

УДК 532.542.4

ТРАНСФОРМАЦИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ПРИ ПЕРЕХОДЕ ОТ БОЛЕЕ ГЛУБОКОЙ ВОДЫ К МЕНЬШЕЙ ПО ПАРАБОЛИЧЕСКОМУ ЗАКОНУ

И. Т. СЕЛЕЗОВ, В. А. ТКАЧЕНКО, Л. В. СЕЛЕЗОВА, С. А. САВЧЕНКО

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 11.07.2011

Исследуется гашение волн при их прохождении над наклонным участком дна, который изменяется по параболическому закону. Задача решается на основе потенциальной теории жидкости конечной глубины. В области переменной глубины применяется численный метод сплайн-коллокаций в форме разложения по базису нормализованных кубических В-сплайнов. Установлены углы наклона, для которых отражением волн можно пренебречь. Показано также, что параболическое изменение донной поверхности в виде выступа дает большее гашение волн по сравнению с впадиной.

Досліджується гасіння хвиль при їхньому проходженні над похилою ділянкою дна, яка міняється за параболическим законом. Задача розв'язується на основі потенціальної теорії рідини скінченної глибини. В області змінної глибини застосовується чисельний метод сплайн-колокацій в формі розкладання по базису нормалізованих кубічних В-сплайнів. Встановлено кути нахилу, для яких відбиттям хвиль можна знехтувати, а також показано, що параболическа зміна донної поверхні у вигляді виступу дає більше гасіння хвиль у порівнянні з впадиною.

Wave suppression when waves transmit over an inclined part of the bottom which changes in a parabolic law is investigated. The problem is solved on the basis of the potential theory of finite depth water. The numerical method of a spline-collocation is applied to a solution of the problem in the region of variable depth in the form of expansion on base of the normalized cubic B-splines. Slope angles are established when wave reflection can be neglected. It is shown that a parabolic changing of a ground surface in the form of a head gives more wave suppression in comparison with a cavity .

ВВЕДЕНИЕ

Исследование взаимодействия поверхностных гравитационных волн с донными неоднородностями и их подавления при прохождении над ними было и остается актуальной проблемой. Это обусловлено как поиском различного рода конструкций для гашения волн с целью защиты акваторий и береговой зоны от воздействия волн, так и необходимостью знать поведение волнового поля, особенно в прибрежной зоне, которое характеризуется многообразием явлений типа трансформации волн, рефракции и дифракции волн, интерференции волн, локальных резонансов, захвата волн и др. [2–5, 11, 15, 19]. Возможности гашения регулярных волн волноломами и возможности измерений характеристик отраженных и проходящих волн исследовались в [7–10, 12–14, 16–18]. В работе [8] экспериментально было установлено существование параметров, обеспечивающих отсутствие отраженной волны.

В данном сообщении исследуется задача трансформации поверхностных гравитационных волн при наличии локального перехода от жидкости большей глубины к жидкости меньшей глубины при изменении этого перехода по параболическому закону (рис. 1). Исследуется коэффициент отра-

жения волн, полностью характеризующий гашение волн. Задача рассматривается в рамках модели жидкости конечной глубины и решается на основе метода сплайн-коллокаций [1].

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Рассмотрим более общую задачу, когда профиль перехода описывается произвольной функцией $d_2(x)$, принадлежащей классу функций C^2 [1]. Предполагается, что на подводный склон (рис. 1) под углом θ_3 набегают плоские регулярные волны с потенциалом скоростей

$$\varphi_i = C_i \frac{\text{ch}[k_3 d_0 (z + d_3)]}{\text{ch}(k_3 d_0 d_3)} \times \exp(-i(\alpha_3 x + \sigma_3 y - \omega t)) ,$$

где ω – круговая частота; t – время; $\alpha_3 = k_3 \cos \theta_3$; $\sigma_3 = \sin \theta_3$; k_3 – волновое число. Множитель $\exp(i\omega t)$ в дальнейшем опускается.

Здесь введены безразмерные величины по формулам (звездочки опущены)

$$(x^*, y^*) = (x, y) / l, \quad d^* = d / d_3, \\ \varphi^* = \varphi \sqrt{g d_3}, \quad k^* = k \cdot l,$$

$$\omega^* = \omega \cdot l / \sqrt{gd_3}, \quad d_0^* = d_3/l, \quad l = 2a.$$

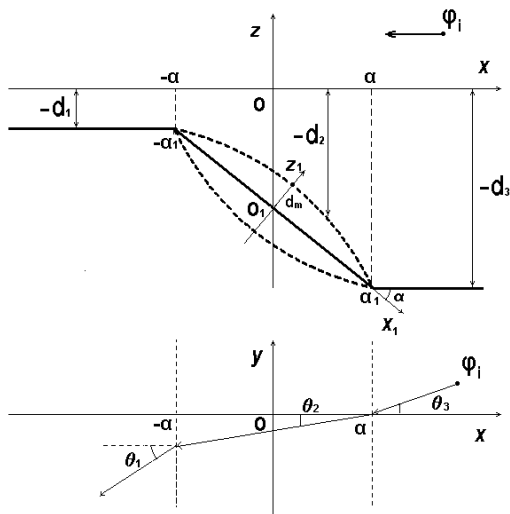


Рис. 1. Геометрия задачи

Трансформированные на подводном склоне $\{-a < x < a, |y| < \infty, -d_2(x) < z < 0\}$ волны генерируют отраженные волны φ_S , распространяющиеся в области $\{a < x < \infty, |y| < \infty, -d_3(x) < z < 0\}$, и проходящие волны φ_1 , распространяющиеся в области $\{-\infty < x < -a, |y| < \infty, -d_1 < z < 0\}$. Потенциалы скоростей $\varphi_3 = \varphi_I + \varphi_S$ и φ_1 в этих областях, удовлетворяющие уравнению Лапласа, имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= \varphi_i + C_3 \frac{\text{ch}[k_3 d_0(z + d_3)]}{\text{ch}(k_3 d_0 d_3)} \times \\ &\times \exp(i(\alpha_3 x + \sigma_3 y)), \\ \varphi_1 &= C_1 \frac{\text{ch}[k_1 d_0(z + d_1)]}{\text{ch}(k_1 d_0 d_1)} \times \\ &\times \exp(-i(\alpha_1 x + \sigma_1 y)), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\alpha_1 = k_1 \cos \theta_1$, $(\sigma_1 = \sigma_3)$.

В области подводного склона $\{-a < x < a, |y| < \infty, -d_2(x) < z < 0\}$ потенциал скоростей определяется следующим образом:

$$\varphi_2 = \frac{\text{ch}[k_2(x) d_0(z + d_2(x))]}{\text{ch}(k_2(x) d_0 d_2(x))} \psi(x, y),$$

где функция $\psi(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$D(x) \nabla_2 \psi + \left[2 \frac{dD(x)}{dx} - E(x) \frac{dd_2(x)}{dx} \right] \frac{d\psi}{dx} + \quad (2)$$

$$+ \left[\frac{d^2 D(x)}{dx^2} + \frac{d}{dx} \left(E(x_1) \frac{dd_2(x)}{dx} \right) + \alpha_2^2 D(x) \right] \cdot \psi = 0.$$

Здесь $D(x) = \omega^2 / k_2^2(x)$, $E(x) = \text{ch}^{-1}[k_2(x) d_0 d_2(x)]$, $\alpha_2 = k_2 \cos \theta_2$, $\omega^2 = k_2 \text{th}(k_2 d_0 d_2) / d_0$.

Искомые функции φ_j ($j = \overline{1, 3}$) на границе перехода от постоянной глубины к переменной должны удовлетворять условиям сопряжения

$$\begin{aligned} \varphi_1(-a, y, 0) &= \varphi_2(-a, y, 0), \\ \left(\int_{-d_1}^0 \frac{d\varphi_1}{dx} dz \right)_{x=-a} &= \left(\int_{-d_2}^0 \frac{d\varphi_2}{dx} dz \right)_{x=-a}, \\ \varphi_3(a, y, 0) &= \varphi_2(a, y, 0), \\ \left(\int_{-d_3}^0 \frac{d\varphi_3}{dx} dz \right)_{x=a} &= \left(\int_{-d_2}^0 \frac{d\varphi_2}{dx} dz \right)_{x=a}. \end{aligned} \quad (3)$$

Решение уравнения (2) будем искать в виде

$$\psi(x, y) = R(x) \exp(-i\sigma_2 y), \quad (4)$$

где $\sigma_2 = k_2 \sin \theta_2$, $(\sigma_1 = \sigma_3)$, а $R(x)$ – определяется из уравнения

$$\begin{aligned} D \frac{d^2 R}{dx^2} + \left(2 \frac{dD}{dx} - E(x) \frac{dd_2}{dx} \right) \frac{dR}{dx} + \\ + \left[\frac{d^2 D}{dx^2} - \frac{d}{dx} \left(E \frac{dd_2}{dx} \right) + (\alpha_2^2 - \sigma_3^2) D \right] R = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Попытка построения аналитического решения для этого уравнения в общем случае бесперспективна. Поэтому здесь для решения уравнения (5) применяется метод сплайн-коллокаций в виде разложения по базису из нормализованных кубических В-сплайнов [5, 6], сущность которого заключается в следующем.

Пусть требуется найти решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} L[y(x)] &= y'' + p(x)y' + g(x)y = \\ &= r(x), \quad x \in [-a, a], \end{aligned} \quad (6)$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$(\alpha_1 y + \beta_1 y')|_{x=-a} = \gamma_1, \quad (\alpha_2 y + \beta_2 y')|_{x=a} = \gamma_2. \quad (7)$$

Введем на $[-a, a]$ сетку $\Delta : -a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = a$ и будем искать приближенное решение задачи (6)–(7) в виде кубических сплайнов $S(x)$, разложенного по базису из нормализованных кубических В-сплайнов:

$$y(x) \approx S(x) = \sum_{p=i-3}^i b_p B_p(x), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad (8)$$

где

$$B_{i-3}(x) = \frac{(x_i + h - x)^3}{6h^3},$$

$$B_{i-2}(x) = \frac{3(x - x_i)^3 - 6h(x - x_i)^2 + 4h^3}{6h^3},$$

$$B_{i-1}(x) = \frac{-3(x - x_x)^3 + 3h(x - x_i)^2 + 3h^2(x - x_i) + h^3}{6h^3},$$

$$B_{i-3}(x) = \frac{(x_i + h - x)^3}{6h^3}.$$

Потребуем, чтобы сплайн (8) удовлетворял уравнению (6) в узлах коллокации $\xi_k \in [-a, a]$, $k = 0, \dots, N$ и краевым условиям (7). Рассмотрим случай равномерного шага сетки $h = x_{i+1} - x_i = 2a/N$, в котором узлы сплайна x_i совпадают с узлами коллокации ξ_i . Тогда в узлах коллокации получим систему $N+3$ линейных алгебраических уравнений $L[S(x_i)] = 0, (i = 0, \dots, N)$, $\alpha_1 S(-a) + \beta_1 S'(-a) = \gamma_1, \alpha_2 S(a) + \beta_2 S'(a) = \gamma_2$ для определения неизвестных коэффициентов b_p . Таким образом, построили решение обыкновенного дифференциального уравнения, которое точно удовлетворяет уравнению (6) и граничным условиям (7):

$$y(x_i) = \sum_{p=i-3}^i b_p B_p(x_i), \quad i = 0, \dots, N. \quad (9)$$

Исключая неизвестные коэффициенты C_1 и C_3 в условиях сопряжения (1), мы приходим к уравнениям вида (7) и, следовательно, применяя выше описанную методику к решению уравнения (5), находим

$$R(x) = \sum_{n=j-3}^j b_n B_n(x), \quad x_1 \in [x_j, x_{j+1}], \quad (10)$$

$$j = \overline{0, N}, \quad -a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b.$$

2. РАСЧЕТЫ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Численные расчеты были проведены для случая, когда рельеф подводного склона изменялся по параболическому закону

$$d_2(x) = \left[\frac{x_1 + z_1 \operatorname{tg} \alpha - a_1}{2a_1} (d_3 - d_1) + d_1 \right] - \frac{z_1}{\cos \alpha},$$

$$x = (x_1 + z_1 \operatorname{tg} \alpha) \cos \alpha,$$

$$x \in [-a, a], \quad \alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{d_3 - d_1}{2a} \right),$$

$$z_1 = d_m \left[1 - \left(\frac{x_1}{a_1} \right)^2 \right], \quad x_1 \in [-a_1, a_1].$$

Энергия падающего поля равна сумме энергий отраженных и проходящих волн, если не имеет место захват волн. Это характеризуется коэффициентами отражения $k_r = |\varphi_s| / |\varphi_i|$ и прохождения $k_t = |\varphi_1| / |\varphi_i|$. Из закона сохранения энергии следует, что $k_r^2 + k_t^2 = 1$ и поэтому для анализа численных расчетов достаточно определить только одну из этих величин. Здесь мы находим коэффициент отражения k_r . На рис. 2, 3 приведены численные расчеты коэффициента отражения как функции безразмерного волнового числа $k_3 l$ для $y = 0$ и $\theta_3 = 0^\circ$.

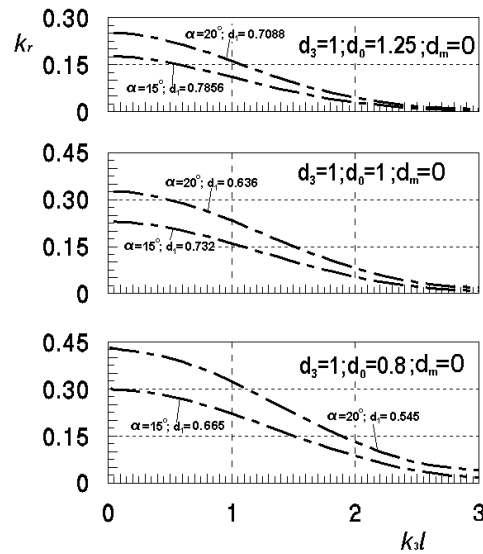


Рис. 2. Изменение коэффициента отражения k_r , когда рельеф подводного склона изменяется по линейному закону

На рис. 2 представлены результаты расчетов в случае, когда рельеф подводного склона изменяется по линейному закону ($d_m = 0$) для различных уклонов донной поверхности α и отношений характерной глубины к длине d_0 . Из анализа представленных результатов следует, что при уклонах донной поверхности $\alpha \leq 20^\circ$ отражением волн можно пренебречь.

На рис. 3 приведены результаты расчетов в случае, когда донная поверхность изменяется по параболическому закону. Как видно из кривых, в случае выступа ($d_m > 0$) гашение волн больше по сравнению со случаем впадины ($d_m < 0$).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе результатов проведенного анализа установлены характерные особенности гашения

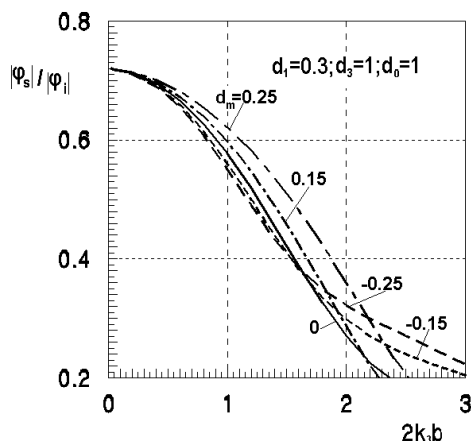


Рис. 3. Изменение коэффициента отражения k_r , когда рельеф подводного склона изменяется по параболическому закону

волн. Так, установлены углы наклона донного участка, для которых отражением волн можно пренебречь. Показано также, что параболический выступ дает большее гашение волн по сравнению со случаем впадины.

1. Завялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 352 с.
2. Селезов И. Т. Моделирование волновых и дифракционных процессов в сплошных средах. - Киев: Наук. думка, 1989. - 204 с.
3. Селезов И. Т., Кривонос Ю. Г. Математические методы в задачах распространения и дифракции волн. - Киев: Наук. думка, 2002. - 232 с.
4. Селезов И. Т., Сидорчук В. Н., Яковлев В. В. Трансформация волн в прибрежной зоне шельфа. - Киев: Наук. думка, 1983. - 208 с.
5. Ткаченко В. А., Яковлев В. В. Трансформация волн на неоднородностях рельефа донной поверхности с прямолинейными границами // Гидромеханика. - 1987. - Вып. 56. - С. 3-6.
6. Ткаченко В. А., Яковлев В. В. Дифракция нестационарной акустической волны на абсолютно жестком цилиндре, окруженном неоднородным слоем // Акустический журнал. - 1985. - XXXI, вып. 2. - С. 255-260.
7. Balas C. E. Risk assessment for Tuzla naval base breakwater // Chine Ocean Engineering. - 2003. - 17, №3. - P. 514-528.
8. Bendykowska G. Wave scattering over an underwater trench. Experiment. Arch. Hydrotechn., 1990. - 37, N 1-2. - P. 19-30.
9. Hamzah M. A. Solitary wave pressure on barrier. Proc. 10 th Int. Offshore and Polar Engineering Conference // Seattle, USA. - May 28-June 2, 2000. - P. 519-523.
10. Hiraishi T. Characteristics of wave overtopping in a harbor induced by Typhoon 9918 // Proc. 11 th. Int Offshore and Polar Engineering Conference.-3001.- P. 553-558.
11. Karambas T. V., Tozer N. P. Breaking waves in the surf and swash zone // J.Coastal Research.-2003. - 19, №3. - P. 427-438.
12. Kawasaki K., Iwata K. Wave breaking-induced dynamic pressure due to submerged breakwater. Proc. 11 th Int. Offshore and Polar Engineering Conference // Stavanger, Norway.-June 17-22, 2001. - P. 488-494.
13. Koh R. Theoretical analysis on wave transmission, reflection and stability of rubble mound breakwater with a granular model. Proc. 11 th Int. Offshore and Polar Engineering Conference // Stavanger, Norway. - June 17-22, 2001. - P. 645-650.
14. Selezov I. T. Propagation of unsteady nonlinear surface gravity waves above an irregular bottom // Int. J. Fluid Mechanics Research.- 2000.- 27, №1.-P. 146-157.
15. Selezov I. T. Waves processes in fluids and elastic media // Int. J. Fluid Mechanics Research.- 2003. - 30.- P. 219-249.
16. Selezov I. T., Tkachenko V. A., Savchenko S. A. On water wave suppression by local bottom inhomogeneities // Int. J.Fluid Mechanics Research. - 2007. - 34, №6. - P. 589-598.
17. Selezov I.T., Zigers N.I. Propagation of surface gravitational waves over two parallel bottom inhomogeneities // J. Math. Sci. - 1998. - 90, N 1. - P. 1883-1886.
18. Tomita T. Characteristics of wave transmitted over flap gate as storm surge barrier. Book of Abstracts, 9 th Int. Symposium on Natural and Human-Made Hazards, HAZARDS 2002 // Antalya, Turkey. - Oct. 3-6, 2002. - P. 144-145.
19. Hsien-Kuo Chang, Tai-Wen Hsu, Jin-Cheng Liou Wave reflection over sloping beach. Proc. 11 th Int. Offshore and Polar Engineering Conference // Stavanger, Norway. - June 17-22, 2001. - P. 506-511.