \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial n} \overline{u_3^2 u_1} + \frac{1}{H} \frac{p}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} (H_2 u_3) + \\ & + \nu \left\{ -\frac{1}{H_\alpha^2} \frac{\partial u_2}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u_2}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial n} \left[ H \frac{\partial}{\partial n} \frac{\overline{u_2^2}}{2} \right] + \right. \\ & \left. + \overline{u_2^2} \left[ -\left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial n} \right)^2 + \frac{1}{H} \frac{\partial H_2}{\partial n} \frac{\partial H_3}{\partial n} \right] + 2u_2 \frac{\partial u_1}{\partial \phi} \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial H_2}{\partial n} \right\}; \\ & U_3 \frac{1}{H_3} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\overline{u_1^2}}{2} \right) + U_1 \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\overline{u_1^2}}{2} \right) = \frac{1}{H} \frac{p}{\rho} \frac{\partial}{\partial n} (H u_1) - \\ & - \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial n} \left[ H \frac{\overline{p}}{\rho} u_1 \right] - \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial n} \left[ H u_1 \frac{\overline{u_1^2}}{2} \right] + \quad (3) \\ & + \frac{1}{H_2} \left( \frac{\partial H_2}{\partial n} \right) \overline{u_2^2 u_1} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial n} \overline{u_3^2 u_1} - \overline{u_1^2} \frac{\partial U}{\partial n} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +2U_3 \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial n} \overline{u_1 u_3} - \nu \frac{1}{H_\alpha^2} \frac{\partial u_1}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u_1}{\partial x_\alpha} + \\
 & - U_\alpha \frac{1}{H_i} \frac{\partial \ln H_\alpha}{\partial x_i} \Big) + \\
 & + \nu \left\{ \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial n} \left[ H \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\overline{u_1^2}}{2} \right) \right] + \overline{u_1^2} \left[ \frac{1}{H} \frac{\partial^2 H}{\partial n^2} - \left( \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial n} \right)^2 \right] - \right. \\
 & \left. - 2 u_1 \frac{\partial u_3}{\partial s} \frac{1}{H_3^2} \frac{\partial H_3}{\partial n} - 2 u_1 \frac{\partial u_2}{\partial \phi} \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial H_2}{\partial n} \right\}; \\
 & \frac{U_3}{H_3} \frac{\partial}{\partial s} (\overline{u_1 u_3}) + U_1 \frac{\partial}{\partial n} (\overline{u_1 u_3}) = -\frac{1}{H} \left( \frac{\partial}{\partial n} \left( \overline{H u_3 \frac{\overline{p}}{\rho}} \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{H}{H_3} \overline{u_1 \frac{\overline{p}}{\rho}} \right) \right) + \frac{1}{H} \frac{\overline{p}}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial n} (H u_3) + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{H}{H_3} u_1 \right) \right] - \\
 & - \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial n} [H \overline{u_1 u_3 u_1}] - \overline{u_1 u_3} \frac{\partial U_1}{\partial n} - \overline{u_2^2} \frac{\partial U_3}{\partial n} + \\
 & + U_3 (2 \overline{u_3^2} - \overline{u_1^2}) \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial n} - U_1 \overline{u_1 u_3} \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial n} + \\
 & + \overline{u_3 u_2 u_2} \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial n} + (\overline{u_3^2} - \overline{u_1^2 u_3}) \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial n} + \\
 & + \nu \left\{ \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial n} \left[ H \frac{\partial}{\partial n} \overline{u_1 u_3} \right] + \overline{u_1 u_3} \left[ \frac{3}{H} \frac{\partial H_3}{\partial n} \frac{\partial H_2}{\partial n} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - 2 \left( \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial n} \right)^2 - \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial n} \right)^2 \right] - \right. \\
 & \left. - 2 \left[ \overline{u_3} \frac{\partial u_2}{\partial \phi} \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial H_2}{\partial n} + \overline{u_3} \frac{\partial u_3}{\partial s} \frac{1}{H_3^2} \frac{\partial H_3}{\partial n} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - u_1 \frac{\partial u_1}{\partial s} \frac{1}{H_3^2} \frac{\partial H_3}{\partial n} \right] - \frac{2}{H_\alpha^2} \frac{\partial u_1}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u_3}{\partial x_\alpha} \right\}.
 \end{aligned}$$

В приведенной системе уравнений слагаемые имеют достаточно точный физический смысл и в криволинейной системе координат:

– потоковые слагаемые, отвечающие за турбулентную и вязкую диффузию соответственно:

$$\Pi_i = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{H}{H_i} \frac{\overline{p}}{\rho} u_i \right) - \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{H}{H_\alpha} \frac{\overline{u_i^2}}{2} u_\alpha \right),$$

$$D_\nu = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ \frac{H}{H_\alpha^2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{\overline{u_i^2}}{2} \right) \right],$$

где множители  $H/H_i$  под знаком производной означают площадь криволинейной единичной площадки, через которую проходит диффузионный поток пульсационной энергии;

– источники слагаемые, отвечающие за порождение турбулентной энергии в данной точке потока:

$$P_i = -\overline{u_i u_\alpha} \frac{\partial U_i}{\partial x_\alpha} - \overline{u_i u_\alpha} \left( U_i \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial \ln H_i}{\partial x_\alpha} - \right.$$

– слагаемые, отвечающие за вязкую диссипацию:

$$\varepsilon = \nu \frac{1}{H_\alpha^2} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}.$$

При относительном изменении метрических коэффициентов, пропорциональном  $1/\sqrt{\text{Re}}$ , вязкие члены, появившиеся вследствие кривизны линий тока, можно не учитывать по сравнению с вязкой диффузией турбулентной энергии.

Уравнения переноса нормальных напряжений или компонент энергии турбулентности, а также касательного напряжения  $-\overline{u_1 u_3}$ , определяющего основной вклад в уравнение сохранения продольного импульса в приближении пограничного слоя, замыкают модель турбулентности в напряжениях. Использование уравнений для каждой компоненты пульсационной энергии позволяет в отличие от  $k-\varepsilon$ -модели учесть в уравнениях сохранения импульса члены порядка  $1/\text{Re}$ , что существенно повышает точность расчетов в областях даже с небольшими изменениями кривизны.

Благодаря осевой симметрии в уравнении переноса трансверсальной компоненты пульсационной энергии нет прямого порождения за счет взаимодействия напряжений Рейнольдса с осредненным движением. Слагаемое

$$\overline{u_2^2} \left( \frac{U_1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial n} + \frac{U_3}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial s} \right)$$

для осесимметричного течения внутри каверны, где  $\partial H_2/\partial n \leq 0$ ,  $\partial H_2/\partial s = r'_s H_3$ , при  $r'_s > 0$  становится дополнительной диссипацией пульсационной энергии за счет кривизны линий тока, а при  $r'_s < 0$  – дополнительным источником пульсационной энергии.

Наибольший суммарный вклад в баланс пульсационной энергии по толщине турбулентного пограничного слоя вносят члены порождения, диссипации и перераспределения пульсационной энергии по компонентам энергии.

Однако отношение этих членов уравнения к членам, определяющим как вязкую, так и турбулентную диффузию при учете кривизны линий тока, изменяется, и диффузия в поперечном направлении становится сопоставимой с конвективными членами.

При определении параметров пограничного слоя на вогнутой поверхности каверны необходимо

выполнение условия, чтобы толщина пограничного слоя оставалась меньше и радиуса каверны, и радиуса продольной кривизны каверны, так как в противном случае координатные линии будут пересекаться в расчетной области.

В уравнения сохранения продольного и нормального импульсов, переноса нормальных напряжений в рассмотренном приближении входит только одна компонента касательных напряжений:  $-\overline{u_1 u_3}$ , поэтому естественно ограничиться одним уравнением для касательных напряжений, что не изменяет качественной структуры рассматриваемой системы уравнений, но уменьшает количество вычислений.

В уравнениях переноса вторых моментов появились третьи моменты пульсаций скоростей, отвечающих за турбулентную диффузию в нормальном направлении к обтекаемой поверхности, а также моменты пульсаций давления с градиентами пульсаций скоростей, отвечающих за перераспределение пульсационной энергии между компонентами, но не вносящих вклад в суммарное значение энергии. Порядок этих корреляционных моментов, значительно превосходящий порядок диффузионных членов, требует детального моделирования в градиентных потоках [9]. В уравнения переноса напряжения Рейнольдса входят также и компоненты тензора скорости диссипации турбулентной энергии.

Таким образом, необходимы четыре группы соотношений (либо уравнений) для замыкания системы уравнений (2)–(3).

**Тройные корреляции пульсационных скоростей.**

Тройные корреляции скорости  $\overline{u_i u_j u_k}$  моделируют, исходя из принципа физической аналогии тройных корреляций скорости турбулентной диффузии пульсаций давления  $\overline{p u_i}$  [9].

Как правило, на практике расчетов даже сложных течений применяют симметричную модель тройных корреляций скорости, которая в ортогональной криволинейной системе координат принимает вид [18]:

$$\begin{aligned} \overline{u_i u_j u_k} = & -A \frac{k}{\varepsilon} \left[ \overline{u_i u_l} \frac{\partial u_j u_k}{H_l \partial x_l} + \overline{u_j u_l} \frac{\partial u_i u_k}{H_l \partial x_l} + \right. \\ & + \overline{u_k u_l} \frac{\partial u_i u_j}{H_l \partial x_l} + \overline{u_i u_j u_k u_l} \frac{\partial \ln H_i H_j}{H_l \partial x_l} + \\ & + \overline{u_i u_k u_j u_l} \frac{\partial \ln H_k H_i}{H_l \partial x_l} + \overline{u_j u_k u_i u_l} \frac{\partial \ln H_j H_k}{H_l \partial x_l} - \\ & \left. - 2 \left( \overline{u_i u_l u_j u_l} \frac{\partial \ln H_l}{H_k \partial x_k} + \overline{u_i u_l u_k u_l} \frac{\partial \ln H_l}{H_j \partial x_j} + \right. \right. \end{aligned} \quad (4)$$

$$\left. + \overline{u_j u_l u_k u_l} \frac{\partial \ln H_l}{H_i \partial x_i} \right) \Bigg],$$

где свертка происходит по индексу  $l$ .

В приближении пограничного слоя для осесимметричного течения необходимо учитывать следующие корреляционные моменты:  $u_i^2 u_1$ ,  $u_i^2 u_3$ .

Симметричная модель тройных корреляций с тензорным коэффициентом турбулентной диффузии хорошо “работает” в градиентных течениях при больших локальных числах Re. С приближением к обтекаемой поверхности, где существенным становится влияние вязкости, эта модель дает завышенные значения потоковых членов. Поэтому вводятся скалярные поправки, зависящие от локальных чисел Рейнольдса.

**Корреляции пульсаций давления с градиентами пульсационных скоростей.**

Корреляция  $p \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$  вследствие соленоидальности пульсационного поля не вносит вклада в баланс пульсационной энергии, однако отвечает за перераспределение пульсационной энергии между ее компонентами. Этот эффект объясняется молярным взаимодействием частиц жидкости, совершающих при столкновении работу против сил давления [11].

Доказав эквивалентность работы нормальных и касательных напряжений против сил давления, Ротта предложил форму количественной оценки корреляций давление–напряжение, которая затем была преобразована к виду [18]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{H} \overline{p \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{H}{H_j} u_i \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{H}{H_i} u_j \right) \right)} = \\ = \Pi_{ij,1} + \Pi_{ij,2} + \Pi_{ij,3}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\Pi_{ij,1} = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} (\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k),$$

$$\Pi_{ij,2} = -C_2 (P_{ij} - \frac{2}{3} P_\Sigma),$$

$$\Pi_{ij,3} = -C_3 (D_{ij} - \frac{2}{3} P_\Sigma),$$

$P_{ij}$  – тензор порождения компоненты  $\overline{u_i u_j}$  напряжения Рейнольдса;  $P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 P_{ii}$  – порождение пульсационной энергии. Тензор порождения и диффузии в криволинейной системе координат для осесимметричного течения принимают вид:

$$\begin{aligned} P_{ij} = & - \sum_{l=1}^3 \left[ \frac{1}{H_i} \overline{u_i u_l} \frac{\partial U_j}{\partial x_l} + \frac{1}{H_l} \overline{u_j u_l} \frac{\partial U_i}{\partial x_l} + \right. \\ & \left. + 2 \left( \frac{1}{H_j H_l} \frac{\partial H_l}{\partial x_j} \overline{u_i u_l} + \frac{1}{H_i H_l} \frac{\partial H_l}{\partial x_i} \overline{u_j u_l} \right) U_i + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{H_j H_l} \frac{\partial H_j}{\partial x_l} \overline{u_i u_l} U_j + \frac{1}{H_i H_l} \frac{\partial H_i}{\partial x_l} \overline{u_j u_l} U_i \Big]; \\
 D_{ij} = & - \sum_{l=1}^3 \left[ \frac{1}{H_j} \overline{u_i u_l} \frac{\partial U_l}{\partial x_j} + \frac{1}{H_i} \overline{u_j u_l} \frac{\partial U_l}{\partial x_i} + \right. \\
 & + 2 \left( \frac{1}{H_j H_l} \frac{\partial H_j}{\partial x_l} \overline{u_i u_l} U_j + \frac{1}{H_i H_l} \frac{\partial H_i}{\partial x_l} \overline{u_j u_l} U_i \right) + \\
 & \left. + \left( \frac{1}{H_i H_l} \frac{\partial H_l}{\partial x_j} \overline{u_i u_l} U_j + \frac{1}{H_i H_l} \frac{\partial H_l}{\partial x_i} \overline{u_j u_l} U_i \right) U_i \right].
 \end{aligned}$$

Таким образом, предполагается, что скорость стремления к изотропному состоянию турбулентности в данной точке потока определяется отклонением рассматриваемой компоненты тензора напряжений Рейнольдса от других компонент, а геометрия потока не оказывает непосредственного влияния на этот механизм.

Вторая часть механизма перераспределения пульсационной энергии за счет взаимодействия осредненного движения с пульсационным претерпевает существенное изменение, если относительное изменение кривизны линий тока становится порядка единицы. При относительном изменении кривизны координатных линий менее  $1/\text{Re}_\delta^{1/2}$  вариацией параметров Ламе можно пренебречь.

#### Модельное уравнение переноса изотропной части скорости диссипации.

Основываясь на гипотезе А. Н. Колмогорова о статистическом равновесии мелкомасштабных компонент турбулентности и учитывая, что при больших числах Рейнольдса диссипация турбулентной энергии в основном происходит в вихрях наименьших масштабов, предполагается, что скорость диссипации не зависит от вида течения и является достаточно консервативной величиной.

Модельное уравнение для переноса скорости диссипации турбулентной энергии в криволинейной ортогональной системе координат в приближении пограничного слоя записывают по аналогии с уравнениями переноса напряжений Рейнольдса [19]:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\varepsilon}{dt} = & C_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} P_\Sigma - C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon}{k} \left[ \varepsilon - 2\nu \left( \frac{\partial k^{1/2}}{\partial n} \right)^2 \right] + \\
 & + C_\varepsilon \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{H}{H_1^2} k \overline{u_1^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \right] + \nu \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{H}{H_1^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \right]. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Это уравнение с определенными константами достаточно хорошо отражает поведение скорости диссипации в пограничном слое, расчетные характеристики напряжений Рейнольдса вполне удовлетворительно согласуются с данными экспериментов выше слоя постоянного напряжения при

$x_1^+ \geq 70 \dots 100$ . Однако в районе вязкого подслоя происходит количественное рассогласование компонент напряжений Рейнольдса и скорости диссипации, поэтому постулируется зависимость коэффициентов  $C_{\varepsilon_1}$  и  $C_{\varepsilon_2}$  от функции, зависящей от локального числа Рейнольдса  $R_t = \frac{k^2}{\varepsilon \nu}$  [10]:

$$C_{\varepsilon_1} = C_{\varepsilon_1}(1 + 0,8e^{-R_t}); \quad C_{\varepsilon_2} = C_{\varepsilon_2}(1 - 0,2e^{-R_t}).$$

В результате применения такой модификации уравнение для переноса скорости диссипации становится одинаково пригодным для широкого диапазона чисел Re.

#### Тензор скорости диссипации.

Как отмечалось выше, при больших числах Рейнольдса мелкомасштабное движение будет практически изотропным, что определяет одинаковую скорость диссипации в уравнениях для нормальных напряжений и отсутствие диссипации для касательных напряжений. Однако в пограничном слое при малых локальных числах Рейнольдса при существенной анизотропии турбулентности вводят тензор скоростей деформации [10]:

$$\varepsilon_{ij} = \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = f_s \frac{u_i u_j}{2k} \varepsilon + (1 - f_s) \delta_{ij} \varepsilon.$$

Функция  $f_s$  изменяется от единицы при  $R_t \rightarrow 0$  до нуля при  $R_t \rightarrow \infty$ :

$$f_s = (1 + 0,06R_t)^{-1}.$$

Таким образом, уравнение переноса изотропной части скорости диссипации замыкает систему уравнений, моделирующих турбулентные течения на произвольных криволинейных поверхностях.

Граничные условия для компонент вектора скорости газа в каверне на поверхности каверны определяются на основании их равенства соответствующим компонентам вектора скорости обтекающего потока:

$$U_3|_{n=0} = U_\varepsilon; \quad U_1|_{n=0} = 0.$$

Граничные условия для компонент тензора турбулентных напряжений задаются из условия отсутствия возмущений скорости на границе каверны:

$$\overline{u^2} = \overline{v^2} = \overline{w^2} = \overline{uv} = 0.$$

Граничное условие для скорости диссипации турбулентности определяется из вязкой диффузии турбулентной энергии на границе каверны:

$$\varepsilon|_{n=0} = \nu \frac{\partial^2 k}{\partial n^2}.$$

На внешней границе пограничного слоя продольная компонента скорости принимается равной нулю, давление на оси каверны принимается постоянным. Компоненты тензора напряжений Рейнольдса вне области пограничного слоя принимаются нулевыми.

Задача решается численно конечно-разностным методом [19]. Применяется шеститочечный шаблон с переменным шагом по нормали к поверхности каверны:

$$n = \eta \exp(a(\eta - 1.0)).$$

Для численного решения задача (2)–(6) приводится к безразмерному виду. В качестве характерных масштабов принимается длина образующей каверны  $S_0$  (продольный линейный масштаб), местная толщина пограничного слоя  $\delta$  (поперечный масштаб), а также местная скорость воды на поверхности каверны  $U_e$ :

$$U_3 = \tilde{U}_3 U_e; \quad U_1 = \tilde{U}_1 \frac{\delta}{S_0} U_e; \quad s = S_0 x_3; \quad n = \delta x_1;$$

$$\overline{u_i u_j} = U_e^2 \tilde{u}_i \tilde{u}_j; \quad \varepsilon = \tilde{\varepsilon} \frac{U_e^3}{\delta}; \quad P = \tilde{p} \rho U_0^2.$$

В результате область интегрирования сводится к квадрату с единичной продольной скоростью на поверхности каверны. При интегрировании уравнения неразрывности используются промежуточные точки. Линеаризация уравнений переноса осуществляется на основании записи коэффициентов с предыдущего итерационного слоя.

Таким образом, при фиксированном диаметре кавитатора и заданной скорости течения и постоянном давлении в каверне и ее конкретного удлинения, определяемого по числу кавитации по формуле Гарабедяна [14]:

$$\frac{L}{d} = \frac{1}{\sigma} \left( C_D \ln \frac{1}{\sigma} \right)^{1/2},$$

на основании изложенной модели определяются характеристики газового ламинарно-турбулентного пограничного слоя на внутренней поверхности каверны, а, следовательно, и величина вязкого вовлечения газа.

### 1.1.1. Толщина сдвигового слоя на поверхности каверны

Информативность такого параметра как толщина пограничного слоя для сдвиговых течений весьма низкая, так как это достаточно условный параметр и от его численного значения как в эксперименте, так и при численном расчете интегральные

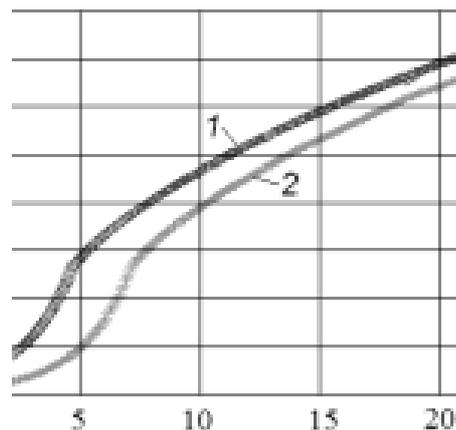


Рис. 2. Толщина газового сдвигового слоя, отнесенная к радиусу кавитатора, при  $Re_d = 3000$

параметры сдвигового слоя (толщины вытеснения и потери импульса, величина динамической скорости) слабо зависят. Однако для внутренних течений при достижении толщины пограничного слоя определенного расстояния до оси каверны невозмущенная продольная компонента скорости на оси каверны не обеспечивает законы сохранения для вовлекаемого газа в предположении несжимаемого газа. Поэтому оценки, полученные на основании интегральных соотношений для классического пограничного слоя, становятся неприемлемыми.

Для области каверны ниже по течению от этого сечения необходимо рассматривать либо полные уравнения Навье-Стокса, что приведет к появлению градиента давления на оси каверны, либо вводить значение продольной скорости  $U_0$  на оси каверны, согласованное с величиной вовлекаемого газа на единице длины каверны, что может быть в первом приближении представлено выражением:

$$\frac{dU_0}{ds} = \frac{2 V_\delta}{R - \delta}.$$

Результаты расчетов толщины пограничного слоя в каверне разных удлинений при ламинарном и турбулентном режимах обтекания представлены на рис. 2. Расчеты характеристик формирующегося газового сдвигового слоя на внутренней поверхности каверны при малых числах Рейнольдса показали, что они незначительно отличаются от характеристик классического пограничного слоя Блазиуса при ламинарном режиме обтекания до тех пор, пока толщина пограничного слоя не приближается к значению локального радиуса каверны. Так, при  $Re_d < 2000$  независимо от величины

задаваемых начальных возмущений, пограничный слой остается ламинарным по всей длине каверны. При больших числах Рейнольдса существуют предельные значения возмущений, выше которых пограничный слой имеет переходной участок, а затем становится турбулентным. Длина переходного участка зависит от величины задаваемых возмущений и начальной толщины сдвигового слоя.

Представленные два результата отличались начальной толщиной сдвигового слоя при практически одинаковых интенсивностях напряжений Рейнольдса. Кривая 1 соответствует начальной толщине сдвигового слоя, составляющей 3%, а кривая 2 – 1% радиуса кавитатора. На начальной стадии формирования сдвигового слоя (до удлинения, равного 5,) скорость его роста существенно зависит от начальных условий; после удлинения, равного 10, разница в толщинах сдвиговых слоев уменьшается и постоянно сокращается. При  $\delta/R > 0.7$  скорость роста толщины сдвигового слоя резко возрастает, что объясняется близостью оси каверны и необходимостью согласования граничных условий. Поэтому расчет при достижении таких толщин сдвигового слоя должен прекращаться.

Величины толщин вытеснения и толщин потери импульса и их отношение ( $H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}$ ) на поверхности каверны несколько отличаются от соответствующих значений на пластине. Так, на пластине [17] значение  $H = 2.55$  и может изменяться в диапазоне от 2.2 до 4.0 в зависимости от продольного градиента давления. В пограничном слое на внутренней поверхности каверны значения параметра  $H$  при ламинарном режиме течения и нулевом продольном градиенте давления изменялось в пределах от 3.0 до 2.8. Причем с удалением от кавитатора значение параметра  $H$  уменьшается. При переходных и турбулентных режимах обтекания значения параметра  $H$  изменяется в пределах от 1.9 до 1.4, что также коррелирует с классическими результатами турбулентного пограничного слоя, но все же отличается от них.

При  $Re_d = 3 \cdot 10^4$  ламинарный пограничный слой даже на удлинении 10–12 занимает не более 20% от радиуса каверны (рис. 3). При увеличении возмущений за кавитатором в качестве начальных условий ламинарный сдвиговый слой переходит в турбулентный, и скорость роста пограничного слоя резко возрастает. При этом уже на удлинении, равном 6, толщина сдвигового слоя занимает половину радиуса каверны и происходит увеличение скорости роста внутреннего сдвигового слоя, что, скорее всего, связано с жестким граничным условием

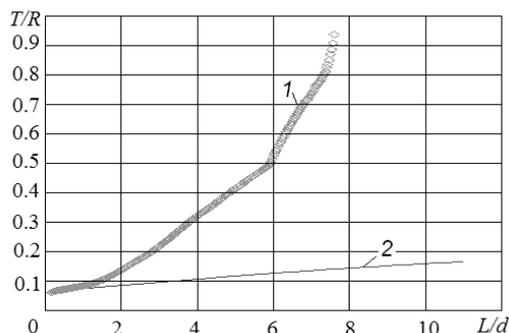


Рис. 3. Безразмерная толщина пограничного слоя по длине каверны при турбулентном 1 и ламинарном 2 сдвиговом слое при  $Re_d = 3 \cdot 10^4$

для нулевой продольной скорости на оси каверны. Таким образом, если толщина сдвигового слоя на поверхности каверны не превышает половину радиуса каверны, оценки вязкого вовлечения газа в погранслоином приближении корректны. При толщине сдвигового слоя в интервале  $0.5 \leq \frac{\delta}{R} \leq 0.8$  получается заниженное вязкое вовлечение на основании определения нормальной скорости на внешней границе сдвигового слоя, но ошибка не должна превышать 10–15%. При  $\frac{\delta}{R} \geq 0.8$  необходимо вводить поправку на величину продольной скорости на оси каверны. Это потребует либо эмпирическую зависимость для изменения давления по длине каверны, либо решения полных уравнений Рейнольдса для газа каверны, начиная с некоторого сечения каверны, что позволит установить взаимосвязь скорости и давления на оси каверны при неизменной форме каверны.

### 1.1.2. Вязкое напряжение трения на границе каверны

Величиной, характеризующей вязкое напряжение на границе раздела вода–газ, может быть динамическая скорость, вычисляемая по параметрам газа и величине градиента касательной скорости газа, вовлекаемого потоком воды.

На рис. 4 представлены значения динамической скорости на границе каверны при различных начальных возмущениях сдвигового слоя. Малые начальные возмущения приводят внутри тонкого сдвигового слоя к большим градиентам продольной скорости, поэтому динамическая скорость значительно больше, чем при начальных возмущениях той же интенсивности, но распределенные на большей толщине. Однако на определенном расстоянии от кавитатора начальные возмущения,

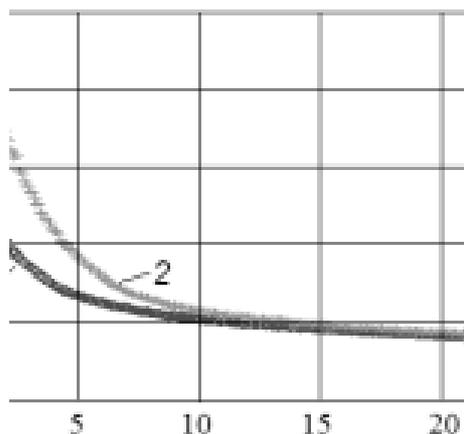


Рис. 4. Изменение динамической скорости по длине каверны при  $Re_d = 3000$  при различных значениях начальной толщины сдвигового слоя: 1 –  $\delta_0/d = 0.3$ , 2 –  $\delta_0/d = 0.1$

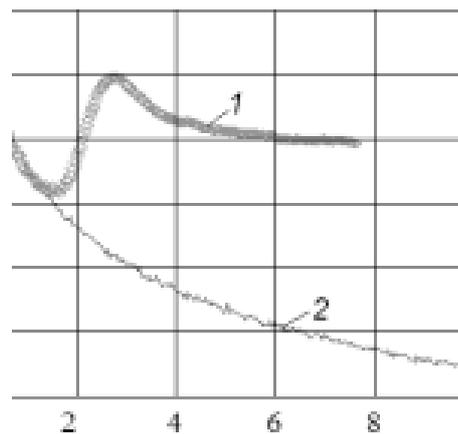


Рис. 5. Значение динамической скорости по длине каверны при турбулентном 1 и ламинарном 2 сдвиговом слое при  $Re_d = 33000$

если они не привели к турбулизации сдвигового слоя, не влияют на интегральные параметры сдвигового слоя.

Анализируя результаты расчета динамической скорости на поверхности каверны при увеличении числа Рейнольдса на порядок по сравнению с результатами, представленными на рис. 4, при изменении режима течения от ламинарного к турбулентному (рис. 5), можно сделать очевидные выводы, что величина динамической скорости строго отслеживает переход от ламинарного режима течения к турбулентному и не чувствительна к изменению толщины сдвигового слоя, при достижении ею предельных значений (рис. 3). При этом изменение отношения толщины вытеснения к толщине потери импульса вдоль поверхности каверны как при ламинарном, так и при турбулентном режимах течения подобны классическим пограничным параметрам на пластине, причем при ламинарном режиме течения параметр  $H$  возрастает к хвосту каверны, стремясь к Блазиусовскому значению  $H = 2.55$ , а при турбулентном режиме параметр  $H$  уменьшается к хвосту каверны, но не достигает предельных значений 1.35–1.40 при развитом пограничном слое на пластине. Параметр  $H$ , так же как и динамическая скорость, нечувствителен к граничным условиям для продольной скорости на оси каверны, так как основной вклад в эти интегральные характеристики сдвигового слоя (толщину вытеснения и толщину потери импульса) вносят значения продольной скорости вблизи поверхности каверны.

### 1.1.3. Вязкое вовлечение газа каверны обтекающим потоком

Обсуждая и предлагая различные сценарии уноса газа из каверны, в идеальной постановке останавливаются, как правило, на конечной стадии уноса, связывая массовый расход газа в вентилируемой каверне с эмпирическими выражениями при постоянном давлении в каверне, и не принимают во внимание, что газ, перед тем как покинуть каверну, необходимо разогнать или закрутить, а это невозможно сделать без учета вязких напряжений на границах раздела сред. Поэтому идея J. Spurk [14] по оценке вязкого вовлечения в вентилируемой каверне на основании интегральных соотношений пограничного слоя при условии, что толщина сдвигового слоя существенно меньше радиуса каверны и течение в сдвиговом слое не меняет режим течения (ламинарный или турбулентный), достаточно удачна, однако реальные расчеты показывают существенное расхождение внутреннего сдвигового слоя по сравнению с параметрами внешних классических пограничных слоев, особенно когда толщина сдвигового слоя становится сравнимой с местным радиусом каверны.

Так, на рис. 6 представлены результаты безразмерного вязкого вовлечения газа в вентилируемой каверне потоком воды при параметрах скорости потока и диаметра кавитатора, соответствующих условиям лабораторного эксперимента Института гидромеханики НАН Украины. При малых числах Рейнольдса наблюдается зависимость вовлечения газа от величины начальных возмущений. При этом ламинарный режим сохраняется на больших удлинениях, однако на начальной стадии

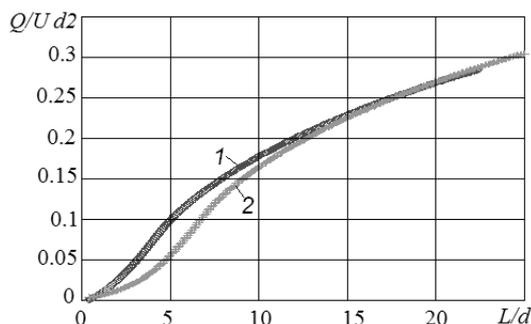


Рис. 6. Кривые вязкого вовлечения воздуха каверны обтекаемым потоком при  $Re_d = 3000$  при различных значениях начальной толщины сдвигового слоя:  $1 - \delta_0/d = 0.3$ ,  $2 - \delta_0/d = 0.1$

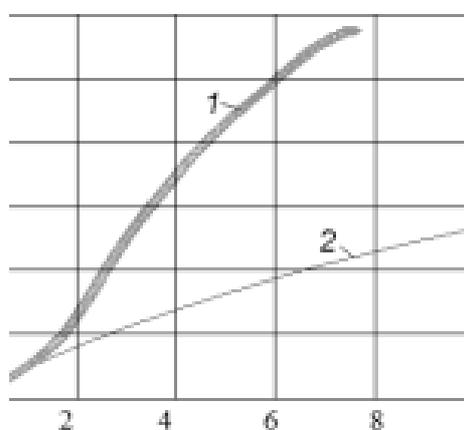


Рис. 7. Коэффициент вовлечения газа в каверне при ламинарном 2 и турбулентном 1 режимах сдвигового слоя при  $Re_d = 33000$

расхождение в величинах вовлечения может существенно отличаться. Так, на удлинении каверны, равном 5, безразмерное вовлечение может отличаться практически в два раза, однако на больших удлинениях влияние начальных возмущений, если режим течения сохраняется ламинарным, пренебрежимо мало.

На рис. 7 приведены результаты определения вязкого вовлечения в каверне за кавитатором при  $Re_d = 33000$  при различных начальных возмущениях сдвигового слоя за кавитатором. При малой начальной толщине сдвигового слоя реализуется ламинарный сдвиговый слой по всей длине каверны, а при некотором пороговом значении реализуется ламинарно-турбулентный сдвиговый слой с достаточно длинным переходным участком. По мере увеличения начальной толщины сдвигового слоя длина переходного участка уменьшается.

Однако скорости вовлечения в конце переходного участка практически совпадают: чем короче переходной участок, тем больше скорость вовлечения. На турбулентном участке скорость роста вовлечения становится меньшей, но существенно больше, чем при ламинарном сдвиговом слое при тех же удлинениях. Так, при удлинении каверны, равном 4, вязкое вовлечение более чем 2.5 раза больше при ламинарно-турбулентном сдвиговом слое, чем при ламинарном. Такая же тенденция сохраняется и на турбулентном участке сдвигового слоя, где величина вовлечения превышает величину вовлечения при ламинарном сдвиговом слое почти в три раза при тех же удлинениях. Однако при приближении толщины сдвигового слоя к оси каверны, т. е. толщина сдвигового слоя становится равной радиусу каверны, применение формулы

$$Q = \int_0^s (R(s) - \delta(s)) U_n(\delta, s) ds$$

для прямого определения вовлечения становится не корректным. Объем каверны, незанятый сдвиговым слоем, не может обеспечить сдвиговым слоем необходимым объемом газа при нулевой скорости на оси каверны. Поэтому с некоторого сечения каверны, когда толщина сдвигового слоя приближается по величине к радиусу каверны, необходимо отказаться от погранслоного приближения и решать полные уравнения Рейнольдса либо ввести приближенную оценку величины вовлечения в хвосте каверны, введя некоторую пороговую толщину сдвигового слоя, например,  $\delta_p = 0.8R$ :

$$Q = 2\pi \int_0^{s_p} (R(s) - \delta(s)) U_n(\delta, s) ds + 0.4\pi R(s_p) U_n(\delta_p, s_p) (L - s_p),$$

где  $s_p$  – расстояние по оси каверны от кавитатора до точки, где толщина сдвигового слоя достигает величины, равной  $0.8R$ . Это дополнительное слагаемое и определяет необходимую величину продольной скорости на оси каверны:

$$U_0 = \frac{10U_n(\delta_p, s_p)(L - s_p)}{R(s_p)}.$$

Значения коэффициентов в этих формулах отвечает выбранным значением отношения, которое может определяться значением скорости воздуха каверны при покидании каверны.

Таким образом, для вентилируемых каверн, формирующихся за кавитаторами при относительно малых числах Рейнольдса, вязкое вовлечение

существенно зависит от возмущений, вносимых кавитатором.

## 2. ПРОГНОЗНЫЕ ОЦЕНКИ

Формирование сдвигового слоя на поверхности каверны в первую очередь зависит от физических свойств газа, а именно от его плотности и вязкости при соответствующей температуре и давлении, а также от скорости потока и длины обвода каверны, на которой этот слой формируется. При постоянном давлении в каверне можно говорить о вязком формировании сдвигового слоя газа (воздуха), зависящем только от одного безразмерного параметра – числа Рейнольдса, построенного по скорости потока, длине каверны и кинематического коэффициента вязкости газа. Таким образом, часть объема газа каверны вовлекается в движение окружающей жидкостью и уносится потоком, и этот объем компенсируется в вентилируемой каверне для поддержания ее соответствующей формы и удлинения. И до тех пор, пока толщина сдвигового слоя значительно меньше радиуса осесимметричной каверны, единственным параметром может быть число Рейнольдса, вычисленное по длине каверны, на основании которого можно определять площадь вытеснения (вовлечения) в корме каверны. Для ламинарного сдвигового слоя безразмерный секундный расход вовлеченного газа будет:

$$\frac{Q}{Ud^2} = A_L \frac{L}{d} \frac{1}{\text{Re}_L^{1/2}} = A_L \frac{1}{\sigma} \left( \frac{C_D \ln \frac{1}{\sigma}}{\text{Re}_L} \right)^{1/2},$$

а для турбулентного режима расход может изменяться от

$$\frac{Q}{Ud^2} = A_T \frac{L}{d} \frac{1}{\text{Re}_L^{1/5}} = A_T \frac{1}{\sigma} \frac{(C_D \ln \frac{1}{\sigma})^{1/2}}{\text{Re}_L^{1/5}}$$

при  $\text{Re}_L \leq 5 \cdot 10^6$  до

$$\frac{Q}{Ud^2} = A_T \frac{L}{d} \frac{1}{\text{Re}_L^{1/7}} = A_T \frac{1}{\sigma} \frac{(C_D \ln \frac{1}{\sigma})^{1/2}}{\text{Re}_L^{1/7}}$$

при  $\text{Re}_L \geq 5 \cdot 10^6$ .

Однако для больших толщин внутреннего сдвигового слоя, сопоставимых с радиусом каверны, необходимо проводить прямые расчеты вовлечения на основании изложенной методики.

Так, в качестве примера, характеризующего это утверждение, приведены результаты расчетов параметров слоя смешения газа в каверне за кавитатором диаметром 50 мм при скоростях потока 10,

20 и 30 м/с, что соответствует числам Рейнольдса  $\text{Re}_d = 3.3 \cdot 10^4 - 1 \cdot 10^5$ . На рис. 8–10 приведены: толщина сдвигового слоя, отнесенная к радиусу каверны, безразмерная динамическая скорость и безразмерная величина вовлечения для каждой скорости потока.

По длине каверны прослеживаются переходная и турбулентная зоны течения, с увеличением скорости потока переходная зона сокращается, но интенсивность роста толщины сдвигового слоя на переходной зоне существенно изменяется. Заметны качественные изменения толщины сдвигового слоя при  $\delta = 0.5R$  при скорости потока 10 м/с и при  $\delta = 0.3R$  на скоростях 20 и 30 м/с. Учитывая, что сдвиговый слой нарастает к оси каверны, асимптотическое определение толщины сдвигового слоя при постоянном малом нормальном градиенте продольной скорости не отвечает физике течения. И для ответа на этот вопрос необходимы дополнительные исследования.

Динамическая скорость (рис. 9) на поверхности каверны ведет себя адекватно физической картине течения вплоть до точки останова расчета, отслеживая длины переходных участков. Значения динамической скорости на турбулентном участке соответствуют значениям динамической скорости турбулентного пограничного слоя на пластине при соответствующих числах Рейнольдса. Как уже отмечалось, динамическая скорость на поверхности каверны слабо зависит от граничных условий на оси каверны, но зависит от начальных условий, вводимых за кавитатором, необходимых при определении параметров сдвигового слоя в погранслоном приближении. При таких числах Рейнольдса длины переходных участков могут существенно отличаться друг от друга в зависимости от начальных условий. Поэтому и в эксперименте на малых моделях необходимо вводить конечные возмущения на образующих кавитаторов.

Параметр  $H$  также не зависит от граничных условий на оси каверны, однако в самих значениях и толщины вытеснения, и потери импульса прослеживается некоторая связь с изменением скорости роста толщины сдвигового слоя по длине каверны.

На рис. 10 приведены результаты прямого вычисления вязкого вовлечения слоем смешения неподвижного газа в каверне в виде секундного расхода, отнесенного к условному расходу потока через площадь, эквивалентную площади кавитатора –  $Ud^2$  при смешанном ламинарно-турбулентном сдвиговом слое. При неизменном диаметре кавитатора и увеличении числа Рейнольдса за счет скорости заметно отличие вязкого вовлечения при толщинах сдвигового слоя, существенно меньших

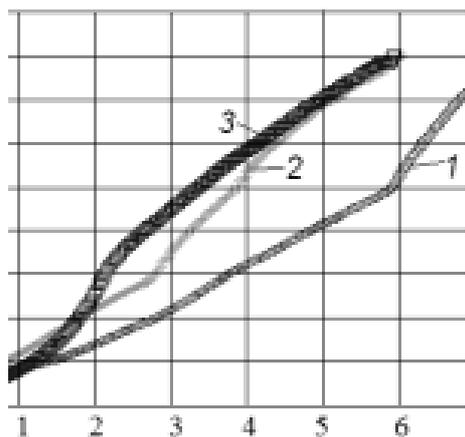


Рис. 8. Изменение толщины пограничного слоя по длине каверны:  
1 – 10 м/с, 2 – 20 м/с, 3 – 30 м/с

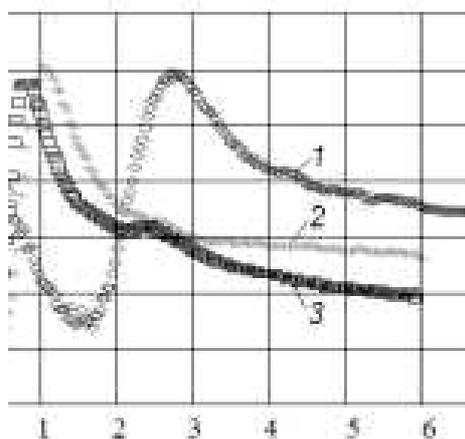


Рис. 9. Изменение динамической скорости по длине каверны:  
1 – 10 м/с, 2 – 20 м/с, 3 – 30 м/с

радиуса каверны. При достижении толщин сдвигового слоя величин, равных  $0.5R$  и больше, отличие в величинах вовлечения при разных скоростях потока становится незначительным, т.е. скорость вовлечения, отнесенная к скорости потока, растет слабо с увеличением удлинения каверны. Эти результаты косвенно подтверждают, что для моделирования вязкого вовлечения воздуха каверны сдвиговым слоем, кроме числа Рейнольдса по диаметру каверны, необходим еще один параметр, отвечающий за отношение линейных размеров толщины сдвигового слоя и радиуса каверны, например  $\delta^*/R$ . Результаты, полученные при одном и том же числе Рейнольдса, заметно отличаются друг от друга, особенно на средних удлинениях от

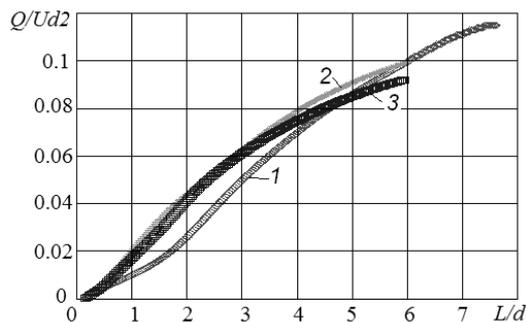


Рис. 10. Изменение вязкого вовлечения по длине каверны в зависимости от скорости потока:  
1 – 10 м/с, 2 – 20 м/с, 3 – 30 м/с

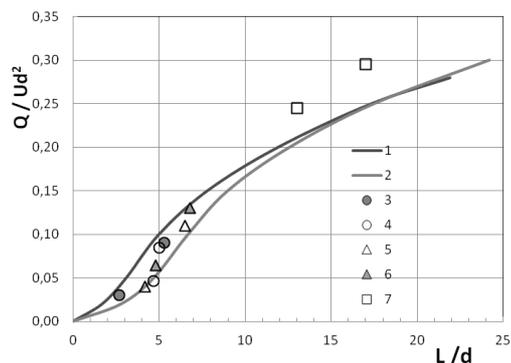


Рис. 11. Сравнение результатов расчета вязкого вовлечения ((кривые 1, 2) с результатами эксперимента Коробова В.И. (кривые 3–6) при  $Re_d = 3000$ :  
3 – конус, 4 – конус с рифленой кромкой, 5 – диск, 6 – диск с рифленой кромкой, 7 – данные [14] при  $Re_d = 3500$

6 до 10.

На рис. 11 представлено сравнение результатов расчетов вязкого вовлечения при  $Re_d = 3000$  при ламинарном режиме течения в сдвиговом слое и результатов экспериментального определения взаимосвязи расхода газа в вентилируемой каверне, формирующейся за различными кавитаторами при  $Re_d = 3000$ , и величины удлинения каверны при соответствующем расходе газа. Получено хорошее совпадение результатов между собой. На рис. 3, 4 показаны результаты экспериментов, приведенные в работе [14] со ссылкой на работу [15] при  $Re_d = 3500$ , где числа кавитации пересчитаны на удлинения по формуле Гарабедяна. Наши расчетные кривые проходят существенно ниже экспериментальных точек, хотя числа Рейнольдса практически равны.

Выполнив серию расчетов по известным характеристикам модельных и натуральных испытаний

суперкавитирующих течений и сравнив их между собой, можно получить управляющий фактор или факторы, которые позволят пересчитывать результаты модельных испытаний на натурные масштабы и условия.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Полученная система уравнений при нулевых граничных условиях на оси каверны и разработанный алгоритм расчета вовлечения в вентилируемой осесимметричной каверне при малых числах кавитации по характеристикам ламинарно-турбулентного пограничного слоя применима для любых чисел Рейнольдса при условии, что толщина пограничного слоя не достигает оси каверны на значительном расстоянии от конца каверны.

2. Получены не только качественные, но и количественные совпадения расхода газа в экспериментальных исследованиях численных результатов вовлечения газа каверны на основании определения характеристик ламинарно-турбулентного сдвигового слоя газа на поверхности каверны при равных числах Рейнольдса.

3. Для моделирования вязкого вовлечения газа в кавернах большого удлинения (малых числах кавитации) одного безразмерного параметра – числа Рейнольдса – не достаточно. Необходимо введение еще одного безразмерного параметра – отношения линейных размеров сдвигового слоя газа к линейным параметрам каверны.

1. Логвинович Г.В. Гидродинамика течений со свободными границами.– К.: Наукова думка, 1969.– 215 с.
2. Эпштейн Л.А. Methods of dimensions and similarity in the problems of vessels hydromechanics.– Л.: Судостроение, 1970.– 208 с.
3. Knapp R. T., Daili J., W. Hammit F. G. Cavitation.– New York: Mc Graw Hill Book Company, 1970.– 578 с.
4. Логвинович Г.В., Серебряков В.В. Метод расчета форм тонких осесимметричных каверн // Гидромеханика.– 1975.– 32.– С. 47–54.
5. Эпштейн Л.А., Блюмин В.И. Влияние формы тела на форму каверны и унос газа // Сб. статей “ Двигатели судов и кавитация” // Л.: Судостроение, .– 1968.– N 106.– С. 129–135.
6. Эпштейн Л.А. Характеристики вентилируемых каверн и масштабные эффекты // Материалы PUTAM симпозиума в Ленинграде: “Нестационарные течения воды с высокими скоростями” // Наука.– 1971.– 1973.– С. 173–185.
7. Kuklinski R., Henoach C. and Castano J. Experimental Study of Ventilated Cavities on Dynamic Test Model // Proceedings of CAV.– Pasadena: USA, 2001.– 8 p.
8. Kinzel M. P. , Lindau J.W. , and Kunz R.F. Air Entrainment Mechanisms from Artificial Supercavities: Insight based on numerical simulations // Proceedings of the 7th International Symposium on Cavitation: CAV2009, 2009.– Ann Arbor, Michigan, USA.– P. 562–576.
9. Launder B. E., Reece O. 1., Rodi W. Progress in the development of a Reynolds stress turbulent closure // J. Fluid Mech.– 1975.– 68, pt. 3.– P. 537–566.
10. Launder B. E., Reynolds W. C. Asymptotic near wall stress dissipation rates in a turbulent flow // Phys. Fluids.– 1983.– 26, N 5.– P. 1157–1158.
11. Rotta J. C. Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz // Zeitschrift Physik.– 1951.– 129, N 1.– P. 51–77.
12. Wosnik M., Shauer T., Arndt . R. Experimental study of ventilated supercavitating vehicles.– USA: Proceedings of CAV, 2006.– 19 c.
13. Cox R.N. , Clayden W.A Air entrainment at the Rear of Steady Cavity. // Proc. NPL Symp. on cavitation in Hydrodynamics.– London: HMSO, paper v12, 1955.– 1956 c.
14. Spurk J.H. On the gas loss of ventilated supercavities // ACTA Mech.– 2002.– 155.– P. 125–135.
15. Braselmann H., Buerger K-H., Koeberle J. On the gas loss from ventilated supercavities –Experimental investigation // The International Summer Scientific School “High Speed Hydrodynamics”.– 2002.– 1.– P. 9–13.
16. Эпштейн Л.А. Течение около тел вращения при малых числах кавитации // Труды ЦАГИ.– 1961.– 817.– С. 69–85.
17. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.– М.: Наука, 1973.– 847 с.
18. Воропаев Г.А., Птуха Ю.А. Моделирование турбулентных сложных течений.– К.: Наукова думка, 1991.– 168 с.