ISSN 1561-9087 Прикладна гідромеханіка. 2012. Том 14, N 3. С. 64 – 81

УДК 532.5:517.958

НЕЛИНЕЙНЫЕ СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В СФЕРИЧЕСКОМ БАКЕ ПОСЛЕ ЕГО РАЗГОНА ИЛИ ТОРМОЖЕНИЯ

Г. Ф. ЗОЛОТЕНКО

Институт математики НАН Украины

Получено 31.10.2011

Рассмотрена задача о нелинейных свободных колебаниях идеальной однородной несжимаемой тяжелой жидкости, наполовину заполняющей абсолютно твердый сферический бак, который совершает равномерное движение после этапа его разгона (или торможения). Предложено вихревое решение этой задачи с точностью до сингулярной составляющей давления. Известное условие сохранения полной механической энергии жидкости, заключенной в неподвижные границы, обобщено на случай жидкости со свободной поверхностью. На основе энергетического подхода гидродинамическая начально–краевая задача сведена к классическому уравнению нелинейных колебаний физического маятника в форме шарового сегмента. Выведена формула зависимости частоты колебаний жидкости от начального положения ее свободной поверхности. Рассмотрен пример.

Розглянуто задачу про нелінійні вільні коливання ідеальної однорідної нестисливої важкої рідини, яка наполовину заповнює нерухомий абсолютно твердий сферичний бак, який здійснює рівномірний рух після етапу його прискорення (або гальмування). Запропоновано вихровий розв'язок цієї задачі з точністю до сингулярної складової тиску. Відома умова збереження повної механічної енергії рідини, яка має нерухомі межі, узагальнена на випадок рідини з вільною поверхнею. На основі енергетичного підходу гідродинамічна початково–крайова задача зведена до класичного рівняння нелінійних коливань фізичного маятника у формі кульвого сегменту. Виведено формулу залежності частоти коливань рідини від початкового положення її вільної поверхні. Розглянуто приклад.

The problem on nonlinear free oscillations of an ideal homogeneous incompressible heavy fluid that half fills a rigid spherical tank is considered. It is assumed that tank moves uniformly after its speedup (or braking). The vortex solution of this problem up to a singular component of pressure is suggested. The known condition of full mechanical energy conservation for fluid which is in motionless borders is generalized for the case of fluid with a free surface. On the base of the energy approach the hydrodynamic initial boundary-value problem is reduced to the classical equation for nonlinear oscillations of physical pendulum in the form of ball segment. The formula of the fluid oscillations frequency depending on initial position of a fluid free surface is deduced. The example is considered.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее исследование появилось в результате решения следующей задачи.

Идеальная однородная несжимаемая тяжелая жидкость наполовину заполняет сферический бак, который движется в пространстве с постоянным ускорением. В некоторый момент времени режим ускоренного движения бака переключается на режим движения с постоянной скоростью в том же направлении. Необходимо найти закон движения жидкости при каждом режиме движения бака.

Насколько известно, ранее эта задача решена не была. Поведение жидкости в сфере на этапе ее равноускоренного движения описано в [1], где рассматривался, вообще говоря, вращающийся бак. В настоящей работе считается, что несущая сфера совершает плоско–параллельное движение без вращения, причем абсолютная скорость ее центра в неподвижных осях определяется формулой

$$\mathbf{v}_0(t) = \left(0,\ v_0^2 + w_0^2 t,\ v_0^3 + w_0^3 t\right),$$

где v_0^2, v_0^3 — компоненты вектора скорости в начальный момент; w_0^2, w_0^3 — постоянные компоненты вектора абсолютного ускорения центра сферы O. В таком случае имеет место эффект сохранения зеркала жидкости, а уравнение зеркала в жестко связанной с баком системе координат $OXYZ$ имеет вид (при половинном заполнении бака)

$$Z = \operatorname{tg}\vartheta_0\ Y,$$

где ϑ_0 — угол отклонения зеркала жидкости от плоскости OXY и

$$\operatorname{tg}\vartheta_0 = -\frac{w_0^2}{w_0^3 + g}. \qquad (1)$$

При положительном (разгон) или отрицательном (торможение) ускорении w_0^2 зеркало поворачивается вокруг оси OX в отрицательном или положительном направлениях, т. е. по или против хода часовой стрелки соответственно.

Если в начальный момент времени оси подвижной и неподвижной систем координат совпадают, а плоскость OXY является горизонтальной (что и предполагается в дальнейшем), то угол ϑ_0 определяет отклонение зеркала от плоскости горизонта.

Таблица 1. Величина горизонтального ускорения $|w_0^2|$, вызывающего поворот зеркала на угол ϑ_0 (при $w_0^3 = 0$), в м$/c^2$

ϑ_0	$0°$	$15°$	$30°$	$45°$	$60°$	$75°$	$90°$
$\lvert w_0^2\rvert$	0	2.63	5.66	9.81	17.0	36.6	∞

Формула (1), по существу, решает вопрос о поведении жидкости при ускоренном режиме движения бака (т. е. на этапе его разгона или торможения). Представление о величинах горизонтальных ускорений $|w_0^2|$ бака в зависимости от угла поворота зеркала дают рассчитанные по этой формуле (при отсутствии вертикального ускорения w_0^3) данные, приведенные в табл. 1. Из этой таблицы видно, что ускорения, при которых зеркало поворачивается на большие углы, вполне реальны при нынешнем уровне развития техники. Так, автомобили люкс–класса могут развивать скорость до 100 км/час за 5.7–5.9 с, что соответствует ускорению 4.9–4.7 м/с^2; спортивные легковые автомобили могут достигать этой скорости за 3.5–3.7 с, т. е. развивают ускорение 7.9–7.5 м/с^2. Пассажиры (а следовательно, и бак с жидкостью) в самолете при взлете могут испытывть перегрузки до $1.5g = 14.7$ м/с^2. Ракета с общей массой 15 т и силой тяги 200000 Н имеет в начальный момент ускорение 13.3 м/с^2, а через 20 с при расходе топлива 200 кг/с ее ускорение достигает величины 17.5 м/с^2. Наконец, на так называемых "ракетных салазках" тележка с ракетным двигателем может иметь при разгоне ускорение до $100g = 980$ м/с^2, а при торможении — $150g = 1470$ м/с^2 (в последнем случае угол $\vartheta_0 = 89.6°$); если на тележке присутствует человек, ее ускорение ограничено величиной $12g$ при разгоне и $22g$ при торможении.

На втором этапе движения бака (с постоянной скоростью) подвижная система координат становится инерциальной, следовательно, колебания жидкости относительно нее будут описываться теми же уравнениями, что и в неподвижной системе координат. Таким образом, приходим к задаче о гравитационных колебаниях в сфере жидкости, свободная поверхность которой является в начальный момент плоскостью, отклоненной от горизонта на некоторый, вообще говоря, немалый угол ϑ_0. В общем случае эта задача является нелинейной.

Ранее задача о свободных колебаниях жидкости решалась в линейной постановке. Обзор Г.Н. Абрамсона ряда работ по свободным колебаниям жидкости в сфере (без демпфирующих перегородок и других устройств), выполненных до 1963 г., имеется в [2], где особо отмечена трудность возникающих здесь задач ввиду сложной геометрии стенок бака в окрестности свободной поверхности жидкости. Как оказалось впоследствии [3], фактически приемлемой явилась только теория Б. Будянского [4]. Однако, несмотря на примененную в ней сложную технику интегральных уравнений, эта теория дает точные значения (основных) собственных частот лишь в случаях почти пустого, наполовину заполненного и почти полного баков. Значения частот для промежуточных глубин жидкости интерполируются методом плоских сечений с учетом тенденций, найденных для случая круглого канала. По утверждению Будянского, теоретические и экспериментальные значения собственных частот (со ссылкой на неопубликованные резонансные испытания, проведенные Подразделением ракетных систем Локхида) согласуются в общем хорошо, а для заполненного наполовину бака — превосходно. Вместе с тем, он предупреждал, что при использовании оценочных результатов в областях между почти пустым, наполовину заполненным и почти полным баком требуется определенная осторожность. В этой связи следует заметить, что в работе [3], где теория Будянского сравнивалась с экспериментом, на графике экспериментальной зависимости основной резонансной частоты жидкости от глубины (стр. 385, фиг. 2 [1]) в области глубин, близких к почти полному заполнению сферы, отсуствуют точки (черные кружки), соответствующие теории Будянского для этих значений глубин.

Дальнейшие результаты в задаче о линейных свободных колебаниях жидкости в сфере были получены И.Б. Богорядом [5], который применил вариационный метод (со сферическими координатными функциями) и построил кривую зависимости "глубина–квадрат частоты" для всего диапазона глубин, исключая окрестность верхнего полюса сферы. Экспериментальные значения частот из работы [6] легли на эту кривую. Кроме того, расчетные значения частот Будянского для почти пустого, наполовину заполненного и почти полного бака оказались достаточно близкими к кривой Богоряда. Позже эта кривая была воспроизведена в обширной статье Рабиновича и др. по методам расчета гидродинамических параметров систем с жидкостью [7] (см. также работы Моисеева и Петрова [8] (стр. 143, рис. 41) и [9]). В [7], кроме кривой Богоряда, приведены еще три графика, полученные: вариационным методом с цилиндрическими координатными функциями; методом равнове-

[1] Получен в Юго-западном Исследовательском институте, США (Southwest Researche Institute).

ликого цилиндра, вписанного в свободную поверхность; методом механической аналогии с физическим маятником в форме шарового сегмента в качестве механического аналога (стр. 204, рис 18). В области безразмерных глубин $1 < h < 2$ два графика, полученные вариационным методом, совпадают, а два других заметно отличаются от них и могут служить лишь для верхних и нижних оценок частоты. В области $0 < h < 1$ практически совпадают три графика – два графика вариационного метода и один график метода механической аналогии. Метод же равновеликого вписанного цилиндра дал менее точные значения частот во всем диапазоне глубин h.

Наконец, через тридцать лет после работы Будянского появилась статья Макивера [10], посвященная вычислению исключительно собственных частот. В ней предложен переход к тороидальной системе координат, для которой поверхность сферы и плоскость невозмущенной свободной поверхности являются координатными поверхностями и в которой задача на собственные значения сведена (в случае сферической полости) к системе двух однородных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Последние получаются в результате отделения азимутальной координаты в решении уравнения Лапласа и последующего применения преобразования Мелера-Фока к двум краевым условиям – кинематическому условию на твердой стенке и динамическому условию на свободной поверхности. Эта система интегральных уравнений решалась численно с применением квадратурной формулы Гаусса-Лагерра для перехода к соответствующей матричной задаче на собственные значения. Особое внимание уделено предельным случаям, когда глубина жидкости стремится к диаметру сферы или к нулю. В первом случае получены верхние границы частоты жидкости в сферическом баке и тем самым решена проблема определения частоты в окрестности верхнего полюса сферы, а во втором – установлена связь с теорией мелкой воды. В связи с этим заметим, что статье Макивера предшествовала работа Барняка и Луковского [11], в которой для вычисления частот была построена в качестве координатных функций метода Ритца, специальная система частных решений уравнения Лапласа, удовлетворяющих краевому условию на сфере всюду, за исключением верхнего полюса сферы. Однако, как отмечали сами авторы, метод этой работы не охватывает диапазона глубин $1.5 < h < 2$, хотя в интересующем нас случае половинного заполнения сферы данные из этой работы достаточно хорошо согласуются с расчетами Макивера (см. ниже п. 6.2.1).

Подавляющее большинство исследований по динамике идеальной жидкости в полости твердого тела, включая отмеченные работы для случая сферы, выполнены в рамках теории потенциальных течений жидкости (по отношению к абсолютной системе координат). Обычные в этой теории предположения о потенциальности поля скоростей жидкости и поля массовых сил имеют следствием существование фундаментального для этой теории соотношения в виде интеграла Коши–Лагранжа гидродинамических уравнений Эйлера. В настоящей работе предположение о потенциальности поля скоростей снято, что означает переход к рассмотрению класса решений уравнений Эйлера, не связанных с интегралом Коши–Лагранжа (хотя поле массовых сил, по-прежнему, остается потенциальным).

План статьи следующий. Формулируется исходная нелинейная начально–краевая задача о свободных колебаниях идеальной жидкости в неподвижном сферическом баке (п. 1). Показывается, что эта задача в случае половинного заполнения бака, имеет, по крайней мере, одно вихревое решение, которое с точностью до составляющей давления, названной сингулярной, удовлетворяет всем условиям задачи (п. 2). Для определения закона колебаний жидкости по времени выполняется переход от уравнений Эйлера к уравнению энергии, причем сначала рассматривается общий случай бака произвольной формы и выводится условие сохранения полной механической энергии жидкости при наличии свободной поверхности, а затем это условие конкретизируется в случае сферического бака (п. 3). Устанавливается закон колебаний жидкости по времени (п. 4). Затем выводится формула маятниковой частоты нелинейных свободных колебаний жидкости в сфере на этапе равномерного ее движения в зависимости от начального отклонения свободной поверхности на этапе ускоренного движения (разгона или торможения) сферы (п. 5). Наконец, рассматривается пример, в котором рассчитана амплитудно–частотная характеристика нелинейных колебаний жидкости в сфере заданного радиуса и маятниковая частота сравнивается с известными из линейной теории и экспериментальными значениями основной частоты колебаний (п. 6).

1. НАЧАЛЬНО–КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

Введем в рассмотрение правую декартову систему координат $Oxyz$, начало O которой размещено в центре сферы, а ось Oz направлена по восходящей вертикали.

Рассматривается следующая нелинейная начально–краевая задача о свободных колебаниях в неподвижной сфере тяжелой идеальной несжимаемой однородной жидкости, которая частично заполняет бак (см. [8] или [9]):
уравнения —

$$\frac{D}{Dt}\,\mathbf{v}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p(\mathbf{r},t) + \mathbf{g}, \quad \mathbf{r}\in Q(t), \quad (2)$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v}(\mathbf{r},t) = 0, \quad \mathbf{r}\in Q(t), \quad (3)$$

краевые условия —

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_S\,\Big|_{S(t)} = 0, \quad \frac{D}{Dt}f\,\Big|_{\Sigma(t)} = 0, \quad (4)$$

$$p\,\Big|_{\Sigma(t)} = p_0, \quad (5)$$

начальные условия —

$$\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\,\Big|_{t=0} = \mathbf{v}^0(\mathbf{r}), \quad f(\mathbf{r},t)\,\Big|_{t=0} = f^0(\mathbf{r}). \quad (6)$$

Здесь $\mathbf{r}=(x,y,z)$ – радиус–вектор жидкой частицы относительно центра O сферы; $t\in[0,t_1]$ – время; $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)=(v_x,v_y,v_z)$ – поле абсолютной скорости жидкости; $\mathbf{g}=(0,0,-g)$ – ускорение свободного падения; $Q(t)$ – занятая жидкостью пространственная область; $\mathbf{n}_S$ – орт внешней нормали к сфере; $p=p(\mathbf{r},t)$ – поле давления в жидкости;

$$S(t) = \{(x,y,z,t)\big|\; x^2+y^2+z^2 = R_0^2 \quad \forall\; t\}$$

– смоченная поверхность сферы радиуса R_0; $f(\mathbf{r},t)$ – функция свободной поверхности жидкости;

$$\Sigma(t) = \{(x,y,z,t)\big|\; f(x,y,z,t)=0\}$$

– изменяющаяся со временем свободная поверхность жидкости; $\rho=\mathrm{const}$ – массовая плотность жидкости; $p_0=\mathrm{const}$ – атмосферное давление на свободной поверхности жидкости;

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla$$

– индивидуальная производная; $\mathbf{v}^0(\mathbf{r})$ и $f^0(\mathbf{r})$ – начальные значения функций $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ и $f(\mathbf{r},t)$. Заметим, что дифференциальные операторы grad, ∇ и div действуют по пространственным переменным x,y,z.

В дальнейшем считается, что жидкость заполняет сферу наполовину.

Искомыми величинами в начально-краевой задаче (2)– (6) являются вектор-функция $\mathbf{v}$ и скалярные функции p, f.

2. ВИХРЕВОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Докажем следующее предположение:

начально-краевая задача (2)–(6) допускает вихревое решение с точностью до сингулярной составляющей давления.

Доказательство. Пусть в начальный момент $t=0$ свободная поверхность является плоскостью, наклоненной на угол ϑ_0 относительно горизонта, причем начальная функция $f^0(\mathbf{r})$ в условии (6) имеет вид

$$f^0(\mathbf{r}) = -y\sin\,\vartheta_0 + z\cos\,\vartheta_0. \quad (7)$$

Предположим также, что начальное поле скоростей в жидкости удовлетворяет условию

$$\mathbf{v}^0(\mathbf{r}) = \dot\vartheta_0\Big(0,\; -z,\; y\Big), \quad (8)$$

где $\dot\vartheta_0$ – начальная угловая скорость плоскости свободной поверхности.

В этих предположениях рассмотрим набор функций:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r},t) = \Big(0,\; -\dot\vartheta(t)z,\; \dot\vartheta(t)y\Big), \quad (9)$$

$$f(\mathbf{r},t) = -y\sin\,\vartheta(t) + z\cos\,\vartheta(t), \quad (10)$$

$$p(\mathbf{r},t) = p_0 - \rho g z + \rho\,\frac{\dot\vartheta^2(t)}{2}(y^2+z^2) + \\ +\rho\Big[P(y,z,t) + F(t)\Big], \quad (11)$$

где $\vartheta(t)$ – угол между нормалью к плоскости свободной поверхности и осью Oz, определяемый формулой

$$\vartheta(t) = 2k\;\mathrm{sn}\left[\sqrt{\frac{g}{a}}\;(t-C_0), k\right]; \quad (12)$$

$C_0,\ k,\ a$ – некоторые вещественные постоянные; $F(t)$ – произвольная функция времени; $P(y,z,t)$ – сингулярная составляющая давления, которая обсуждается ниже; $\mathrm{sn}(\cdot)$ – функция Якоби.

Покажем, что набор функций (9)–(12) представляет вихревое решение начально-краевой задачи (2)–(6) с точностью до сингулярной составляющей $P(y,z,t)$ давления p.

Проверка уравнения Эйлера. Подстановка выражения (9) в уравнение Эйлера (2) приводит к следующей системе трех уравнений в частных производных относительно функции $p(\mathbf{r},t)$:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \;\; \frac{\partial p}{\partial y} = \Phi_1(y,z;t), \;\; \frac{\partial p}{\partial z} = \Phi_2(y,z;t), \quad (13)$$

где

$$\Phi_1(y,z;t)=\rho\Big(\dot\vartheta^2(t)y+\ddot\vartheta(t)z\Big),$$

$$\Phi_2(y,z;t)=\;-\;\rho\Big(\ddot\vartheta(t)y-\dot\vartheta^2(t)z+g\Big).$$

Подставив сюда выражение p (11), прийдем к системе уравнений относительно P вида

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\ddot\vartheta(t)z,\;\;\frac{\partial P}{\partial z}=\;-\;\ddot\vartheta(t)y. \qquad (14)$$

Таким образом, сначала найдя $\vartheta(t)$, а затем решив линейную систему уравнений (14), можно найти неизвестное давление p по формуле (11).

Замечание. Система уравнений в частных производных (14) содержит время t в качестве параметра и в общем случае не удовлетворяет условию

$$\frac{\partial^2\,P}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2\,P}{\partial z\partial y}$$

теоремы Фробениуса о разрешимости таких систем в классическом смысле. Поэтому система уравнений (14) и ее неклассические решения $P(y,z,t)$ называются сингулярными. Лишь в экзотическом частном случае равномерного вращения жидкой массы вокруг горизонтальной оси, когда $\vartheta(t)=\dot\vartheta_0\;t$ и, следовательно, $\ddot\vartheta(t)\equiv 0$, она имеет классическое решение вида

$$P(y,z,t)=\mathrm{const},$$

но оно практически не интересно. Что касается колебательных режимов движения жидкости, то классические решения системы уравнений (14) в этих случаях существуют лишь в дискретные моменты времени t_k, для которых $\ddot\vartheta(t_k)=0$. Вопрос о существовании обобщенных решений системы (14) при непрерывном изменении t остается открытым. Для настоящей работы имеют значение не давление p, а его первые производные по пространственным переменным, которые определяются равенствами (13) и, очевидно, непрерывны. Поэтому здесь не решается задача нахождения сингулярной составляющей $P(y,z,t)$ давления p (11) и в этом смысле следует понимать приведенную выше фразу "с точностью до сингулярной составляющей $P(y,z,t)$ давления p".

Заканчивая проверку уравнений Эйлера, заметим, что вихрь поля скоростей $\mathbf{v}$ вида (9) будет следующим:

$$\mathrm{rot}\;\mathbf{v}=\nabla\times\mathbf{v}=\;-\;2\;\big(\dot\vartheta(t),0,0\big).$$

Отсюда видно, что при $\vartheta(t)$, изменяющемся по закону (12), вихрь рассматриваемого поля скоростей отличен от тождественного нуля и в каждой точке (x,y,z) жидкости является одним и тем же. Другими словами, рассматриваемое течение оказывается однородно завихренным, а решение (9) уравнений Эйлера – вихревым.

Проверка уравнения неразрывности. Используя формулу (9), находим, что

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=\frac{\partial(-\dot\vartheta z)}{\partial y}+\frac{\partial(\dot\vartheta y)}{\partial z}=0.$$

Уравнение неразрывности (3) удовлетворено.

Проверка условия непротекания. Условие непротекания определяется первым из равенств (4).

Орт нормали к поверхности сферы имеет вид

$$\mathbf{n}_S=\frac{1}{R_0}(x,\;y,\;z).$$

Следовательно, в любой точке смоченного куска $S(t)$ сферы для скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ (9) имеем

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_S\;\Big|_{S(t)}=\frac{1}{R_0}\Big(y(-\dot\vartheta z)+z(\dot\vartheta y)\Big)=0.$$

Условие непротекания выполнено.

Проверка кинематического условия. Кинематическое условие на свободной поверхности определяется вторым из равенств (4). Индивидуальную производную можно представить в виде

$$\frac{D}{Dt}f=\frac{\partial f}{\partial t}+v_x\frac{\partial f}{\partial x}+v_y\frac{\partial f}{\partial y}+v_z\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Отсюда, используя формулы (9) для $\mathbf{v}$ и (10) для f, получаем равенство (4). Кинематическое условие удовлетворено.

Проверка динамического условия. Динамическое условие на свободной поверхности определяется равенством (5).

Подставив сюда выражение (11), получим соотношение

$$-gz+\frac{\dot\vartheta^2(t)}{2}(y^2+z^2)+\big[P(y,z,t)+F(t)\big]\Big|_{\Sigma(t)}=0. \qquad (15)$$

Теперь заметим, что на свободной поверхности $\Sigma(t)$ переменные y и z связаны, в силу (10), уравнением

$$-y\sin\;\vartheta(t)+z\cos\;\vartheta(t)=0.$$

Его можно переписать в явном виде относительно z, а именно:

$$z_0=y_0 tg\;\vartheta(t),$$

где переменная y_0 пробегает интервал

$$-R_0\cos\;\vartheta(t)<y_0<R_0\cos\;\vartheta(t).$$

Индекс 0 в обозначении (y_0, z_0) напоминает о том, что точка (y_0, z_0) принадлежит свободной поверхности $\Sigma(t)$.

Подставляя значение z_0 в равенство (15), приходим к условию, которому должна удовлетворять функция $P(y,z,t)$ на свободной поверхности $\Sigma(t)$:

$$P\Big(y_0,\ y_0 tg\ \vartheta(t),\ t\Big) = g\sin\ \vartheta(t)\frac{y_0}{\cos\ \vartheta(t)} -$$

$$-\ \frac{\dot\vartheta^2(t)}{2}\frac{y_0^2}{\cos^2\vartheta(t)} - F(t) \quad \text{на} \quad \Sigma(t), \qquad (16)$$

где

$$\left|\frac{y_0}{\cos\ \vartheta(t)}\right| < R_0.$$

Замечание. Динамическое условие (15) позволяет выбирать функцию $F(t)$, необходимую для конкретных вычислений, причем по-разному. Возьмем, например, точку пересечения плоскости $\Sigma(t)$ с осью Oz. В случае половинного заполнения сферы жидкостью это будет точка

$$y_0 = 0, \quad z_0 = 0.$$

Учитывая эти значения в динамическом условии (15), найдем, что

$$F(t) = \ -\ P(0,0,t).$$

Если же взять точку на линии пересечения зеркала $\Sigma(t)$ и сферы, в которой на практике проще измерять давление, а именно:

$$y_0 = R_0\cos\ \vartheta(t), \quad z_0 = R_0\sin\ \vartheta(t),$$

то из того же динамического условия (15) получается

$$F(t) = gR_0\sin\vartheta(t)\ -\ \frac{R_0^2\dot\vartheta^2(t)}{2}\ -$$

$$-\ P\Big(R_0\cos\ \vartheta(t), R_0\sin\ \vartheta(t), t\Big).$$

Итак, динамическое условие на свободной поверхности (5) приводит к краевому условию (16) для сингулярной составляющей $P(y,z,t)$ давления, которая должна быть определена из системы уравнений (14).

Проверка начальных условий. Начальные условия задачи определяются равенствами (6).

Полагая в решениях (10), (9) $t = 0$, приходим к исходным значениям (7), (8) начальных функций $f^0(\mathbf{r})$, $\mathbf{v}^0(\mathbf{r})$.

Вывод. Набор функций (9)–(11) является вихревым решением начально–краевой задачи (2)–(6) с точностью до сингулярной составляющей $P(y,z,t)$ давления p. Полное определение давления $p(\mathbf{r},t)$ требует решения краевой задачи (14), (16) для сингулярной составляющей $P(y,z,t)$ после нахождения фукнции $\vartheta(t)$.

Для настоящей работы достаточно уравнения энергии жидкости, которое имеет преимущество перед уравнениями Эйлера: оно содержит лишь известное значение давления p_0 на свободной поверхности $\Sigma(t)$ и не требует знания поля градиента давления во всем объеме жидкости.

3. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ ПРИ НАЛИЧИИ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Гидродинамические уравнения Эйлера не позволяют непосредственно определить явный вид функции $\vartheta(t)$, но это можно сделать, преобразовав их в уравнение энергии. Выведем уравнение энергии и покажем, что для жидкости в сфере, несмотря на наличие свободной поверхности, при определенных условиях имеет место закон сохранения энергии.

3.1. Полость произвольной формы

Рассмотрим сначала случай полости произвольной формы.

Пусть идеальная однородная несжимаемая жидкость со свободной поверхностью $\Sigma(t)$ совершает свободные колебания внутри неподвижной полости произвольной формы, причем внешние массовые силы, действующие на жидкость, имеют не зависящий от времени потенциал, давление на свободной поверхности постоянно и равно p_0, а сама свободная поверхность описывается уравнением

$$f(x,y,z,t) = 0.$$

Кроме того, пусть $T(t)$ – кинетическая энергия жидкости, а $\Pi(t)$ – потенциальная энергия массовых сил $\mathbf{F}$, действующих на жидкость. Тогда имеет силу следующее утверждение:

при наличии свободной поверхности $\Sigma(t)$ *полная механическая энергия всей массы жидкости*

$$T(t) + \Pi(t) = \text{const}$$

тогда и только тогда, когда интеграл

$$\iint\limits_{\Sigma(t)} \frac{1}{|\nabla f|}\frac{\partial f}{\partial t}\ d\Sigma = 0. \qquad (17)$$

Доказательство. *Достаточность.* Как известно [12, стр. 74], гидродинамическому уравнению Эйлера

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p$$

соответствует уравнение энергии вида

$$\frac{d(T+\Pi)}{dt} = -\int\limits_{S(t)+\Sigma(t)} p\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS + \\ + \int\limits_{Q(t)} p\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\,dQ. \qquad (18)$$

Здесь $\mathbf{n}$ — орт внешней нормали к границе $S(t)+\Sigma(t)$ жидкого объема $Q(t)$;

$$T = T(t) = \frac{\rho}{2}\int\limits_{Q(t)} v^2(x,y,z,t)\,dQ, \qquad (19)$$

$$\Pi = \Pi(t) = \rho\int\limits_{Q(t)} \Pi_1(x,y,z)\,dQ, \qquad (20)$$

$\Pi_1(x,y,z)$ – потенциальная энергия единицы массы движущейся жидкости.

Замечание. Функция T изменяется со временем в силу зависимости от времени области интегрирования $Q(t)$ и подынтегрального выражения, а Π – в силу зависимости от времени только области интегрирования $Q(t)$.

Уравнение энергии (18) является наиболее общим для ограниченного объема идеальной, однородной и несжимаемой жидкости со свободной поверхностью, поскольку при его выводе использовались только предположения: 1) о несжимаемости и однородности жидкости ($\rho = \mathrm{const}$) и 2) о потенциальности и стационарности поля массовых сил (существование не зависящего от времени потенциала $\Pi_1(x,y,z)$).

Для соленоидальных течений жидкости (со свободной поверхностью или без нее)

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0, \quad (x,y,z)\in Q(t).$$

(см. условие (3) исходной задачи.) Поэтому вместо общего уравнения энергии (18) получается уравнение

$$\frac{d(T+\Pi)}{dt} = -\int\limits_{S(t)+\Sigma(t)} p\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS. \qquad (21)$$

Далее, в силу условия непротекания на твердой стенке (первое из равенств (4)) и динамического условия на свободной поверхности (5):

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\Big|_{S(t)} = 0, \quad p\,\Big|_{\Sigma(t)} = p_0.$$

Поэтому поверхностный интеграл в (21) сводится к интегралу только по свободной поверхности $\Sigma(t)$, так что уравнение энергии при наличии свободной поверхности приобретает вид:

$$\frac{d(T+\Pi)}{dt} = -\,p_0\iint\limits_{\Sigma(t)} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,d\Sigma. \qquad (22)$$

Наконец, из кинематического условия на свободной поверхности (см второе из равенств (4)) вытекает, что

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\Big|_{\Sigma(t)} = -\frac{1}{|\nabla f|}\frac{\partial f}{\partial t}. \qquad (23)$$

Теперь, подставив (23) в (22), получаем следующее уравнение энергии для жидкости, заполняющей неподвижную полость (произвольной формы) и имеющей свободную поверхность:

$$\frac{d(T+\Pi)}{dt} = -\,p_0\iint\limits_{\Sigma(t)} \frac{1}{|\nabla f|}\frac{\partial f}{\partial t}\,d\Sigma.$$

Отсюда вытекает достаточность условия сохранения энергии (17). Его *необходимость* очевидна.

Условие (17) обобщает условие сохранения полной механической энергии для несжимаемой жидкости, заключенной в неподвижные границы (см. [12, стр. 74]), на случай, когда жидкость имеет свободную поверхность.

Замечание. Из уравнения энергии в форме (22) следует, что условие (17) эквивалентно условию

$$\iint\limits_{\Sigma(t)} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,d\Sigma = 0.$$

Но первое условие выгодно отличается от второго тем, что требует для своей проверки знания только функции $f(\mathbf{r},t)$, в то время как во втором случае требуется знание и $f(\mathbf{r},t)$, и нормальной составляющей поля скоростей жидкости $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ на свободной поверхности.

3.2. Закон сохранения для жидкости в сфере

Далее рассматривается случай сферической полости.

Потенциальная энергия сил тяжести. Найдем потенциальную энергию $\Pi(x,y,z)$ поля сил тяжести. Используем формулу (20).

Прежде всего, в системе координат $Oxyz$

$$\mathbf{F} = (0,0,-g).$$

Отсюда вытекает, что

$$\Pi_1(x,y,z) = \rho g z + C. \qquad (24)$$

Теперь рассмотрим формулу (20). Подставив в нее (24) и положив $C = 0$, найдем, что

$$\Pi = \rho g \iiint\limits_{Q(t)} z dx dy dz. \tag{25}$$

Введем сферические координаты r, θ, φ

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta,$$

$$0 \le r \le R_0, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad -\pi \le \varphi < \pi. \tag{26}$$

Тогда вместо (25) получим выражение

$$\Pi = \rho g \iiint\limits_{Q(t)} r^3 \sin\theta\cos\theta dr d\theta d\varphi. \tag{27}$$

Пространственная область интегрирования $Q(t)$ при половинном заполнении бака может быть представлена, с учетом (26), следующим образом:

$$Q(t) = \{(r,\theta,\varphi,t) :\ 0 \le r \le R_0, \quad \Theta(\varphi,t) \le \theta \le \pi,$$

$$-\pi \le \varphi < \pi, \quad 0 \le t \le t_1\}. \tag{28}$$

Здесь $\Theta(\varphi,t)$ – функция, являющаяся решением по θ уравнения свободной поверхности в сферических координатах

$$r = \eta(\theta,\varphi,t).$$

при $r = R_0$. В случае плоской свободной поверхности (10) она имеет следующий вид:

$$\Theta(\varphi,t) = \operatorname{arctg}\frac{\cos\vartheta(t)}{\sin\vartheta(t)\sin\varphi},$$

$$-\pi \le \varphi < \pi, \quad -\frac{\pi}{2} < \vartheta(t) < \frac{\pi}{2}. \tag{29}$$

Вычисляя интеграл в (27) с учетом (28) и (29), приходим к следующему искомому выражению для потенциальной энергии Π сил тяжести, действующих на жидкие частицы в неподвижной сфере при ее половинном заполнении:

$$\Pi = \rho g \iiint\limits_{Q(t)} z dx dy dz = \ -\rho g\,\frac{\pi R_0^4}{4}\cos\vartheta(t). \tag{30}$$

Кинетическая энергия определяется формулой (см. (19))

$$T = \frac{\rho}{2}\iiint\limits_{Q(t)} v^2(x,y,z,t)\ dQ.$$

В рассматриваемом случае (см. (9))

$$v^2 = \dot\vartheta^2(t)(y^2+z^2).$$

Поэтому

$$T = \frac{\rho\dot\vartheta^2(t)}{2}\iiint\limits_{Q(t)}(y^2+z^2)\ dQ.$$

В сферических координатах

$$T = \frac{\rho\dot\vartheta^2}{2}\iiint\limits_{Q(t)} r^2(\sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta)\ dQ.$$

После необходимых выкладок этот интеграл приобретает вид (случай половинного заполнения сферы):

$$T(t) = \frac{2}{15}\rho\pi R_0^5\dot\vartheta^2(t). \tag{31}$$

Закон сохранения. Учитывая формулы (31) и (30), полную механическую энергию жидкости, колеблющейся по закону (9)–(10) в сферическом баке, можно представить в виде (случай половинного заполнения):

$$T(t) + \Pi(t) = \rho\ \frac{\pi R_0^4}{8}\left[\frac{16}{15}R_0\dot\vartheta^2(t)\ \ - 2g\cos\vartheta(t)\right].$$

Введя здесь обозначение

$$a = \frac{16}{15}R_0, \tag{32}$$

представим полную механическую энергию жидкости как

$$T(t) + \Pi(t) = \rho\ \frac{\pi R_0^4}{8}\Big[a\dot\vartheta^2(t)\ \ - 2g\cos\vartheta(t)\Big]. \tag{33}$$

Оказывается справедливым следующее утверждение:

при свободных колебаниях жидкости в неподвижной сфере по закону (9)–(10) полная механическая энергия жидкости сохраняет постоянное значение, т. е.

$$a\dot\vartheta^2(t)\ \ - 2g\cos\vartheta(t) = \text{const}. \tag{34}$$

Доказательство. В рассматриваемых условиях

$$\frac{1}{|\nabla f|}\frac{\partial f}{\partial t} = -\ \dot\vartheta(t)[y\cos\vartheta(t) + z\sin\vartheta(t)].$$

Тогда интеграл (17) конкретизируется следующим образом:

$$\iint\limits_{\Sigma(t)} \frac{1}{|\nabla f|}\frac{\partial f}{\partial t}\ d\Sigma =$$

$$= -\ \dot\vartheta(t)\iint\limits_{\Sigma(t)}[y\cos\vartheta(t) + z\sin\vartheta(t)]\ d\Sigma. \tag{35}$$

Вычислим здесь интеграл справа, который является поверхностным интегралом первого типа. Поверхность интегрирования $\Sigma(t)$ в системе координат $Oxyz$ представляет собой вращающийся вокруг оси Ox круг радиуса R_0. В каждый момент времени этот круг лежит в плоскости, определяемой уравнением

$$z = \operatorname{tg}\vartheta(t)\ y,$$

а его граница является линией пересечения этой плоскости со сферой и определяется системой уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R_0^2, \\ \quad z=\operatorname{tg}\vartheta(t)\ y. \end{cases}$$

Исключим из первого уравнения координату z, используя второе уравнение. Тогда получим уравнение

$$\frac{x^2}{R_0^2}+\frac{y^2}{R_0^2\cos^2\vartheta(t)}=1.$$

Оно определяет проекцию на плоскость Oxy границы круга $\Sigma(t)$ в любой момент времени. Эта проекция является эллипсом с центром в начале координат и с полуосями R_0 по оси Ox и $R_0\cos\vartheta(t)$ по оси Oy. Полуось по оси Oy изменяется со временем и достигает максимального значения при $\vartheta(t)=0$. Отсюда следует, что поверхность интегрирования $\Sigma(t)$ представляет собой множество вида

$$\Sigma(t)=\big\{(x,y,z):(x,y)\in D, \quad z=\operatorname{tg}\vartheta(t)y\big\},$$

где множество

$$D=\left\{(x,y):\ |x|\le R_0,\ |y|\le\sqrt{R_0^2-x^2}\ \cos\vartheta(t)\right\} \tag{36}$$

является проекцией $\Sigma(t)$ на плоскость Oxy.

Теперь перейдем от поверхностного интеграла первого типа (35) к обыкновенному двойному интегралу по формуле

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS=\iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\frac{dxdy}{|\cos\nu|}.$$

Полагая здесь

$$S=\Sigma(t), \quad f(x,y,z)=y\cos\vartheta(t)+z\sin\vartheta(t),$$

$$z(x,y)=\operatorname{tg}\vartheta(t)\ y,$$

$$dS=d\Sigma, \quad d\Sigma=\frac{dxdy}{|\cos\nu|}, \quad |\cos\nu|=\cos\vartheta(t),$$

приведем интеграл справа в (35) к виду

$$\iint\limits_{\Sigma(t)}\frac{1}{|\nabla f|}\frac{\partial f}{\partial t}\,d\Sigma=-\frac{\dot\vartheta(t)}{\cos^2\vartheta(t)}\iint\limits_D y\ dxdy.$$

Наконец, используя здесь для множества D представление (36) и переходя от двойного интеграла к повторному, находим, что

$$\iint\limits_D y\ dxdy=\int\limits_{-R_0}^{R_0}\ \int\limits_{-\sqrt{R_0^2-x^2}\cos\vartheta(t)}^{\sqrt{R_0^2-x^2}\cos\vartheta(t)} y\ dxdy=0.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{\Sigma(t)}\frac{1}{|\nabla f|}\frac{\partial f}{\partial t}\,d\Sigma=0.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае выполнено условие (17) доказанной выше теоремы о сохранении полной энергии жидкости, имеющей свободную поверхность. Но тогда из (33) вытекает равенство

$$T+\Pi=\rho\,\frac{\pi R_0^4}{8}\Big[a\dot\vartheta^2(t)\ -2g\cos\vartheta(t)\Big]=\text{const}, \tag{37}$$

которое возможно тогда и только тогда, когда зависящий от времени множитель удовлетворяет условию (34). Утверждение доказано.

Замечание. Равенство (34) с точностью до параметра a совпадает с уравнением энергии математического маятника [13]. Это обстоятельство будет использовано ниже при анализе движения жидкости в сфере.

4. ЯВНЫЙ ВИД ФУНКЦИИ $\vartheta(t)$

Применим уравнение энергии (34) для определения функции $\vartheta(t)$ и обоснования формулы (12).

Рассмотрим уравнение (34) с учетом (32) и представим его в виде

$$a\dot\vartheta^2(t)=2g\cos\vartheta(t)+K_0 \quad \Big(a=\frac{16}{15}R_0\Big), \tag{38}$$

где K_0 – некоторая константа, определяемая из начальных условий.

Выбор постоянной K_0. Чтобы уяснить общую картину движения, рассмотрим две точки в жидкости: точку $M(y_M(t),z_M(t))$, все время остающуюся на плоскости свободной поверхности жидкости и имеющую координаты

$$y_M(t)=R_0\cos\ \vartheta(t), \quad z_M=R_0\sin\ \vartheta(t),$$

и точку $C(y_C(t),z_C(t))$, совпадающую с центром масс жидкости и имеющую координаты

$$y_C(t)=\ -\ \frac{3R_0}{8}\sin\ \vartheta(t), \quad z_C=\ -\ \frac{3R_0}{8}\sin\ \vartheta(t).$$

Ясно, что для определения положения этих точек в плоскости Oyz достаточно угловой координаты $\vartheta(t)$. Точку M можно наблюдать в опытах, а воображаемая точка C удобна как аналог материальной точки математического маятника.

Если в начальный момент

$$\vartheta(t)\Big|_{t=0} = 0, \qquad (39)$$

то координаты точки M будут

$$y_M(t)\Big|_{t=0} = R_0, \quad z_M(t)\Big|_{t=0} = 0,$$

а точки C –

$$y_C(t)\Big|_{t=0} = 0, \quad z_C = (t)\Big|_{t=0} = -\frac{3R_0}{8}.$$

Другими словами, если точка M находится в начальный момент на горизонтали, то центр масс C жидкого полушара будет находиться в наинизшем из возможных своих положений.

В дальнейшем будем отслеживать точку C.

У математического маятника угловая скорость $\dot\vartheta(t)$ имеет в наинизшей точке максимум. По аналогии с этим, дополним начальное условие (39) следующим условием на производную $\dot\vartheta(t)$:

$$\dot\vartheta(t)\Big|_{t=0} = \dot\vartheta_{max}. \qquad (40)$$

Тогда из (38) находим постоянную K_0, а именно:

$$K_0 = a\dot\vartheta^2_{max} - 2g. \qquad (41)$$

Замечание. Начальные условия $(\vartheta_0, \dot\vartheta_0) = (0, \dot\vartheta_{max})$ (см. (39), (40)) выбраны потому, что именно для них получено в [13] решение уравнения энергии (38). Траектория $\big(\vartheta(t), \dot\vartheta(t)\big)$ в фазовом пространстве $(\vartheta, \dot\vartheta)$, соответствующая этим начальным условиям, заканчивается точкой $(\pm|\vartheta_{max}|, 0)$, которая определяет начальные условия в задаче о зависимости периода колебаний жидкости от начальных отклонений ее свободной поверхности. Угол $\vartheta(t)$ не может превзойти по модулю величины $|\vartheta_{max}|$, поэтому $|\vartheta_{max}|$ можно считать амплитудой колебаний зеркала жидкости. Между скоростью $\dot\vartheta_{max}$ и углом ϑ_{max} существует взаимосвязь, которая будет установлена ниже.

Преобразование уравнения энергии. С помощью элементарных преобразований, с учетом (41), уравнение энергии (38) можно привести к виду

$$a^2\dot\vartheta^2 = 2gh - 4ga\sin^2\frac{\vartheta}{2}, \qquad (42)$$

где введено обозначение

$$h = \frac{a^2\dot\vartheta^2_{max}}{2g}. \qquad (43)$$

Замечание. В уравнении (42) значение параметра a определяется формулой (32) и равно приведенной длине физического маятника в форме полушара. Приведенная длина больше радиуса сферы, в то время как расстояние от точки подвеса O до центра тяжести полушара значительно меньше его – оно равно лишь 3/8 радиуса сферы.

Замена зависимой переменной. Введем новую зависимую переменную $y(t)$ по формуле

$$\sin\frac{\vartheta(t)}{2} = y(t). \qquad (44)$$

Подставив это выражение в (42) и произведя необходимые преобразования, получим следующее равенство:

$$(\dot y)^2 = \frac{g}{a}(1 - y^2)\left(\frac{h}{2a} - y^2\right). \qquad (45)$$

Оно представляет собой уравнение энергии жидкости относительно переменной $y(t)$. Как известно, это уравнение описывает не только колебательные, но и вращательные движения математического маятника. Однако вращательный режим движения жидкого полушара представляется нереальным (в лучшем случае, этот вопрос требует отдельного рассмотрения).

Колебательное решение. Рассмотрим случай, когда жидкий полушар колеблется около нижнего положения равновесия.

При колебательном движении центр масс C полушара движется по окружности и останавливается, не достигая наивысшей точки окружности. Следовательно, $\dot y$ обращается в нуль при некотором $\vartheta < \pi$, т. е. при $y = \sin\dfrac{\vartheta}{2} < 1$. Отсюда, в свою очередь, следует, что $\dfrac{h}{2a} < 1$. Действительно, из самого уравнения (45) вытекает, что при $\dot y = 0$ и $1 - y^2 > 0$ должно быть

$$\frac{h}{2a} - y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{2a} = y^2 < 1. \qquad (46)$$

Докажем два полезных для приложений соотношения.

Если в положении $\vartheta = 0$ жидкого полушара его угловая скорость равна $+\dot\vartheta_{max}$, то угол максимального отклонения этого полушара от вертикали будет

$$\vartheta_{max} = +2\arcsin\left(2\dot\vartheta_{max}\sqrt{\frac{R_0}{15g}}\right). \qquad (47)$$

Доказательство. Поскольку параметры a и h известны и определяются формулами (32), (43), из первого соотношения (46) можно найти координату y в момент остановки (обозначим ее через y_{max}), соответствующую начальной скорости $\dot{\vartheta}_{max}$. Именно:

$$y_{max} = +\sqrt{\frac{h}{2a}} = +\sqrt{\frac{a\dot{\vartheta}^2_{max}}{4g}} =$$

$$= +\frac{\dot{\vartheta}_{max}}{2}\sqrt{\frac{16}{15}\frac{R_0}{g}} = +2\dot{\vartheta}_{max}\sqrt{\frac{R_0}{15g}}. \qquad (48)$$

Отсюда, в силу (44), вытекает требуемое равенство (47). [2]

Второе соотношение налагает ограничение на начальную угловую скорость жидкого маятника. Точнее:

чтобы жидкий полушар совершал колебательное, а не вращательное движение, его угловая скорость в положении $\vartheta = 0$ должна удовлетворять условию

$$\left|\dot{\vartheta}_{max}\right| < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15g}{R_0}}. \qquad (49)$$

Доказательство. В силу второго из соотношений (46), справедливого только для колебательных движений,

$$|y_{max}| < 1 \quad\Rightarrow\quad \left|\,2\dot{\vartheta}_{max}\sqrt{\frac{R_0}{15g}}\,\right| < 1 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \left|\dot{\vartheta}_{max}\right| < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15g}{R_0}},$$

что и доказывает требуемое неравенство (49).

Далее, чтобы найти решение уравнения (45), несколько преобразуем его. Для этого положим

$$k^2 = \frac{h}{2a} \qquad (0 < k < 1). \qquad (50)$$

Тогда это уравнение примет вид

$$(\dot{y})^2 = \frac{gk^2}{a}\left(1 - k^2\frac{y^2}{k^2}\right)\left(1 - \frac{y^2}{k^2}\right),$$

или

$$\left(\frac{\dot{y}}{k}\right)^2 = \frac{g}{a}\left(1 - k^2\frac{y^2}{k^2}\right)\left(1 - \frac{y^2}{k^2}\right).$$

Вводя здесь новую зависимую переменную

$$z(t) = \frac{y(t)}{k}, \quad \dot{z} = \frac{\dot{y}}{k},$$

приходим к уравнению

$$(\dot{z})^2 = \frac{g}{a}\left(1 - k^2 z^2\right)\left(1 - z^2\right). \qquad (51)$$

Наконец, введем новую независимую переменную по формуле

$$\tau = \sqrt{\frac{g}{a}}\ (t - C_0), \qquad (52)$$

где C_0 – произвольная вещественная постоянная. Тогда, очевидно,

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}}\ \tau + C_0 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad z(t) = z\left(\sqrt{\frac{a}{g}}\ \tau + C_0\right) = Z(\tau) \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dz}{dt} = \frac{dZ}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{dZ}{d\tau}\sqrt{\frac{g}{a}} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dZ}{d\tau}\right)^2\frac{g}{a}.$$

Подставляя эти соотношения в (51), получаем уравнение относительно функции $Z = Z(\tau)$ вида

$$\left(\frac{dZ}{d\tau}\right)^2\frac{g}{a} = \frac{g}{a}\left(1 - k^2 Z^2\right)\left(1 - Z^2\right),$$

или, окончательно,

$$\left(\frac{dZ}{d\tau}\right)^2 = \left(1 - Z^2\right)\left(1 - k^2 Z^2\right). \qquad (53)$$

Это – классическое дифференциальное уравнение, порождающее функцию Якоби sn (см. [14], стр. 356).

Уравнение (53) имеет частное решение

$$Z = \mathrm{sn}(\tau, k).$$

Подставляя сюда выражение τ (52), приходим к решению

$$z(t) = Z(\tau)\Big|_{\tau=\tau(t)} = \mathrm{sn}\left[\sqrt{\frac{g}{a}}\ (t - C_0), k\right]$$

уравнения энергии в форме (51). Наконец, возвращаясь от z к y, получаем искомое решение уравнения энергии в исходной форме (45), а именно:

$$y = k\ \mathrm{sn}\left[\sqrt{\frac{g}{a}}\ (t - C_0), k\right]. \qquad (54)$$

Здесь C_0 – произвольная постоянная, а параметры k (для колебательного режима $0 < k < 1$) и a (в случае заполнения сферы жидкостью наполовину) определяются по формулам (см. (50), (43) и (32))

$$k = \frac{\dot{\vartheta}_{max}}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}, \quad a = \frac{16}{15}R_0. \qquad (55)$$

[2] Здесь знак "+" указывает на то, что угловые смещения и их скорости направлены против хода часовой стрелки.

5. МАЯТНИКОВАЯ ЧАСТОТА

Выведем формулу круговой частоты нелинейных свободных колебаний жидкости в сфере в зависимости от начального отклонения свободной поверхности на этапе ускоренного движения (разгона или торможения) бака. В дальнейшем будем обозначать ее через ω_0 и называть *маятниковой* частотой, в отличие от основной частоты ω_1 и других частот ω_i $(i = 2, 3, ...)$, фигурирующих в линейной теории.

Функция (54) является периодической с периодом (см. [13], стр. 88)

$$T_0 = 4\,\sqrt{\frac{a}{g}}\;K(k^2),$$

$$K(k^2) = \int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}dt. \tag{56}$$

В силу (55)

$$\sqrt{\frac{a}{g}} = \sqrt{\frac{\frac{16}{15}R_0}{g}} = \sqrt{\frac{16R_0}{15g}} = 4\sqrt{\frac{R_0}{15g}}.$$

В то же время, произведя в интеграле K замену переменной интегрирования

$$t = \sin\phi,$$

найдем, что

$$dt = \cos\phi d\phi, \quad (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\cos\phi}.$$

Учитывая эти соотношения, вместо (56) можно написать

$$T_0 = 16\,\sqrt{\frac{R_0}{15g}}\;K(k^2), \tag{57}$$

где

$$K(k^2) = \int\limits_0^{\pi/2} (1-k^2\sin^2\phi)^{-\frac{1}{2}}d\phi. \tag{58}$$

Выразим k^2 через параметры системы и начальный угол ϑ_{max}. Из (55) следует

$$k^2 = \frac{\dot\vartheta^2_{max}}{4}\frac{a}{g} = \frac{\dot\vartheta^2_{max}}{4}\frac{\frac{16}{15}R_0}{g} = \frac{4R_0\dot\vartheta^2_{max}}{15g}.$$

Если учесть, что, в силу (48),

$$\frac{4R_0\dot\vartheta^2_{max}}{15g} = y^2_{max},$$

то из предыдущего равенства можно выразить k^2 в виде функции от начального отклонения y_{max} жидкого полушара от положения равновесия, а именно:

$$k^2 = y^2_{max}.$$

Наконец, поскольку в силу (44) переменная y связана с угловой координатой ϑ плоскости свободной поверхности жидкости соотношением

$$y = \sin\frac{\vartheta}{2},$$

последнее равенство можно переписать в виде

$$k^2 = \sin^2\frac{\vartheta_{max}}{2}. \tag{59}$$

Таким образом, как видно из (57) и (59), период T_0 свободных нелинейных колебаний жидкого полушара (т. е. при половинном заполнении полости) зависит от его радиуса R_0 и его максимального отклонения ϑ_{max} от крайнего нижнего положения $\vartheta = 0$.

Важные для расчета периода колебаний T_0 формулы (55) и (59) вытекают также из следующего предположения.

Максимальный угол отклонения маятника ϑ_{max} от нижнего положения равновесия при начальных условиях

$$\vartheta\Big|_{t=0} = 0, \quad \dot\vartheta\Big|_{t=0} = \dot\vartheta_{max}$$

связан с начальной угловой скоростью $\dot\vartheta_{max}$ соотношением

$$\sin\frac{\vartheta_{max}}{2} = \frac{\dot\vartheta_{max}}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}. \tag{60}$$

Доказательство. В силу (31) и (30), кинетическая и потенциальная энергии с точностью до множителя $\rho\pi R_0^4/8$ имеют вид

$$T(t) = a\dot\vartheta^2(t), \quad \Pi(t) = -2g\cos\vartheta(t).$$

Тогда из уравнения энергии (38) и формулы (41) следует, что

$$T(t) + \Pi(t) = a\dot\vartheta^2_{max} - 2g.$$

Очевидно, значения кинетической энергии $T(t)$ лежат в пределах

$$T_{min} = T(t)\Big|_{t=\frac{T_0}{4}} = 0,$$

$$T_{max} = T(t)\Big|_{t=0} = a\dot\vartheta^2_{max}.$$

Тогда из предыдущего равенства находим следующие пределы изменения потенциальной энергии $\Pi(t)$:

$$\Pi(t)\Big|_{t=0} = -2g = \Pi_{min},$$

$$\Pi(t)\Big|_{t=\frac{T_0}{4}} = -2g\cos\vartheta_{max} = \Pi_{max}.^3$$

Отсюда следует цепочка равенств:

$$T(t) + \Pi(t)\Big|_{t=\frac{T_0}{4}} = a\dot{\vartheta}^2_{max} - 2g \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_{min} + \Pi_{max} = a\dot{\vartheta}^2_{max} - 2g \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -2g\cos\theta_{max} = a\dot{\vartheta}^2_{max} - 2g \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta_{max} = 1 - \frac{a}{2g}\dot{\vartheta}^2_{max} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 1 - 2\sin^2\frac{\theta_{max}}{2} = 1 - \frac{a}{2g}\dot{\vartheta}^2_{max},$$

и доказываемое соотношение (60) становится очевидным.

Более частное соотношение (47) вытекает из (60), если в последнем заменить a выражением (32).

Наконец, искомая формула круговой частоты $\omega_0 = 2\pi/T_0$, в силу (57) и (59), будет следующей (случай половинного заполнения):

$$\omega_0 = \frac{\pi}{8\,K(k^2)}\sqrt{\frac{15g}{R_0}}, \qquad (61)$$

где

$$K(k^2) = \int\limits_0^{\pi/2}(1 - k^2\sin^2\phi)^{-\frac{1}{2}}d\phi, \quad k^2 = \sin^2\frac{\vartheta_{max}}{2}.$$

6. ПРИМЕР

Проанализируем зависимость частоты колебаний жидкости от начального угла поворота ее свободной поверхности (зеркала) в случае, когда сферический бак радиуса $R_0 = 0.15$ м наполовину заполнен жидкостью.

[3] Напомним, что с самого начала мы полагали $-\pi/2 < \vartheta(t) < \pi/2$, и, кроме того, начальная угловая скорость направлена против хода часовой стрелки, т. е. $\dot{\vartheta}_{max} > 0$. Поэтому $0 \le \vartheta(t) < \pi/2$ и, следовательно, $-1 \le -\cos\vartheta(t) < 0$.

Таблица 2. Зависимость маятниковой частоты ω_0 от начального положения зеркала (случай половинного заполнения), в рад $\cdot$ с$^{-1}$

ϑ_{max}	$\sin\frac{\vartheta_{max}}{2}$	$k^2 = m$	$K(m)$	ω_0
0°	0	0	1.571	7.834
5°	0.044	0.00	1.571	7.834
10°	0.087	0.01	1.575	7.807
20°	0.174	0.03	1.583	7.768
30°	0.259	0.07	1.599	7.690
40°	0.342	0.12	1.617	7.604
50°	0.423	0.18	1.650	7.452
60°	0.500	0.25	1.686	7.293
70°	0.574	0.33	1.732	7.099
80°	0.643	0.41	1.785	6.889
89°	0.701	0.49	1.846	6.661
90°	0.707	0.50	1.854	6.634

6.1. Амплитудно-частотная характеристика нелинейных колебаний жидкости

При $R_0 = 0.15$ м и ускорении силы тяжести $g = 9.81$ м $\cdot$ с$^{-2}$ имеем

$$\sqrt{\frac{15g}{R_0}} = 31.32 \text{ с}^{-1},$$

а расчетная формула для частоты (61) примет следующий частный вид:

$$\omega_0 = \frac{12.299}{K(k^2)} \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Значения эллиптического интеграла $K(k^2)$ вычисляем по формуле (58) с помощью таблиц справочника [15, стр. 422], полагая $m = k^2$ и рассчитывая k^2 по формуле (59).

Результаты расчетов приведены в табл. 2. При расчетах принималось, что в начальный момент $t = 0$ плоская свободная поверхность $\Sigma(t)$ жидкости отклонена от плоскости горизонта на угол ϑ_{max} (в градусах) и имеет нулевую угловую скорость, т. е. $\dot{\vartheta}(0) = 0$. Относительно данных этой таблицы заметим следующее.

Замечание. Первый и последний столбцы табл. 2 представляют функциональную зависимость

$$\omega_0 = \omega_0(\vartheta_{max}),$$

которая фактически является амплитудно-частотной характеристикой рассматриваемых нелинейных колебаний жидкости. Это следует из того, что для невязкой жидкости амплитуда угловых колебаний зеркала равна ее начальному угловому смещению ϑ_{max} (при условии равенства нулю начальной угловой скорости $\dot{\vartheta}$). Индекс max в обозначении начального углового смещения ϑ_{max} напоминает об амплитудном значении этого смещения.

1. Частота ω_0 при $\vartheta_{max} = 0$ отлична от нуля. Казалось бы, поскольку при $\vartheta_{max} = 0$ угловая скорость зеркала также равна нулю (как и при любом начальном угле ϑ_{max}), жидкость должна оставаться в равновесии, и, следовательно, период ее колебаний $T_0 = \infty$, что влечет значение частоты $\omega_0 = 0$. На самом деле это не так. Объяснение вытекает из теории математического маятника, где период колебаний маятника разлагается в ряд по степеням синуса половинного угла отклонения маятника от вертикали, а свободный член этого разложения определяет значения периода при малых начальных углах отклонения маятника (см. [16, стр. 222, формула (22.54)]). Приведенное в таблице значение $\omega_0 = 7.834$ рад $\cdot$ с$^{-1}$ означает, что при небольших начальных углах поворота зеркала жидкость будет совершать изохронные колебания именно с этой частотой.

2. Диапазон изохронных колебаний жидкости, в котором частота ω_0 остается практически постоянной, соответствует начальным углам из интервала $0° \leq \vartheta_{max} \leq 10°$. Это согласуется с экспериментом. Именно, в работе [6, стр. 53] отмечалось, что собственная частота для сферической полости не зависит от амплитуды колебаний до амплитуд, равных $0.1R_0$, на стенке. Положив, что на сферической стенке линейная амплитуда колебаний свободной поверхности равна длине дуги l, соответствующей угловой амплитуде ϑ_{max} колебаний свободной поверхности, имеем оценку

$$l = R_0\vartheta_{max} < 0.1R_0.$$

Отсюда следует, что в экспериментах основная собственная частота колебаний жидкости оставалась одной и той же при смещениях свободной поверхности на стенке на углы

$$\vartheta_{max} < 0.1 \simeq 6°.$$

Из табл. 2 видно, что эта частота остается практически неизменной при начальных отклонениях (амплитудах колебаний) свободной поверхности до 10°.

3. С возрастанием амплитуды ϑ_{max} частота ω_0 убывет. Наименьная частота, соответствующая наибольшей амплитуде, на $(7.834 - 6.634)/7.834 \cdot 100\% = 15\%$ меньше частоты изохронных (малых) колебаний $\omega_0 = 7.834$ рад$\cdot$с$^{-1}$. Зависимость частоты от амплитуды — нелинейная.

Таблица 3. Известные расчетные значения основной частоты ω_1 по линейной теории, в рад $\cdot$ с$^{-1}$

Budiansky (1960)	Богоряд (1962)	McIver (1989)
$R = 0.15$ м	$R_C = 0.15$ м	$c = 0.15$ м
e=0	$\bar{h} = 1.0$	$\dfrac{d}{c} = 1.0$
$\lambda_1 = 1.565$	$\bar{\omega}_1^2 = 1.6$	$Kc = 1.56016$
$\omega_1 = \sqrt{\dfrac{g\lambda_1}{R}}$	$\omega_1 = \sqrt{\dfrac{j\bar{\omega}_1^2}{R_C}}$	$\omega_1 = \sqrt{\dfrac{g(Kc)}{c}}$
$= 10.117$	$=10.229$	$=10.101$

6.2. Сравнение маятниковой и основной частот

Основная частота ω_1 соответствует малым (линейным) колебаниям жидкости, которые являются изохронными для достаточно малых отклонений свободной поверхности от положения равновесия. В то же время, как установлено выше, нелинейные колебания жидкости могут считаться изохронными, если маятниковые частоты их колебаний лежат в достаточно малой окрестности максимального значения маятниковой частоты ω_0. Возникает вопрос: как соотносятся маятниковая и основная частоты колебаний жидкости.

6.2.1. Расчетные значения основной частоты

Известные расчетные значения основной частоты ω_1 для случая половинного заполнения сферы жидкостью сведены в табл. 3. Обозначения и некоторые детали расчетов описаны ниже.

Работа Будянского [4]. Параметр (λa) – спектральный параметр однородного интегрального уравнения (27) относительно функции $g(\rho)$, известным образом связанной с интенсивностями $2f(\rho)\cos\alpha$ трехмерных стоков, введенных в задаче о колебаниях жидкости в сфере. Формула частоты $\omega = \sqrt{\dfrac{\lambda_1 g}{R}}$ следует из определения параметра $\lambda = \omega^2 R/g$, приведенного в [4, с. 162] после формулы (7). Данные взяты из табл. 2 [4, с. 170] для $e = 0$ и $a = 1.0$, что соответствует случаю половинного заполнения сферы жидкостью (a – отношение радиуса невозмущенной свободной поверхности к радиусу сферы).

Работа Богоряда [5]. Результаты Богоряда воспроизведены в статье Рабиновича и др. [7, с. 204], обозначениями которой мы здесь пользуемся. Расчетные данные приведены в виде графиков зависимости квадрата безразмерной частоты $\bar{\omega_1}^2 = \bar{\omega}_1^2(\bar{h})$ от безразмерной глубины жидкости $\bar{h} = h/l \in [0, 2]$, где $\bar{\omega}_1^2$ и квадрат размерной частоты ω_1^2 связаны зависимостью (см. [7, с. 182, формула 1.10])

$$\omega_1^2 = \frac{j\bar{\omega}_1^2}{l}, \tag{62}$$

где l – характерный размер полости, в случае сферы равный ее радиусу R_C; j – градиент потенциала массовых сил (отнесенного к единице массы). Здесь полагаем j=9.81 м/с^2. По сплошной линии [7, с. 204, рис. 18], соответствующей расчетам с помощью вариационного метода из работы Богоряда [5], находим, что

$$\bar{\omega}_1^2 = \frac{20\text{ мм}\cdot 2.0}{25\text{ мм}} = 1.6.$$

Интересно, что для физического маятника в форме шарового сегмента (двойной штрихпунктир на этом же рисунке) квадрат безразмерной частоты при $\bar{h} = 1.0$ получается следующим:

$$(\bar{\omega}_1^2)_{\text{ф. м.}} = \frac{22\text{ мм}\cdot 2.0}{25\text{ мм}} = 1.76.$$

Пересчет к размерной частоте физического маятника дает значение

$$(\omega_1)_{\text{ф. м.}} = \sqrt{\frac{(\bar{\omega}_1^2)_{\text{ф. м.}} j}{R_C}} = \sqrt{\frac{1.76\cdot 9.81}{0.15}} =$$
$$= 10.729\text{ рад}\cdot\text{с}^{-1}.$$

Таким образом, по этим данным частота колебаний затвердевшей жидкости при половинном заполнении сферы

$$(\omega_1)_{\text{ф. м.}} > \omega_1,$$

т. е. частота, соответствующая совокупности первых двух членов суммы

$$\varphi_n \simeq \varphi_n^{(k)} = \sum_{m=1}^{k} a_m^{(n)}\gamma_m \quad (n = 1,\ k = 5 \div 6)$$

(это – k-е приближение по методу Ритца функции φ_n), оказывается большей частоты, соответствующей сумме 5–6 членов (именно такое количество членов удерживалось в работе [5, с 1126] при расчете первой собственной частоты). В отличие от этого, маятниковая частота равна $\omega_0 = 7.834$ рад $\cdot$ с$^{-1}$, т. е. меньше ω_1.

Правильность результатов Богоряда подтверждена также данными работы [8, с. 143].

Работа Макивера [10]. Результаты вычислений представлены в виде таблицы первых четырех значений величины Kc как функции безразмерной глубины d/c для азимутальных волновых чисел $m = 0, 1, 2, 3$ [10, с. 244, табл. 2]. Величина Kc является, по существу, уже встречавшимся (см. (62) в данной статье) квадратом безразмерной частоты, поскольку [см. 10, с. 244]

$$Kc = \frac{\omega^2 c}{g},$$

где c – радиус сферы.

Заметим, что в уже упоминавшейся статье [11] первые три собственные значения λ_1, λ_2, λ_3, рассчитанные по методу Ритца [см. 11, с. 70, табл. 1, 2], в случае половинного заполнения сферы ($h = 1$) согласуются с точностью до 0.1% с первыми тремя значениями Kc из табл. 2 работы [10], соответствующими значениям $d/c = 1.0$ из столбца $m = 1$.

Вывод к табл. 3. Значения основной частоты ω_1, рассчитанные тремя совершенно различными методами, отличаются на 0.2 % (значение из первого столбца) и 1.3 % (значение из второго столбца) от значения частоты из последнего столбца $\omega_1 = 10.101$ рад $\cdot$ с$^{-1}$.

6.2.2. Экспериментальные значения основной частоты

Значения основной частоты, полученные экспериментальными методами, приведены в табл. 4. Смысл обозначений и некоторые детали экспериментов описаны ниже.

Работа Микишева и Дорожкина [6] [4]. Обрабатывались осциллограммы свободных затухающих колебаний различных жидкостей в сферических баках диаметром 248, 486 и 800 мм; при $\dfrac{h}{r_0} = 1$ (h – глубина жидкости, r_0 – радиус сферы) коэффициент $C_1 = 1.25$ [6, с. 53, фиг. 14]).

[4] К сожалению, в работе [6] имеется путаница в обозначениях. На графике фиг. 14 по оси ординат указана величина h/R_0 (в этой работе R_0 – особое значение числа Рейнольдса), хотя в тексте, в предпоследнем абзаце стр. 52, написано: "Зависимости C_1 и C_2 от h/r_0 даны на фиг. 14 и 15". Кроме того, формула частоты (3.2) $\omega = C_1\sqrt{g/r^0}$, где r^0 – радиус свободной поверхности, противоречит формуле (1.2) $\omega = \sqrt{g/r_0}f_1$, где r_0 – радиус сферы. При анализе полагалось, что на фиг. 14 по оси абсцисс откладывалась величина h/r_0.

Таблица 3. Известные расчетные значения основной частоты ω_1 по линейной теории, в рад $\cdot$ с$^{-1}$

McIver (1989)	[3, с. 385]	McIver (1989)
$R = 0.15$ м	$R_C = 0.15$ м	$c = 0.15$ м
e=0	$\bar{h} = 1.0$	$\frac{d}{c} = 1.0$
$\lambda_1 = 1.565$	$\bar{\omega}_1^2 = 1.6$	$Kc = 1.56016$
$\omega_1 = \sqrt{\frac{g\lambda_1}{R}}$	$\omega_1 = \sqrt{\frac{j\bar{\omega}_1^2}{R_C}}$	$\omega_1 = \sqrt{\frac{g(Kc)}{c}}$
$= 10.117$	=10.229	=10.101

Таблица 4. Экспериментальные значения основной собственной частоты при половинном заполнении бака, в рад$\cdot$с$^{-1}$

сс[6, с. 53]	[3, с. 385]	[17, с. 217]
$r_0 = 0.15$ м	$d = 0.3683$ м	$R_0 = 0.15$ м
$\frac{h}{r_0} = 1.0$	$\frac{h}{d} = 0.5$	$\frac{h}{l} = 1.0$
$C_1 = 1.25$	$\frac{\omega_1^2 d}{a} = 3.042$	$\bar{\omega} = 1.291$
$\omega_1 = 10.109$	$\omega_1 = 9.001$	$\omega_1 = 10.440$

Тогда по первой из формул (3.2), которая рекомедована авторами для случаев $h/r_0 \geq 0.1$ [6, с. 52–53],

$$\omega = C_1 \sqrt{\frac{g}{r^0}} = 1.25 \sqrt{\frac{9.81}{0.15}} = 1.25 \sqrt{65.4} =$$

$$= 1.25 \cdot 8.087 = 10.109 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}.$$

При расчетах учтено, что при половинном заполнении бака радиус свободной поверхности равен радиусу сферы, т. е. $r^0 = r_0 = 0.15$ м.

Работа Абрамсона и др. [3]. На фиг. 2 [3] приведен график зависимости квадрата безразмерной частоты $\omega_n^2 d/a$ от безразмерной глубины h/d, где ω_n – основная собственная частота жидкости (круговая); d – диаметр сферы; a – ускорение силы тяжести; h – глубина жидкости, отсчитываемая от нижней точки сферы. При $h/d = 0.5$ (половинное заполнение) приведены четыре значения частоты: одно значение из теории Будянского, два значения, полученные в SWRI, и одно значение из отчета NASA. Видно, что при $h/d = 0.5$ теоретическое значение Будянского превосходит все экспериментальные данные.

В результате пересчета получается ($h/d = 0.5$, a=9.81 м/с^2, d=0.3683 м):

Будянский (черный кружок, теоретическое значение) –

$$\frac{\omega_n^2 d}{a} = \frac{37.5 \text{ мм}}{12 \text{ мм}} = 3.125,$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3.125 \cdot 9.81}{0.3683}} = 9.123 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1};$$

SWRI (квадрат) –

$$\frac{\omega_n^2 d}{a} = \frac{36.5 \text{ мм}}{12 \text{ мм}} = 3.042,$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3.042 \cdot 9.81}{0.3683}} = 9.001 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1};$$

SWRI (ромб) –

$$\frac{\omega_n^2 d}{a} = \frac{36.0 \text{ мм}}{12 \text{ мм}} = 3.0,$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3.0 \cdot 9.81}{0.3683}} = 8.938 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1};$$

NASA (сплошная линия) –

$$\frac{\omega_n^2 d}{a} = \frac{36.5 \text{ мм}}{12 \text{ мм}} = 3.042,$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3.042 \cdot 9.81}{0.3683}} = 9.001 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Работа Микишева и др. [17]. При относительной глубине $\frac{h}{l} = 1$ (h – глубина жидкости; l – характерный линейный размер, за который принят радиус сферы R_0) квадрат безразмерной частоты $\bar{\omega}^2 = 1.667$ [17, с. 217, рис. 11]. Следовательно,

$$\bar{\omega} = \sqrt{1.667} = 1.291.$$

Безразмерная и размерная частоты связаны соотношениями

$$\bar{\omega} = \sqrt{\frac{R_0}{g}}\,\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{R_0}}\,\bar{\omega}.$$

Отсюда получаем следующее экспериментальное значение первой собственной частоты (здесь было принято $R_0 = 0.15$ м):

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R_0}}\,\bar{\omega} = 8.087 \cdot 1.291 = 10.440 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Это экспериментальное значение первой собственной частоты несколько превосходит значение, вытекающее из графиков предыдущей работы [6].

Выводы к таблице 4. Значения основной частоты, полученные различными экспериментаторами, отличаются на 3.2 % (значение из первого столбца) и 13.8 % (значение из второго столбца) от значения частоты 10.44 рад $\cdot$ с$^{-1}$ из последнего столбца. Расчеты достаточно хорошо согласуются с экспериментами. Последние расчетное и эксперимнтальное значения основной частоты в табл. 3 и 4 отличаются на

$$\varepsilon = \frac{|10.101 - 10.44|}{10.44} \cdot 100\% = 3.2\%.$$

Таблица 5. Сравнение маятниковой ω_0 и основной ω_1 частот для трех баков из [18]

Диаметр D, м	0.241	0.523	0.813
Глубина h/D	0.5	0.5	0.5
Основная частота f, Гц	1.792	1.208	0.972
ω_1, рад $\cdot$ с$^{-1}$	11.259	7.590	6.107
$K(0)$	1.571	1.571	1.571
$\sqrt{D}$	0.4909	0.7232	0.9016
ω_0, рад $\cdot$ с$^{-1}$	8.735	5.929	4.756
Погрешность ε,%	22	22	22

6.2.3. Сопоставление с маятниковой частотой

Маятниковая частота принимается равной $\omega_0 = 7.834$ рад $\cdot$ с$^{-1}$ (см. п. 6.1).

Относительная погрешность маятниковой частоты при $R_0 = 0.15$ м по отношению к расчетному значению равна

$$\varepsilon = \frac{|7.834 - 10.101|}{10.101} \cdot 100\% = 22.4\ \%,$$

а по отношению к экспериментальному значению –

$$\varepsilon = \frac{|7.834 - 10.44|}{10.44} \cdot 100\% = 25\ \%.$$

Экспериментальные данные о колебаниях жидкости в сферических баках различных диаметров имеются в работе [18]. В табл. 5 представлены данные из этой работы и соответствующие значения маятниковой частоты, а также их погрешности. В формуле для маятниковой частоты (61) полагалось (см. табл. 2)

$$K(k^2) = K(0) = 1.571.$$

Выводы к таблице 5. Диаметры баков существенно влияют на основную частоту ω_1. Чем больше диаметр, тем меньше частота. Маятниковые частоты меньше основных частот. Погрешности маятниковой частоты ω_0 по отношению к экспериментальным значениям основной частоты ω_1 для баков диаметрами 0.241 м, 0.523 м, 0.813 м составляют 22%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье представлено точное решение задачи о нелинейных свободных колебаниях жидкости, наполовину заполняющей сферический бак. На практике это решение позволяет рассчитывать не только традиционную в линейных задачах зависимость "глубина-частота но и ранее не исследованную зависимость "начальное отклонение свободной поверхности-частота" (при фиксированной глубине заполнения). В принципе, предложенный подход может быть распространен на случай произвольной глубины заполнения.

Предложенное решение представляет не известную "маятниковую аналогию" колебаний жидкости, а точный режим движения жидкости, вытекающий из всего набора гидродинамических уравнений и представляющий собой квазитвердое вращение в сфере жидкости со свободной поверхностью. В данном случае нет необходимости в определении параметров эквивалентного маятника (массы, координат точки подвеса, положения центра масс и моментов инерции), что является предметом исследований в теории механических аналогий колебаний жидкости, – сама начально-краевая задача диктует значения этих параметров. "Физический маятник в форме шарового сегмента" Рабиновича–Богоряда является лишь интерпретацией суммы первых двух членов в разложении потенциала, причем параметры такого маятника зависят от числа удерживаемых членов в этом разложении (вместе с коэффициентами разложения).

Представляется важным вопрос о том, почему наибольшая маятниковая частота, соответствующая, по определению, малым амплитудам колебаний свободной поверхности, оказывается стабильно меньше (в случае половинного заполнения – на 22÷25 %) экспериментальных значений основной частоты.

1. *Золотенко Г.Ф.* Эффект сохранения зеркала жидкости в подвижной сфере // Прикладная гидромеханика.– 2011.– Т. 13. N 1.– С. 24-28.
2. *Abramson, H.N.* Dynamic behavior of liquid in moving container // Appl. Mech. Reviews.– 1963.– 16.– P. 501–506.
3. *Abramson, H.N., Wen–Hwa Chu, Garza, L.R.* Liquid sloshing in spherical tanks // AIAA Jouranal.– 1963.– V. 1, N. 2.– P. 384–389.
4. *Budiansky, B.* Sloshing of liquids in circular canals and spherical tanks // Jouranal of the Aero/Space Sciences.– 1960.– V. 27, N. 3.– P. 161–173.
5. *Богоряд И.Б.* К решению задачи о колебаниях жидкости, частично заполняющей полость, вариационным методом // Прикладная математика и механика.– 1962.– Т. 26, вып. 6.– С. 1122-1127.
6. *Микишев Г.Н., Дорожкин Н.Я.* Экспериментальное исследование свободных колебаний жидкости в сосудах // Изв. АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение.– 1961.– 4.– С. 48-53.
7. *Рабинович Б.И., Докучаев Л.В., Полякова З.М.* О расчете коэффициентов уравнений возмущенного движения твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью // Космические исследования.– 1965.– Т. 3, вып. 2.– С. 179-206.
8. *Моисеев Н.Н., Петров А.А.* Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости.– М.: ВЦ АН СССР, 1966.– 268 с.
9. *Moiseev N.N., Petrov A.A.* The calculation of free ocsillations of a liquid in a motionless container // Adv. Appl. Mech.– 1965.– 9.– P. 91-154.
10. *Mciver, P.* Sloshing frequencies for cylindrical and spherical containers // J. Fluid Mech.– 1989.– 201.– P. 243–257.
11. *Барняк М.Я., Луковский И.А.* К решению задач динамики идеальной несжимаемой жидкости в сферической полости и в горизонтальном круговом канале // Математическая физика и нелинейная механика.– 1985.– Вып. 4 (38).– С. 66-71.
12. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика.– М.: ГИТТЛ, 1955, ч. 1.– 556 с.
13. *Уиттекер Э.Т.* Аналитическая динамика.– М.: УРСС, 2004.– 504 с.
14. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. Т.2.– М.: Гос. и-во физ.-мат. л-ры, 1963.– 516 с.
15. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. — Под. ред. М. Абрамовица и И. Стигана.– М.: Наука, 1979.– 830 с.
16. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика.– М.-Л.: ГИТТЛ, 1946.– 656 с.
17. *Микишев Г.Н., Невская Е.А., Мельникова И.М., Дорожкин Н.Я.* Об экспериментальном исследовании возмущенного движения твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью // Космические исследования.– 1965.– Т. 3, вып. 2.– С. 208-220.
18. *Sumner, I.E.* Experinental investigation of stability bounderies for planar and nonplanar sloshing in spherical tanks // NASA TN.– 1966.– D-3210.– P. 1–16.