

УДК 517.9: 532.5

# КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТРЫВНОГО ОБТЕКАНИЯ КВАДРАТНОГО ЦИЛИНДРА БЕЗГРАНИЧНЫМ ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Е. В. БРУЯЦКИЙ, А. Г. КОСТИН

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев**Получено 14.08.2011 ◊ Пересмотрено 12.05.1212*

Представлены результаты численного исследования задачи обтекания цилиндра с квадратной формой поперечного сечения безграничным ламинарным потоком. Метод расчета основан на прямом решении системы нестационарных уравнений Навье-Стокса в переменных скорость-давление. Приведены результаты исследований стационарного и нестационарного периодического режимов течения. Изучены поля скоростей, давления, вихревая структура течения в следе за цилиндром и гидродинамические силы, действующие на цилиндр, в зависимости от времени и числа Рейнольдса. Результаты расчетов широко представлены в графическом виде.

Представлені результати чисельного дослідження задачі обтікання циліндра з квадратною формою поперечного перетину безграничним ламинарним потоком. Метод розрахунку заснований на прямому вирішенні системи нестационарних рівнянь Нав'є-Стокса у змінних швидкість-тиск. Наведено результати досліджень стаціонарних і нестационарних періодичних режимів течії. Вивчені поля швидкостей, тиску, вихрива структура течії у сліді за циліндром і гідродинамічні сили, які діють на циліндр, в залежності від часу і числа Рейнольдса. Результати розрахунків широко представлені у графічному вигляді.

Numerical simulation results are presented on the unbounded laminar flow around a cylinder of a rectangular cross-section. The calculation method is based on a direct solution of non-stationary Navier-Stokes equations in velocity-pressure variables. Investigation results are given for stationary and non-stationary periodic flow regimes. Velocity and pressure fields, vortical structure in the wake behind the cylinder and hydrodynamic forces acting on the cylinder are studied depending on time and Reynolds number. Calculation results are exhaustively illustrated graphically.

## ВВЕДЕНИЕ

Режимы отрывных течений вязкой жидкости около плохообтекаемых тел или инженерных конструкций часто встречаются в природе и технике. Сложность исследования таких течений связана с тем, что при определенных числах Рейнольдса происходит отрыв потока от твердой обтекаемой поверхности, который вызывает нестационарность течения и образование различных вихревых структур [1–4]. Понимание механизма их возникновения имеет большое практическое значение для проектирования различных летательных аппаратов, их элементов и других технических устройств.

В силу сложности отрывных течений очень часто их изучение проводят на примерах двумерных задач внешнего обтекания цилиндров с различной формой поперечного сечения (круговой, эллиптической, квадратной, прямоугольной). Изучению такого класса течений посвящено большое количество теоретических и экспериментальных работ [4–7], особенно много – изучению обтекания кругового цилиндра [8–11].

В данной работе рассматривается обтекание цилиндрических тел с квадратной формой их поперечного сечения. Эксперименты показывают, что в

задачах такого класса в зависимости от числа Рейнольдса может реализоваться стационарное безотрывное обтекание и нестационарный периодический отрывной режим обтекания. В последнем случае в следе за цилиндром возникает система свободных вихревых образований, которые появляются при их отрыве с угловых кромок обтекаемого цилиндра.

Исследованию сопротивления и процессов срыва вихрей с плохообтекаемых тел в установившемся потоке несжимаемой жидкости посвящено множество работ. Характер обтекания цилиндров с квадратной и прямоугольной формой поперечного сечения отличается от обтекания кругового цилиндра. Многие из работ этого направления сочетают в себе как экспериментальные [12], так и теоретические подходы.

Среди наиболее ранних численных исследований течения за квадратным цилиндром отметим работу Лайтхилла [13]. В качестве исходных уравнений он использует уравнения Навье-Стокса в переменных скорость-завихренность:  $V - \Omega$ . Это дает возможность свести задачу к решению интегральных уравнений для скорости и завихренности [14]. Примерами другого подхода к решению рассматриваемой задачи являются работы [5, 15–17], в которых использовался дискретно-вихревой

метод.

Многие численные модели течения около квадратного цилиндра, основанные на решении уравнений Навье-Стокса, выполнялись с использованием переменных функция тока-вихрь и дискретно-вихревым методом. Прямое численное моделирование течения около прямоугольного цилиндра при малых числах Рейнольдса было предпринято в "пионерской" работе [18], однако использование в ней схемы с центральными разностями приводило к появлению осцилляций в решении. В работе [19] приведены результаты численного решения задачи о течении около прямоугольного цилиндра в безграничном потоке с использованием специальных разностных схем для производных по времени и конвективных слагаемых. Результаты моделирования оказались успешными до чисел Рейнольдса  $Re \leq 1000$ . Для случая квадратного цилиндра получены зависимости коэффициентов лобового сопротивления от времени в виде синусоиды. В работе [17] для решения этой задачи авторы используют систему уравнений Навье-Стокса в переменных "скорость-завихренность" и объединяют использование эйлеровых сеток, лагранжевых вихревых частиц и метод дискретных вихрей. В литературе известны и другие методы решения этой задачи [19, 20].

Современные подходы к численному моделированию обтекания тел при умеренных числах Рейнольдса вязкой несжимаемой жидкостью часто основываются на прямом решении полной системы уравнений Навье-Стокса. Одной из первых и наиболее полных работ по обтеканию квадратного цилиндра следует отметить работу Дэвиса и Мура [19], в которой алгоритм решения исходных уравнений использует метод сеток и метод конечных объемов.

Определенная сложность физической картины обтекания квадратного цилиндра делает эту задачу подходящей для тестирования новых и модифицированных численных схем при расчете отрывных течений с рециркуляциями. Недавно в нашей работе [21] предложен эффективный метод численного интегрирования полной системы нестационарных уравнений Навье-Стокса в физических переменных скорость-давление. Общий принцип решения использует метод конечных разностей и разнесенную сетку подобно "MAC" методу [22]. Верификация численного алгоритма была проведена на решении ряда задач о вынужденном течении в прямоугольной каверне с верхней движущейся крышкой, о течениях в плоском внезапно расширяющемся канале и в канале с геометрической неоднородностью на его стенке в виде квадратного

препятствия [23–25].

Цель данной работы состоит в применении этого метода для расчета полей скорости, давления, вихревой структуры течения и коэффициентов гидродинамических сил, действующих на обтекаемый квадратный цилиндр при различных числах Рейнольдса.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим двумерную задачу поперечного обтекания цилиндрического тела с квадратной формой поперечного сечения безграничным ламинарным потоком  $u_0$ . Физическая схема течения и границы расчетной области показаны на рис. 1. Начало введенной декартовой системы координат находится в левом нижнем углу расчетной области  $ABCD$ . Вертикальный размер расчетной области  $AB$  равен  $h$ , а общая длина расчетной области  $S$  состоит из трех участков  $S = S_1 + S_2 + S_3$ . Неподвижный цилиндр  $FF_1K_1K$  находится внутри области  $ABCD$ , имеет вертикальный размер ребра " $b$ ", а горизонтальный размер ребра в общем случае равен " $l$ ". При  $l = b$  имеем случай квадратного цилиндра, который будет рассматриваться ниже.

Левая внешняя граница расчетной области  $AB$  удалена от границы тела  $FF_1$  на расстояние  $S_1 = 4$ , а граница  $CD$  удалена от ребра  $K_1K$  вниз по потоку на расстояние  $S_2 = 15$ . Верхняя  $BC$  и нижняя  $AD$  границы потока считаются достаточно удаленными от контура тела  $FF_1K_1K$ , чтобы на них можно было принять условия невозмущенного потока. Численный эксперимент показал, что расстояние  $h_1$  можно принять равным 4, чтобы оно не оказывало существенного влияния на результаты расчета с заданной точностью  $\epsilon$  для рассматриваемых чисел Рейнольдса. Жидкость предполагается несжимаемой с постоянными физическими свойствами.

Для описания движения жидкости используются нестационарные двумерные уравнения Навье-Стокса без каких-либо упрощающих предположений. При введении безразмерных величин за масштаб длины принимается длина ребра  $l$ , за масштаб скорости принята невозмущенная скорость набегающего потока  $u_0$ , за масштаб времени – величина  $t_0 = l/u_0$ , за масштаб давления – скоростью напор  $p_0 = \rho_0 u_0^2$ .

В безразмерных величинах  $V_i, P, X_i$  система нестационарных уравнений Навье-Стокса с постоянными плотностью  $\rho_0$  и кинематической вязкостью  $\nu$  в консервативной тензорной форме в прямоу-

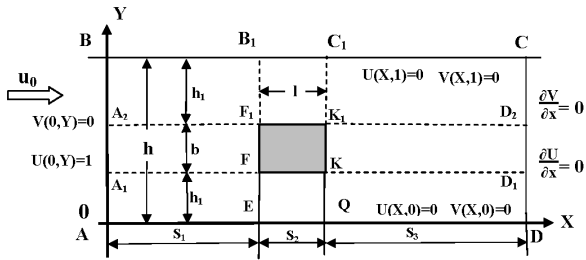


Рис. 1. Принципиальная схема поперечного обтекания квадратного цилиндра безграничным потоком

гольной декартовой системе координат записываются в виде [3]

$$\frac{\partial V_i}{\partial \tau} = -\frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{\partial}{\partial X_k} \left[ -V_i V_k + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial V_i}{\partial X_k} + \frac{\partial V_k}{\partial X_i} \right) \right], \quad (1)$$

$$\frac{\partial V_k}{\partial X_k} = 0.$$

Здесь по повторяющемуся индексу подразумевается суммирование. Для рассматриваемой двумерной задачи  $i, k = 1, 2$ ;  $X_1 = X$ ;  $X_2 = Y$ ;  $V_1 = U$ ;  $V_2 = V$ . При этом  $U = u/u_0$ ,  $V = v/u_0$ ,  $X = x/l$ ,  $Y = y/l$ ,  $\tau = tu_0/l$ ,  $P = p/\rho_0 u_0^2$ . Здесь  $U$  и  $V$  - горизонтальная и вертикальная компоненты скорости соответственно. Для завершения постановки задачи необходимо задать начальные и краевые условия на всех границах расчетной области и на обтекаемом теле  $FF_1K_1K$ . Предполагается, что в начальный момент времени во всей расчетной области безразмерная горизонтальная скорость  $U = 1$ , а вертикальная скорость  $V$  и давление  $P$  равны нулю. В качестве граничных условий на входе в расчетную область для скорости используются условия невозмущенного потока, которые состоят в том, что  $U|_{AB} = 1$  и  $V|_{AB} = 0$ . На верхней  $BC$  и нижней  $AD$  границах расчетной области используются условия подвижных стенок с прилипанием. При постановке граничных условий на выходе из расчетной области в сечении  $CD$  мы сталкиваемся с проблемой моделирования граничных условий на бесконечности. В данном случае использованы стандартные условия свободного вытекания в форме Неймана. На твердых стенках неподвижного цилиндра выполняются условия прилипания  $U|_{\Gamma} = 0$  и непротекания  $V|_{\Gamma} = 0$ , где  $\Gamma$  - твердая граница препятствия.

Таким образом, решение системы уравнений (1) будем искать в области  $0 \leq X \leq S$ ,  $0 \leq Y \leq H$ , где  $S = s/l$ ,  $H = h/l$  с начальными и граничными условиями в виде:

начальные условия:

$$U(X, Y, 0) = 1, \quad V(X, Y, 0) = 0, \quad P(X, Y, 0) = 0;$$

граничные условия:

$$U|_{AB} = 1; \quad U|_{BC} = 1; \quad U|_{AD} = 1; \quad \partial U / \partial X|_{CD} = 0;$$

$$V|_{AB} = 0; \quad V|_{BC} = 0; \quad V|_{AD} = 0; \quad \partial V / \partial X|_{CD} = 0;$$

$$U|_{FF_1} = 0; \quad U|_{F_1K_1} = 0; \quad U|_{K_1K} = 0; \quad U|_{KF} = 0; \quad (2)$$

$$V|_{FF_1} = 0; \quad V|_{F_1K_1} = 0; \quad V|_{K_1K} = 0; \quad V|_{KF} = 0.$$

Основными параметрами задачи для цилиндра являются число Рейнольдса  $Re = u_0 l / \nu$  и геометрический размер цилиндра  $l$ . Следует подчеркнуть, что давление  $P$  в рассматриваемой системе уравнений не является основной переменной ни в одном из этих уравнений. При нашем подходе необходимое уравнение для давления выводится из уравнения неразрывности в виде уравнения типа Пуассона. При этом необходимые для его решения значения давления в граничных узлах определяются с помощью уравнений движения в комбинации с граничными условиями для компонентов скорости. В процессе решения задачи требуется определить поля скорости, давления и изучить влияние числа Рейнольдса на структуру течения в следе за цилиндром и на коэффициенты гидродинамического сопротивления и подъемной силы. Стационарное обтекание цилиндра характеризуется тем, что искомые переменные  $U, V, P$  не зависят от времени. Расчет параметров течения и структуры вихревых образований основан на численном решении системы уравнений движения жидкости (1) при начально-краевых условиях (2).

## 2. ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА

Общий принцип используемого метода решения уравнений Навье-Стокса рассмотрен в нашей работе [23]. Для решения системы исходных нестационарных уравнений (1) используется метод конечных разностей. Из-за сложностей согласования полей скорости и давления для дискретизации уравнений движения в  $X, Y$  направлениях использовалась разнесенная сетка. Это означает, что компоненты скоростей и давления определяются в различных узлах подобно методу MAC [24], что дает определенные преимущества при расчете поля давления [27]. Конечно-разностные аппроксимации рассматриваемых уравнений строятся на пятиточечном шаблоне в соответствии с известной схемой "крест" [11].

Локальная геометрия расположения узлов сетки показана в [23, рис.1]. Сеточные функции давления расположены в узлах основной сетки  $S_0(j, i, n)$ . Сеточные функции компонент скоростей  $U$  и  $V$  определены в узлах вспомогательных полуцелых сеток  $S_1(j + 1/2, i, n)$  и  $S_2(j, i + 1/2, n)$  соответственно. Шаги сеток  $hx_j$  и  $hy_i$  могут быть как равномерными, так и переменными в обоих направлениях. В соответствии с выбранным сеточным шаблоном, вводятся следующие компактные обозначения:

$$P(X_j, Y_i, \tau^n) = P_{j,i}^n,$$

$$U((j + 1/2) \cdot \Delta x, i \cdot \Delta y, n \cdot \Delta \tau) = U_{j+1/2,i}^n, \quad (3)$$

$$V(j \cdot \Delta x, (i + 1/2) \cdot \Delta y, n \cdot \Delta \tau) = V_{j,i+1/2}^n.$$

Вся расчетная область разбивается на прямоугольные ячейки. Схема их расположения и соответствующие узлы сеток приведены в работе [23].

### 3. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Для конечно-разностной аппроксимации исходных уравнений движения и неразрывности используются неявная конечно-разностная схема первого порядка точности для производных по времени и второго порядка точности для производных по пространству. Кроме того, диффузионные слагаемые аппроксимируются по схеме с центральными разностями, а для конвективных слагаемых используются схемы с односторонними разностями "против потока". Особенностью дискретизации является то, что конечно-разностная аппроксимация центрируется в соответствии с выбранным шаблоном. При этом сеточные индексы для зависимых переменных оказываются сдвинутыми.

Подстановка конечно-разностных формул в исходную систему уравнений движения позволяет записать их дискретные аналоги для  $X$  и  $Y$  направлений. Эти уравнения, после соответствующей группировки слагаемых, дополненные уравнением неразрывности, имеют следующий конечно-разностный вид:

$$d_{j+1/2,i}^U U_{j+1/2,i}^{n+1} + c_1^U U_{j+3/2,i}^{n+1} + c_0^U U_{j-1/2,i}^{n+1} + b_1^U U_{j+1/2,i+1}^{n+1} + b_0^U U_{j+1/2,i-1}^{n+1} = -\Delta y (P_{j+1,i}^{n+1} - P_{j,i}^{n+1}) + f^U, \quad (4)$$

$$d_{j,i+1/2}^V V_{j,i+1/2}^{n+1} + c_1^V V_{j,i+3/2}^{n+1} + c_0^V V_{j,i-1/2}^{n+1} + b_1^V V_{j+1,i+1/2}^{n+1} + b_0^V V_{j-1/2,i+1/2}^{n+1} =$$

$$= -\Delta x (P_{j,i+1}^{n+1} - P_{j,i}^{n+1}) + f^V, \quad (5)$$

$$\frac{U_{j+1/2,i}^{n+1} - U_{j-1/2,i}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{V_{j,i+1/2}^{n+1} - V_{j,i-1/2}^{n+1}}{\Delta y} = 0, \quad (6)$$

где коэффициенты дискретизации  $d_{j+1/2,i}^U, d_{j,i+1/2}^V, c_1, c_0, b_1, b_0$  и свободные члены  $f$  с верхними индексами  $U, V$  являются известными величинами по данным с предыдущего шага и определяются по определенным алгебраическим формулам.

Хотя полученная система уравнений (4)–(6) является основной, однако она пока незамкнута, так как содержит неизвестное давление.

### 4. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ДАВЛЕНИЯ

Необходимое уравнение для вычисления давления можно получить из уравнения неразрывности. С этой целью будем следовать известной процедуре SIMPLE [27] и преобразуем уравнения (4) и (5) к следующему виду:

$$U_{j+1/2,i}^{n+1} = \frac{-\Delta y (P_{j,i}^{n+1} - P_{j+1,i}^{n+1}) + G_{j+1/2,i}^U}{d_{j+1/2,i}^U}, \quad (7)$$

$$V_{j,i+1/2}^{n+1} = \frac{-\Delta x (P_{j,i}^{n+1} - P_{j,i+1}^{n+1}) + G_{j,i+1/2}^V}{d_{j,i+1/2}^V}, \quad (8)$$

где введенные выражения  $G_{j+1/2,i}^U$  и  $G_{j,i+1/2}^V$  известны, так как они зависят от скоростей с предыдущего шага  $n$ . Далее для получения необходимого уравнения для давления на  $n + 1$  шаге используем уравнение неразрывности (6). Учтявая его структуру, подставим значения соответствующих компонент скорости из (7), (8) в уравнение неразрывности (6). Тогда получим выражение, в котором неизвестными величинами являются лишь сеточные функции давления в узле с номером  $(j, i)$  и окружающих его соседних узлах. Выполнив простые преобразования, после группировки соответствующих слагаемых получим следующий конечно-разностный аналог для вычисления сеточных функций давления:

$$d_{j,i}^P P_{j,i}^{n+1} + c_1^P P_{j+1,i}^{n+1} + c_0^P P_{j-1,i}^{n+1} + b_1^P P_{j,i+1}^{n+1} + b_0^P P_{j,i-1}^{n+1} = f^P, \quad (9)$$

где свободный член  $f^P$  и коэффициенты дискретизации  $d_{j,i}^P, c_1^P, c_0^P, b_1^P, b_0^P$  известны.

Разностное уравнение для давления (9) является замаскированным уравнением Пуассона и

представляет собой систему линейных алгебраических уравнений. Полученная система уравнений движения (7)–(9) связывает значения давления и компонентов скоростей на  $(n + 1)$  временном слое и является фундаментальным результатом, представляющим универсальный дискретный аналог системы общих уравнений движения несжимаемой жидкости. Отметим, что уравнение Пуассона для давления фактически заменяет уравнение неразрывности и система уравнений оказывается замкнутой.

Для решения таких систем алгебраических уравнений разработаны эффективные итерационные методы. Например, уравнение Пуассона для давления решается методом покоординатного расщепления и использования метода прогонки.

## 5. ПРОЦЕДУРА РЕШЕНИЯ

В настоящем методе компоненты скорости и давления расщеплены так, что на любом этапе расчета решаются уравнения относительно одной зависимой переменной. Это упрощает применение стандартных методов решения систем линейных алгебраических уравнений полученного вида. Расчеты проводятся для двух основных физических переменных – скорость, давление. Итерационный вычислительный процесс состоит из шагов по времени. В начале каждого временного цикла предполагаются известными поля скорости и давления. Вычислительная процедура расчета каждого шага по времени разбивается на три этапа и выполняется в следующей последовательности. На первом этапе при заданных на предыдущем временном шаге значениях  $U_{j+1/2,i}^n$  и  $V_{j,i+1/2}^n$  по соответствующим алгебраическим формулам рассчитываются коэффициенты дискретизации  $d_{j+1/2,i}^U, d_{j,i+1/2}^V, d_{j,i}^P, c_1^P, c_0^P, b_1^P, b_0^P$  и выражения  $G_{j+1/2,i}^U(U^n, V^n), G_{j,i+1/2}^V(U^n, V^n)$ , включая свободный член  $f^P(j, i)$ . На втором этапе, зная коэффициенты уравнения Пуассона, путем его решения находится поле давления  $P_{j,i}^{n+1}$ . Далее, на третьем этапе, зная коэффициенты дискретизации и поле давления  $P_{j,i}^{n+1}$ , по уравнениям (7), (8) рассчитываются поля скорости  $U_{j+1/2,i}^{n+1}, V_{j,i+1/2}^{n+1}$  на  $(n + 1)$  шаге. На этом первый временной цикл заканчивается и далее он повторяется. Задача решается на установление. Критерием окончания решения служит заданное время счета или условие, когда максимальная разность между значениями искомых переменных на предыдущем и следующем временном шаге не превышает заданную величину ошибки  $\epsilon$ .

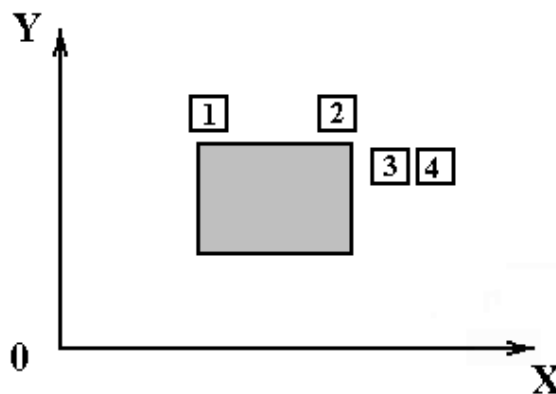


Рис. 2. Схема расположения реперных точек и их координаты:  
 № 1 –  $X=4.08; Y=5.08$ ; № 2 –  $X=4.72; Y=5.08$ ;  
 № 3 –  $X=5.16; Y=5.00$ ; № 4 –  $X=5.24; Y=5.00$

На каждом шаге по времени контролируется сходимость расчетов как основных уравнений, так и граничных условий. Алгоритм решения на установление позволяет получить как стационарное решение, так и исследовать динамику течений во времени.

Важным моментом расчетов является переход в граничных условиях для  $U$  и  $V$  к конечным разностям и контроль за выполнением уравнения неразрывности. Разработанный алгоритм решения эволюционной гидродинамической задачи для системы двумерных нестационарных уравнений Навье-Стокса реализован в виде оригинальной компьютерной программы UDAMEL (Universal Discrete Analogue Momentum Equation Liquid) на языке Фортран.

## 6. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ. СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ

С помощью разработанной программы была выполнена серия расчетов по определению полей скорости, давления и гидродинамических сил, действующих на обтекаемый безграничным потоком квадратный цилиндр при различных числах Рейнольдса ( $Re=50, 70, 100, 250, 500, 1000$ ) на равномерной сетке размером  $225 \times 500$ . Как и ожидалось, расчеты показали, что поле скоростей в зоне цилиндра, поле давления и коэффициенты гидродинамического сопротивления и подъемной силы зависят от числа Рейнольдса. В случае низких чисел Рейнольдса, меньших критического  $Re^*$ , реализуется стационарный режим обтекания квадратного цилиндра однородным безграничным по-

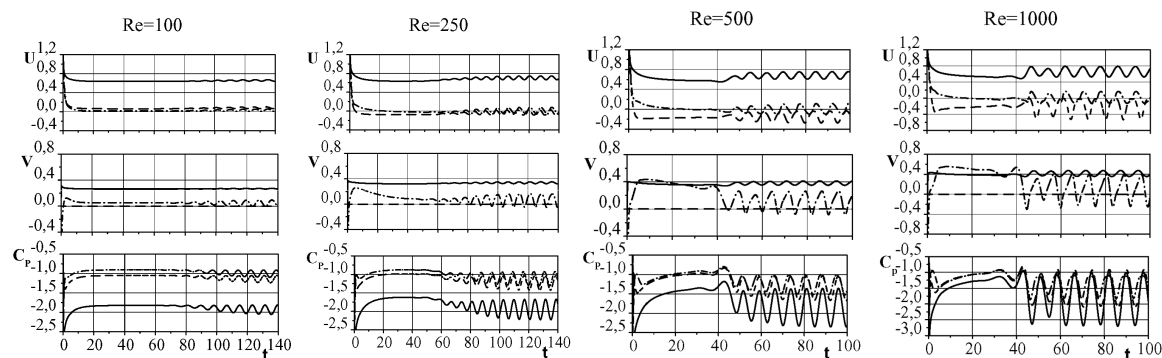


Рис. 3. Зависимость продольной  $U$ , вертикальной  $V$  скоростей и коэффициента давления  $C_p$  от времени при обтекании квадратного цилиндра для различных чисел Рейнольдса в трех реперных точках  $\longrightarrow 1$ ,  $-\ -$  2 и  $-\cdot-\cdot-$  3

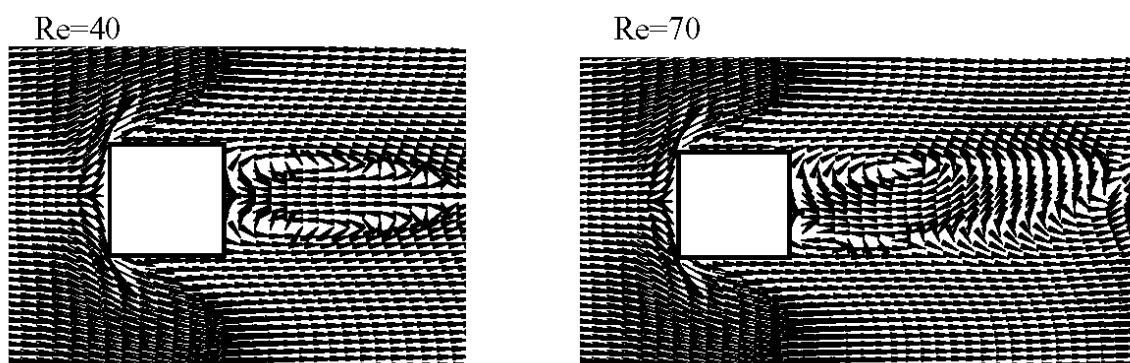


Рис. 4. Фрагменты векторного поля скоростей при обтекании квадратного цилиндра числах Рейнольдса  $Re=40$  и  $Re=70$  для  $\tau=140$

током. Экспериментальное подтверждение такого безотрывного режима обтекания отмечается в ряде работ [5]. Интересно отметить, что в случае обтекания кругового цилиндра критическое значение числа находится в диапазоне  $Re^* \approx (40 \dots 50)$  [8]. Для квадратного цилиндра критическое число Рейнольдса так однозначно не определено. По литературным источникам оно составляет порядок  $Re^* \approx (80 \dots 100)$ , но встречаются и другие оценки. Из экспериментов известно, что при числах  $Re > Re^*$  наблюдается явление отрыва и снос вихрей с задних кромок цилиндра, которые оказывают существенное влияние на режим обтекания, структуру полей скорости и давления, а следовательно, и на сопротивление обтекаемого тела и его подъемную силу.

В качестве первого примера результатов численных исследований рассмотрим изменение во времени локальных значений скоростей и коэффициентов давления  $C_p$  в четырех реперных точках по-

тока при различных числах Рейнольдса. Схема расположения реперных точек и их координаты приведены на рис. 2. Изучение характеристик потока было проведено при различных числах Рейнольдса в диапазоне  $40 \leq Re \leq 1000$ . Для наших целей характерными оказались точки № 1, 2, 3.

Результаты расчетов зависимости компонентов скорости  $U, V$  и коэффициента давления  $C_p$  от времени для трех реперных точек показаны на рис. 3. Анализ расчетных кривых подтверждает, что в зависимости от числа Рейнольдса наблюдаются два режима обтекания цилиндра. Первый – это стационарный режим, при котором значения параметров со временем выходят на постоянные значения. Этот режим наблюдается при числах Рейнольдса  $Re < Re^* = 70$ . С ростом числа Рейнольдса картина обтекания изменяется. Примеры динамики значений скоростей  $U, V$  и коэффициента давления  $C_p$  для чисел Рейнольдса  $Re=100, 250, 500, 1000$  приведены на четырех фрагментах рис. 3, из

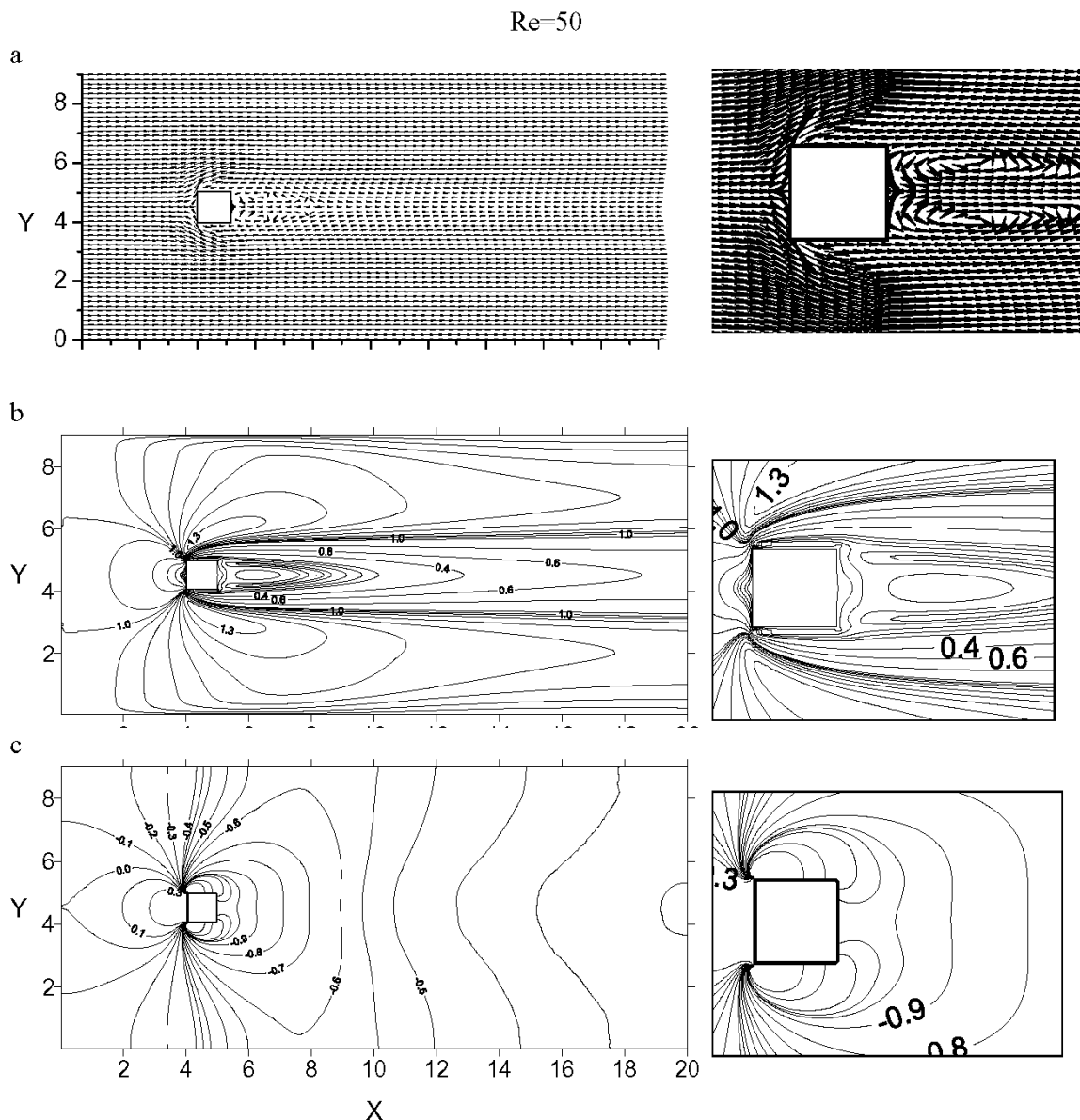


Рис. 5. Фрагменты векторного поля скоростей (а), их изолиний (б) и изолиний коэффициентов давления (с) при числе Re=50 для  $\tau=140$

которого видно, что с ростом числа Рейнольдса поведение параметров потока изменяется во времени вследствие потери устойчивости течения. При этом в рассматриваемых трех характерных реперных точках наблюдаются периодические осцилляции параметров потока. Они приводят к образованию вихрей на верхней и нижней горизонтальных стенках обтекаемого цилиндра. Далее эти вихри сносятся основным потоком и в следе за цилиндром развиваются периодические вихревые структуры, которые известны в литературе как вихре-

вые дорожки Кармана [3].

В качестве второго примера расчетов рассмотрим результаты установившегося обтекания квадратного цилиндра. На рис. 4 представлены фрагменты векторного поля скоростей при числах Рейнольдса Re=40 и Re=70. Анализ этих фрагментов показывает, что в следе за цилиндром характерно образование возвратного течения. При этом циркуляционная зона вытянута вдоль по течению и при Re=40 она еще симметрична, а при Re=70 симметрия нарушается и указывает на во-

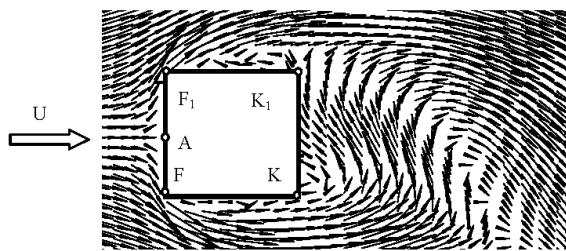


Рис. 6. Принципиальная схема нестационарного отрывного обтекания квадратного цилиндра ( $Re=100$ )

зникновение переходного режима. Впереди цилиндра поток тормозится и обтекает его без образования вихревых зон на передних кромках цилиндра.

Поскольку исходные уравнения движения записаны и решаются в переменных скорость–давление, то это позволяет в процессе решения задачи сразу определить и поле давления в виде изолиний коэффициентов давления  $C_p$ :

$$C_p = 2(p - p_1) / \rho u_0^2,$$

где  $p$  – локальное давление;  $p_1$  – характерное давление в невозмущенном потоке. Результаты расчетов полей давления представлены в виде изолиний коэффициентов давления.

С целью полноты представления результатов расчета для числа Рейнольдса  $Re=50$  на комплексном рис. 5 приведены изолинии коэффициентов давления совместно с расчетными фрагментами векторного поля скоростей и их изолиний. Характерным для этого режима является симметрия течения как в ближнем его следе, так и во всей зоне расположения цилиндра. Векторное поле скоростей и их изолиний дополняют друг друга и позволяют наглядно видеть структуру течения и поле давления при заданном числе Рейнольдса.

Результаты расчетов показывают, что такой стационарный режим обтекания наблюдается при числах  $Re < 70$  и согласуется с экспериментами. При этом полученные значения параметров потока при численном решении задачи выходят на постоянные значения, что свидетельствует об их асимптотической устойчивости. А вот при числе  $Re \geq 70$  наблюдается потеря стационарного режима обтекания. Средства компьютерной техники позволяют наглядно видеть формирование неустановившейся структуры течения с ростом числа Рейнольдса.

## 7. НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ПЕРИОДИЧЕСКИЙ РЕЖИМ ОБТЕКАНИЯ

Обратимся теперь к анализу результатов расчета в случае нестационарного отрывного обтекания квадратного цилиндра, то есть при числах  $Re > Re^*$ . Выше, на рис. 3 представлены расчетные зависимости от времени мгновенных значений скоростей  $U, V$  и коэффициента давления  $C_p$  в реперных точках № 1, 2, 3 для различных режимов обтекания. При этом в процессе расчетов никаких искусственных возмущений в поток не вводилось. Эти результаты расчетов согласуются с данными экспериментов [5] и с физической точки зрения объясняют влияние вихрей, образующихся при числах  $Re > Re^*$  на верхней и нижней горизонтальных границах квадратного цилиндра, на структуру течения в следе. На рис. 6 приведены результаты расчетов при числе  $Re=100$ , когда реализуется нестационарный режим обтекания.

Рассмотрим принципиальную схему нестационарного отрывного обтекания квадратного цилиндра, приведенную на рис. 6. Набегающий на цилиндр поток тормозится и давление в передней критической точке  $A$  достигает максимума. На участке поверхности цилиндра  $AF_1$  давление, по мере продвижения от точки  $A$  к точке  $F_1$ , снижается. В то же время, продольная скорость сразу за точкой  $F_1$  на верхней стенке цилиндра  $F_1K_1$  в пристенной области, в силу условия прилипания жидкости, убывает, тогда как давление в этой области растет. Поэтому вблизи стенки  $F_1K_1$  заторможенная жидкость не может далеко продвинуться в область повышенного давления между точками  $F_1$  и  $K_1$ , и где-то, не доходя до точки  $K_1$ , останавливается, а затем под действием положительного градиента давления жидкость в пристеночной области начинает двигаться в обратном направлении, увеличивая толщину пограничного слоя на участке  $F_1K_1$ . Если число  $Re > Re^*$ , то образовавшиеся вихри развиваются, и, достигнув определенных размеров, сносятся основным потоком и периодически срываются с задних угловых кромок цилиндра. После отрыва вихрей структура течения в следе сильно изменяется и становится нестационарной и несимметричной. Аналогичная картина течения имеет место и на нижней стенке квадрата  $FK$ . Рассмотренный процесс образования и отрыва вихрей с квадратного цилиндра приводит к появлению периодических вихревых структур в следе за цилиндром.

С целью более подробного изучения нестационарных режимов обтекания квадратного цилиндра была выполнена серия методических расчетов



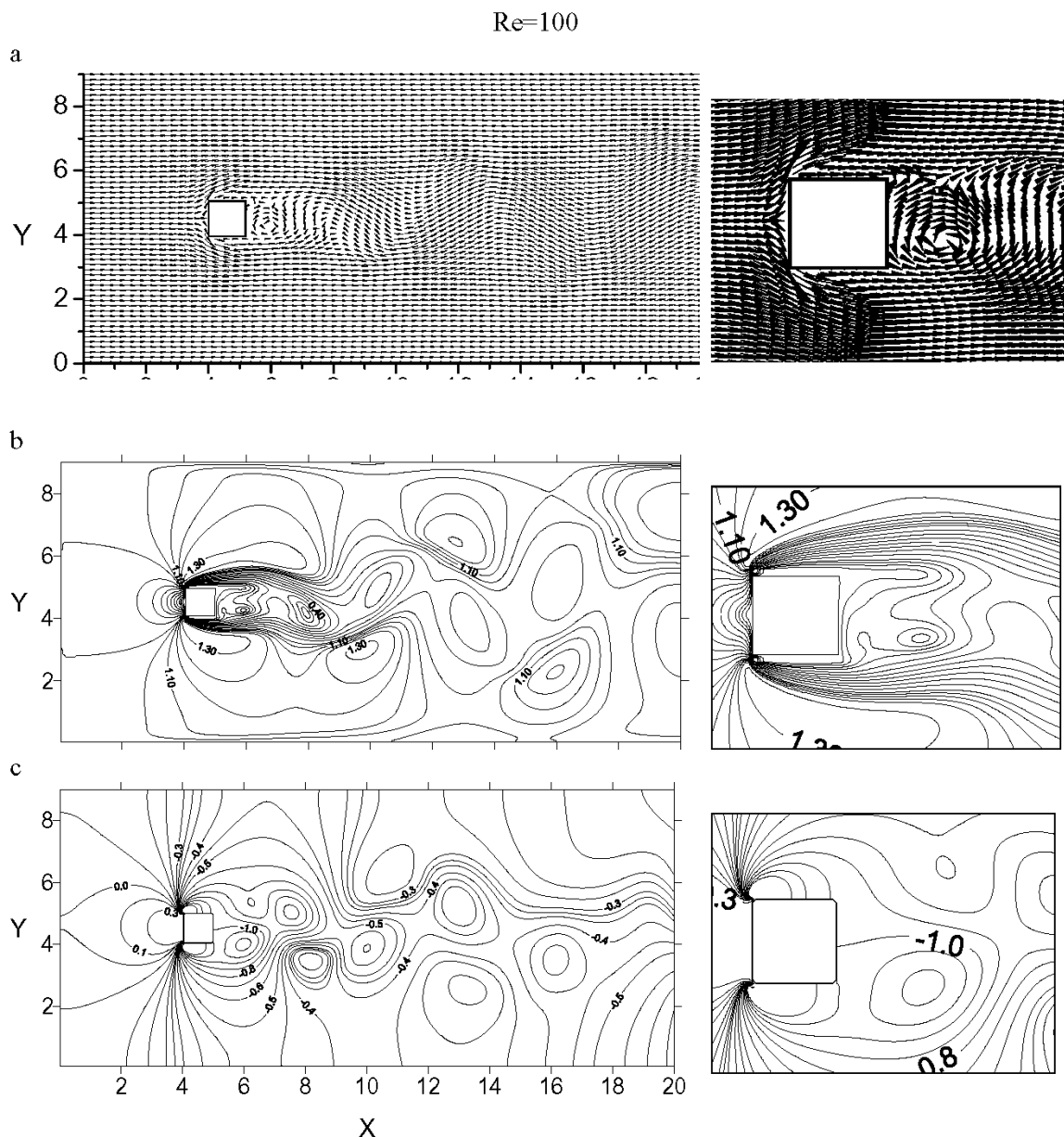


Рис. 7. Фрагменты векторного поля скоростей (a), их изолиний (b) и изолиний коэффициентов давления (c) при числе Re=100 для  $\tau=140$

при различных числах Рейнольдса.

На рис. 7 – 9 представлены результаты расчетов в виде фрагментов векторного поля скоростей, их изолиний и изолиний коэффициентов давления  $C_p$  в зоне обтекаемого квадратного цилиндра при трех числах Рейнольдса Re=100, Re=250 и Re=1000 соответственно. Эти рисунки наглядно демонстрируют изменение картины поля скоростей и давлений при трех рассматриваемых числах Рейнольдса, по сравнению с рис. 5 для случая ста-

ционарного режима обтекания, когда число Рейнольдса Re=50.

Их анализ показывает, что при числах Re=100, Re=250 и Re=1000 кинематическая структура течения в зоне за цилиндром качественно изменилась и уже не является симметричной. Рост числа Рейнольдса приводит к интенсивному срыву вихревых сгустков с верхней и нижней правых кромок цилиндра. При этом когда отрывается верхний вихревой сгусток, то нижний задерживается

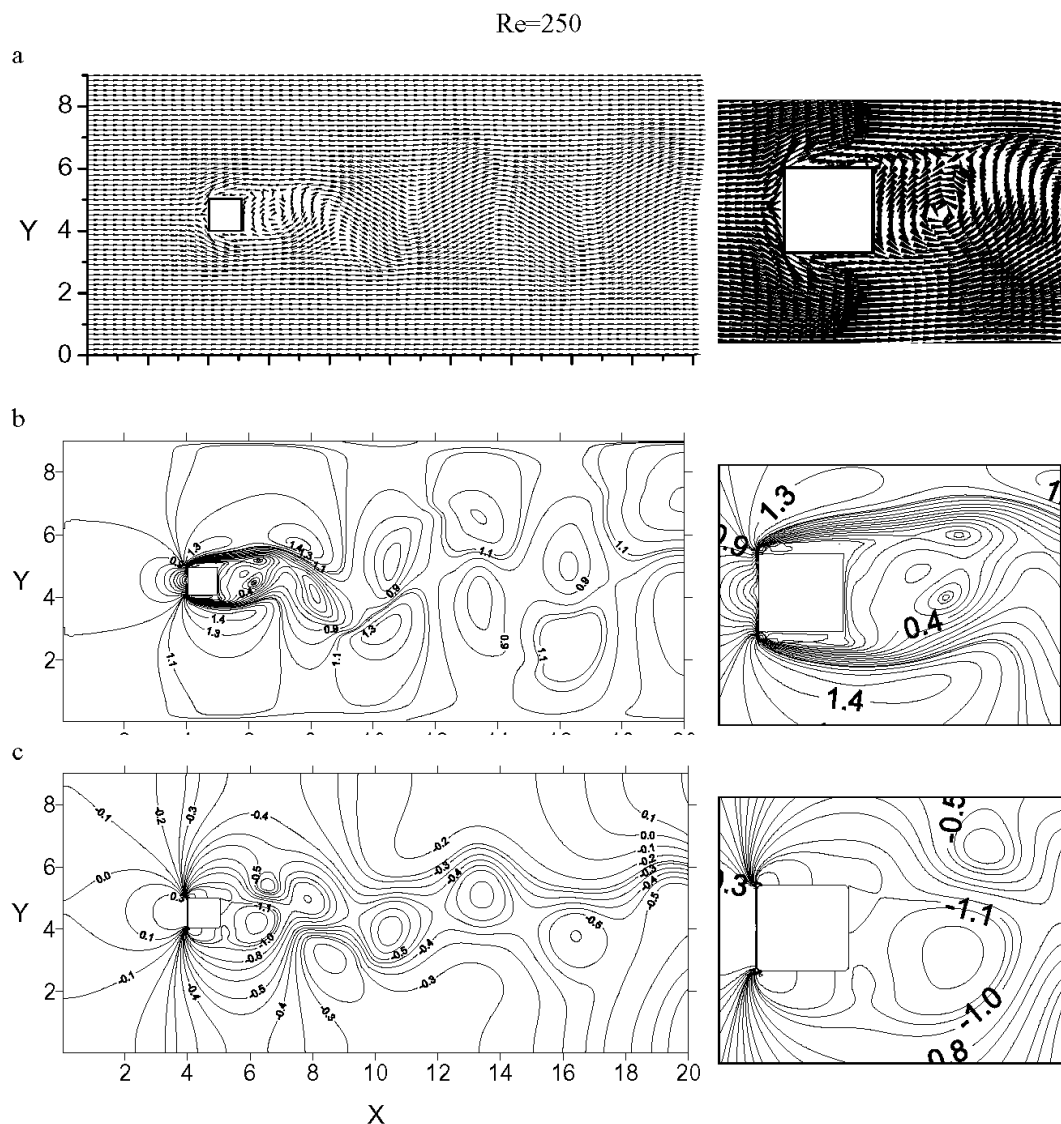


Рис. 8. Фрагменты векторного поля скоростей (а), их изолиний (b) и изолиний коэффициентов давления (с) при числе  $Re=250$  для  $\tau=140$

на некоторое время в донной области, увеличиваясь по размеру и смещаясь к осевой линии. Верхний вихрь вращается по часовой стрелке, а нижний – против нее.

Эта картина течения периодически повторяется, так как вихревые сгустки на верхней и нижней кромках цилиндра генерируются и срываются поочередно, а затем уносятся из донной области. Это приводит к возникновению периодического течения за цилиндром в виде так называемой вихревой дорожки Кармана, которая хорошо наблюдается в расчетах на рис. 7 – 9 и в экспериментах при визуализации течения [19]. С ростом числа Рейнольдса количество вихрей в следе увеличивается, а их

взаимодействие в ближней зоне приводит к росту вертикального размера следа.

Представленные на рис. 7 – 9 векторная картина течения и результаты расчетов в виде изолиний скоростей выразительно показывают особенности тонкой структуры отрывного течения и величину скорости в зоне расположения цилиндра при трех числах Рейнольдса. С удалением от цилиндра вихревые структуры вырождаются вследствие вязкости. Представленные выше результаты расчетов согласуются с другими данными, полученными средствами измерительной техники и визуализацией течения [5].

Чтобы лучше понять физический механизм пе-

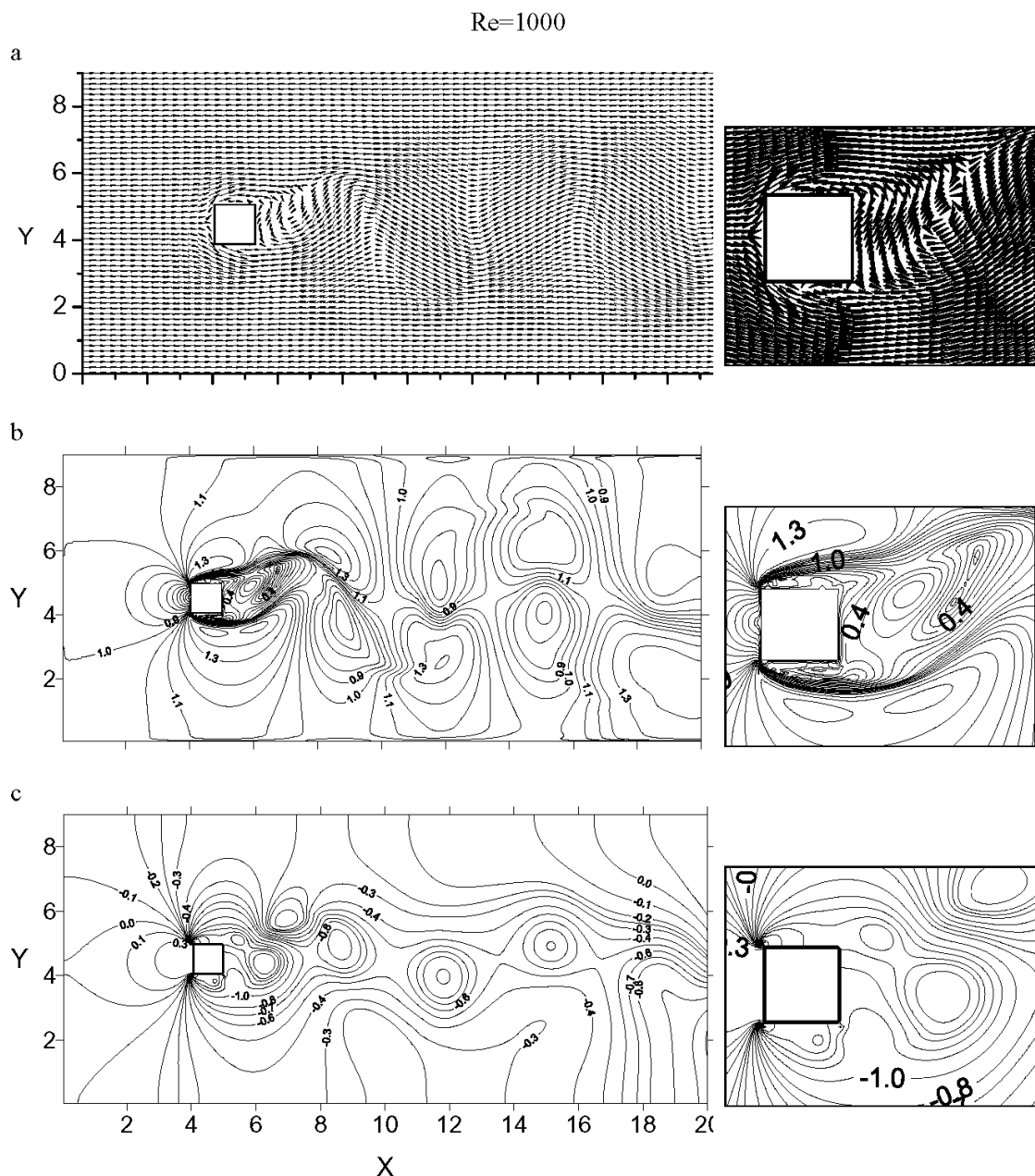


Рис. 9. Фрагменты векторного поля скоростей (a), их изолиний (b) и изолиний коэффициентов давления (c) при числе Re=1000 для  $\tau=100$

рестройки течения в следе за цилиндром, приводящий к асимметрии течения и образованию периодического вихревого следа, рассмотрим результаты расчета фрагментов векторных полей скорости (рис. 10, a) и их изолиний (рис. 10, b) в различные моменты времени  $\tau=(80\dots87)$  с интервалом  $\Delta\tau=1$  на одном периоде колебания параметров потока при числе Рейнольдса Re=1000.

Эти рисунки наглядно демонстрируют структу-

ру поля скоростей в течение одного периода колебания, обусловленного срывом вихря с правой верхней кромки цилиндра. Этот сход вихря приводит к разбалансированию структуры течения в следе. Первый фрагмент из рассматриваемой серии (a) (наверху слева рис. 10) относится к моменту времени  $\tau=80$ , когда на верхней стенке цилиндра происходит образование вихря. Затем этот вихрь развивается и увеличивает свои размеры

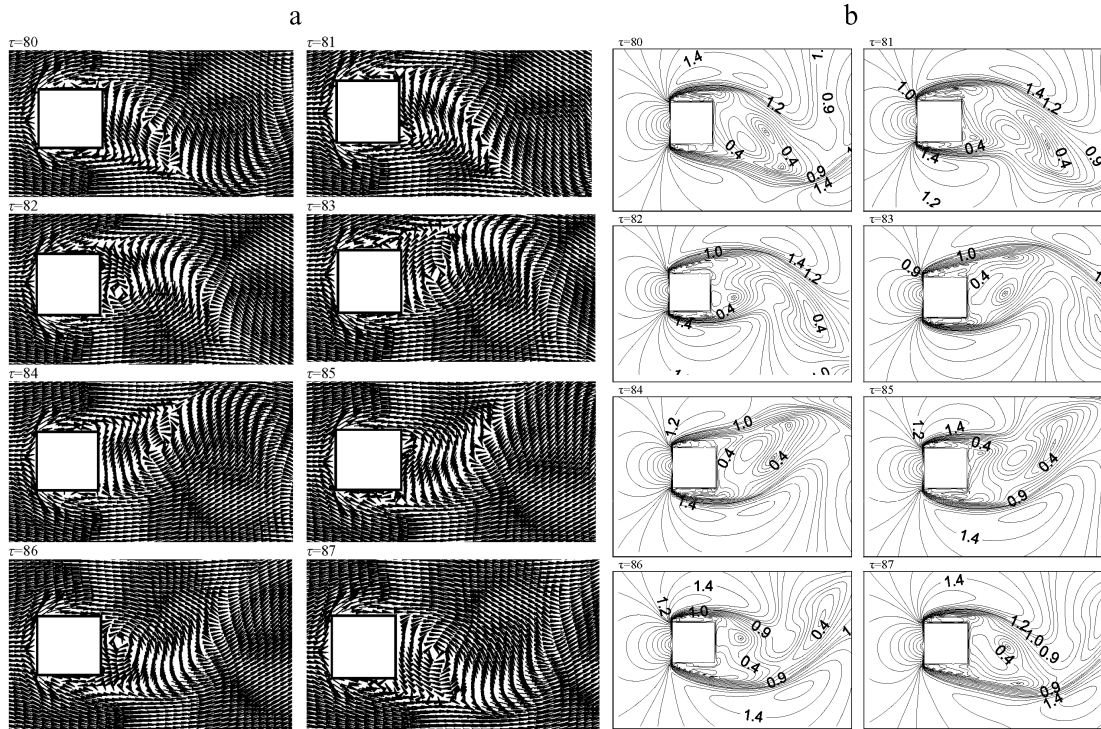


Рис. 10. Зависимость от времени векторного поля скоростей (а) и их изолиний (b) на интервале  $\tau_1=80$  до  $\tau_2=87$  с шагом  $\Delta\tau=1$  при обтекании квадратного цилиндра для числа  $Re=1000$

как по вертикали, так и по горизонтали навстречу основному потоку. Это заметно на верхнем фрагменте справа рис. 10, а, соответствующем моменту времени  $\tau=81$ .

На следующем, третьем фрагменте рис. 10, а для момента времени  $\tau=82$  уже видно вырождение сорвавшегося верхнего вихря и образование нового вихря в нижней части ближнего следа за цилиндром. Следующие фрагменты, представленные на рис. 10, а для других моментов времени  $\tau$ , иллюстрируют различные фазы эволюции вихрей, оторвавшихся с верхней и нижней кромок квадрата в моменты времени  $\tau=83, 84, 85, 86, 87$  соответственно. При числе  $Re=1000$  на фрагментах (а) и (b) рис. 10 хорошо видны вертикальные колебания параметров потока. Периодический сход вихрей практически повторяется во времени и приводит к автоколебаниям течения в следе за телом с частотой, равной частоте срыва вихрей.

## 8. ПОЛЕ ДАВЛЕНИЯ В ЗОНЕ ОБТЕКАНИЯ КВАДРАТНОГО ЦИЛИНДРА

В рассматриваемой задаче большой практический интерес представляет распределение давления в зоне расположения цилиндра. Наш метод, в

отличие от предшествующих работ, позволяет непосредственно рассчитывать поля давления как в зоне расположения цилиндра, так и на его поверхности.

В качестве примера расчетов полей давления на рис. 7, с и рис. 9, с показаны фрагменты распределения полей давления в зоне цилиндра в виде изолиний коэффициентов давления  $C_p$  при числах  $Re=100$ ,  $Re=250$  и  $Re=1000$ . Картина этих изолиний сложна и характерна для отрывных течений за плохообтекаемыми телами. Анализ рис. 7–9 позволяет выявить области низкого и высокого давления. Как и ожидалось, области высокого давления сильно коррелируют с областями, где жидкость тормозится, то есть там, где линии равных скоростей наименее уплотнены. Области низкого давления наоборот, соответствуют областям, где изолинии скоростей наиболее уплотнены, то есть скорости велики.

На расчетных графиках полей давления хорошо наблюдается развитие парных областей низкого и высокого давления, соответствующих каждому сорвавшемуся вихрю. Учитывая, что центры срывающихся вихрей двигаются со скоростью перемещения локальных минимумов давления [28], можно определить скорость переноса вихрей. В

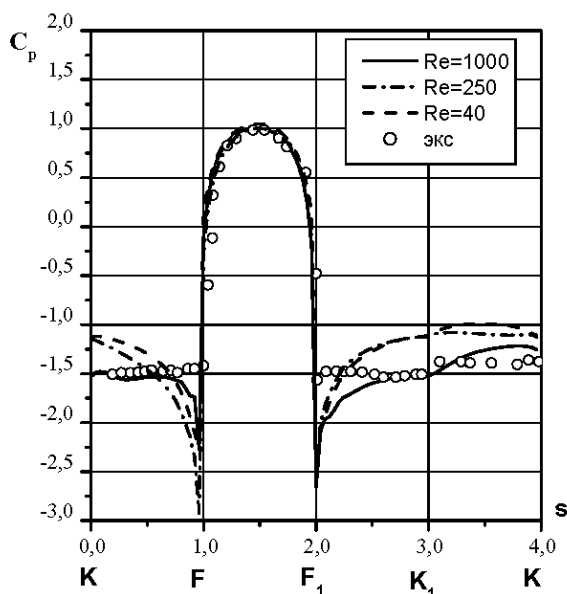


Рис. 11. Распределение давления  $C_p$  по поверхности цилиндра  $KFF_1K_1K$  при трех числах Рейнольдса  $Re=40, 250, 1000$ : кривые - расчет;  $\circ$  - эксперимент [29]

этом смысле картина распределения давления существенно дополняет информацию о динамике переноса вихрей.

В завихренной зоне позади кормовой части цилиндра давление значительно ниже давления в невозмущенном потоке. Это пониженное давление является причиной возникновения обратных течений в следе за цилиндром. Срывающиеся с концов цилиндра поочередно вихревые сгустки взаимодействуют с циркуляционным течением в следе и позади обтекаемого цилиндра возникает шахматная последовательность вихревых образований. Далее это нестационарное течение стабилизируется и выходит на устойчивый периодический режим, когда частота схода вихрей и амплитуда колебаний перестают меняться со временем.

## 9. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ОБТЕКАЕМЫЙ КВАДРАТНЫЙ ЦИЛИНДР

Моделирование отрывного обтекания квадратного цилиндра на основе системы полных нестационарных уравнений движения Навье-Стокса в переменных скорость-давление позволяет непосредственно рассчитать гидродинамические силы, действующие на обтекаемое тело. Величина полного гидродинамического сопротивления плохобтекаемых тел в основном определяется сила-

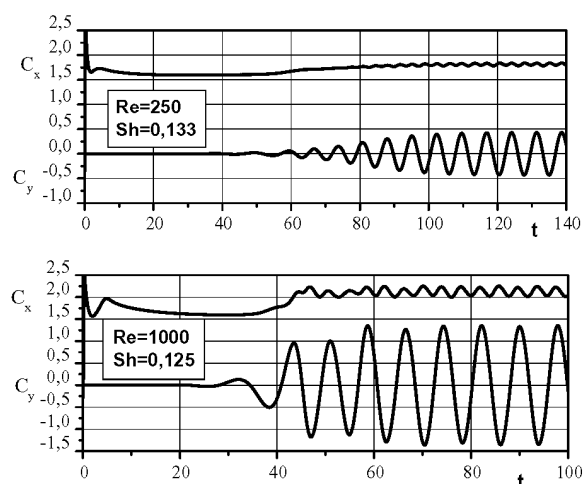


Рис. 12. Изменение во времени силы лобового сопротивления  $C_x$  и подъемной силы  $C_y$ , действующих на квадратный цилиндр при отрывном обтекании для  $Re=250, 1000$

ми давления. Для определения сил, действующих на обтекаемое тело, необходимо иметь эпюру распределения давления по поверхности цилиндра. Используемый численный метод позволяет определить все характеристики течения во всей расчетной области, включая распределение давления и силы трения по поверхности обтекаемого тела, однако лишь при малых и умеренных числах Рейнольдса. Давление в точке на поверхности тела обычно характеризуют коэффициентами давления.

Рассмотрим результаты расчета локальных значений коэффициента давления  $C_p$  по поверхности квадратного цилиндра. На рис. 11 представлено распределение давления  $C_p$  по поверхности цилиндра  $KFF_1K_1K$  при трех числах Рейнольдса  $Re=40, 250, 1000$ . Легко видеть, что на передней стороне  $FF_1$  коэффициент давления всюду положительный и в средней критической точке  $C_p=1$ . На остальных трех сторонах квадратного контура коэффициент давления отрицательный. На этом же рисунке для сравнения, наряду с численным расчетом, представлены экспериментальные данные, полученные в работе [29] при числах  $Re=3.3 \cdot 10^4$  и  $Re=6.6 \cdot 10^4$ . Из их сравнения видно, что теория и опытные данные хорошо согласуются между собой. Кроме того, здесь подтверждается гипотеза о слабой зависимости распределения давления по поверхности квадрата с острыми кромками от числа Рейнольдса.

Зная распределение давления по обтекаемому контуру тела легко определяются гидродинамиче-

ские силы сопротивления  $F_x$  и подъемной силы  $F_y$  согласно общей формулы [3]

$$\vec{F} = \int_{\sigma} \vec{P}_n d\sigma. \quad (10)$$

Как обычно, вместо компонентов сил  $F_x$ ,  $F_y$  введем в рассмотрение безразмерные гидродинамические коэффициенты сил сопротивления  $C_x$  и подъемной силы  $C_y$  в виде отношения значений сил  $F_x$ ,  $F_y$  к скоростному напору и характерной площади обтекаемого тела  $\Omega = l$ :

$$C_x = \frac{2F_x}{\rho u_0^2 \cdot l}; C_y = \frac{2F_y}{\rho u_0^2 \cdot l}. \quad (11)$$

Вычисление этих безразмерных интегральных характеристик в виде суммарного коэффициента профильного сопротивления  $C_x = C_{xp} + C_{xf}$  и подъемной силы  $C_y = C_{yp} + C_{yf}$  выполнялось по следующим формулам:

$$C_x = \int_{S_1} C(p_1) dy - \int_{S_3} C(p_3) dy + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \int_{S_2} \frac{\partial U_2}{\partial y} dx - \int_{S_4} \frac{\partial U_4}{\partial y} dx \right], \quad (12)$$

$$C_y = \int_{S_4} C(p_4) dx - \int_{S_2} C(p_2) dx - \frac{1}{\text{Re}} \left[ \int_{S_1} \frac{\partial V_1}{\partial y} dy - \int_{S_3} \frac{\partial V_3}{\partial y} dy \right]. \quad (13)$$

Здесь цифры у коэффициентов давления и скоростей обозначают номера ребер (границу) квадратного цилиндра  $S_i$ , на которых они вычисляются ( $S_1 = FF_1$ ,  $S_2 = F_1K_1$ ,  $S_3 = K_1K$ ,  $S_4 = KF$ )  $i = 1...4$ .

На рис. 12 представлено изменение во времени силы лобового сопротивления  $C_x$  и подъемной силы  $C_y$ , действующих на квадратный цилиндр при отрывном его обтекании при числах Рейнольдса  $\text{Re}=250, 1000$ . Нетрудно видеть, что эти коэффициенты зависят от времени, а с его увеличением их значения выходят на устойчивый периодический режим колебаний. При этом среднее значение коэффициентов  $C_x$  зависит от числа Рейнольдса. При  $\text{Re}=250$ , коэффициент  $C_x=1.81$ ; при  $\text{Re}=500$ , коэффициент  $C_x=1.95$ ; при  $\text{Re}=1000$ , коэффициент  $C_x=2.12$ .

Следует отметить, что значение коэффициента подъемной гидродинамической силы  $C_y$  колеблется возле нулевого значения с частотой, равной частоте срыва вихрей с поверхности цилиндра, что согласуется с известными теоретическими и экспериментальными данными [19]. Частота схода вихрей с кормовых кромок квадратного цилиндра

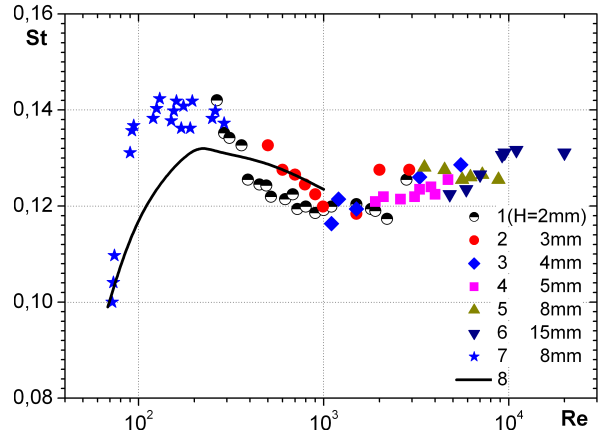


Рис. 13. Расчетная зависимость числа Струхали от числа Рейнольдса при обтекании квадратного цилиндра в сравнении с экспериментом (точки 1–6 – эксперимент в аэродинамической трубе и 7 – эксперимент в бассейне [30]; кривая 8 – расчет)

в единицу времени зависит от числа Рейнольдса  $\text{Re}=u_0 l / \nu$  и, согласно нашим расчетам, она появляется при числе  $\text{Re} \geq 70$ , а для числа  $\text{Re} \leq \text{Re}^*$  течение остается ламинарным и устойчивым. Безразмерную частоту срыва вихрей называют числом Струхали  $\text{Sh}=fl/u_0$ , где  $f$  – частота срыва. Частота колебаний коэффициента  $C_x$  в два раза больше, чем частота схода вихрей.

Результаты наших расчетов чисел Струхали при различных числах Рейнольдса приведены на рис. 13 сплошной линией. Там же значками показаны данные экспериментов, заимствованные из работы [30]. Видно, что в целом они хорошо согласуются. Однако автор работы [29] отмечает сложность сравнения опытных данных с другими работами ввиду отсутствия требуемых надежных данных. Часто измерения выполнены на цилиндрах с округленными кромками. Например, данные, приведенные в работе [30] по зависимости числа Струхали от Рейнольдса, отличаются от данных работы [19].

## ВЫВОДЫ

Настоящая работа посвящена развитию численного метода расчета параметров отрывного обтекания тел безграничной вязкой несжимаемой жидкостью в переменных скорость-давление. Данный метод позволяет глубже изучить механизм образования и эволюцию вихревых структур за плохобтекаемыми телами при малых и умеренных числах Рейнольдса. Показано, что для цилиндра с квадратной формой поперечного сечения в зависимости от числа Рейнольдса формируется как

стационарный, так и нестационарный режим обтекания, при котором структура течения за цилиндром носит периодический характер и имеет свои пространственные и временные масштабы, определяемые числом Струхала. В отличие от других методов, использующих переменные вихрь–функция тока, данный метод позволяет непосредственно определять поля скоростей, давления, гидродинамические силы сопротивления и подъемную силу. Результаты расчетов широко представлены в графическом виде, полученном с помощью стандартных компьютерных пакетов ORIGIN и SURFER.

1. Чжен П. Отрывные течения. В 3-х т. – М.: Мир, 1972-1973. – 934 с.
2. Гогиш Л. В., Степанов Г. Ю. Турбулентные отрывные течения. – М.: Наука, 1979. – 368 с.
3. Шлихтинг Г. Турбулентные отрывные течения. – М.: Наука, 1969. – 742 с.
4. Белов И. А., Исаев С. А., Коробков В. А. Задачи и методы расчета отрывных течений несжимаемой жидкости. – Л.: Судостроение, 1989. – 256 с.
5. Белоцерковский С. М., Котовский В. Н., Ништ М. И., Федоров Р. М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. – М.: Наука, 1988. – 132 с.
6. Белов И. А. Взаимодействие неравномерных потоков с преградой. – М.: Машиностроение, 1983. – 166 с.
7. Приходько А. А. Компьютерные технологии в аэрогидродинамике и тепломассообмене. – Киев: Наук. думка, 2003. – 382 с.
8. Гушин В. А. Численное исследование отрывных течений вязкой жидкости около цилиндра. Стационарный и периодический режимы. – М.: ВЦ АН СССР, 2085. – 62 с.
9. Приходько А. А., Редчиц Д. А. Численное моделирование нестационарного течения в следе за цилиндром на основе уравнений Навье-Стокса // Прикл. гідромеханіка. – 2005. – 7, № 1. – С. 56–71.
10. Белоцерковский О. М., Белоцерковский С. О., Гушин В. А. Численное моделирование нестационарного периодического течения вязкой жидкости в следе за цилиндром // ЖВМ и МФ. – 1984. – 24, № 10. – С. 1207–1216.
11. Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред. – М.: Наука, Физматлит, 1984. – 519 с.
12. Сарпайка Т., Ириг А. Внезапно начинающееся течение около прямоугольной призмы. Эксперимент и модель дискретных вихрей. Теоретические основы инженерных расчетов // Труды Америк. об-ва инж.-мех. – 1986. – 1. – С. 198–213.
13. Lighthill M. J. Laminar boundary layers. Chap. II. – London: Oxford University Press, 1963. – 355 p.
14. Wang C. M., Wu J. C. Numerical solution of steady Navier-Stokes problems using integral representations // AIAA J. – 1986. – 8. – P. 1305–1312.
15. Nagano S., Naito M., Takata H. A numerical analysis of two-dimensional flow a rectangular prism by a discrete vortex model // Computers and Fluids. – 1982. – 10. – P. 243–259.
16. Марцинковски В., Шкадов В. Я. Численное исследование двумерного отрыва на основе уравнений Навье-Стокса // Механика жидкости и газа. – 1985. – 1. – С. 26–32.
17. Горбань В. О., Горбань И. М. Вихревая структура потока при обтіканні квадратної призми: числова модель // Прикл. гідромеханіка. – 2005. – 7, № 2. – С. 8–26.
18. Fromm J. E., Harlow F. H. Numerical solution of the problem of vortex street development // Phys. Fluids. – 1963. – 6. – P. 975–982.
19. Davis R. W., Moor E. F. A numerical study of vortex shedding from rectangles // J. Fluid Mech. – 1982. – 116. – P. 475–506.
20. Рокуэлл Д. О. Упорядочные пульсации течения около цилиндра квадратного поперечного сечения // Теоретические основы инженерных расчетов. – 1977. – № 3. – С. 175–196.
21. Бруязцкий Е. В., Костин А. Г., Никифорович Е. И., Розумнюк Н. В. Метод численного решения уравнений Навье-Стокса в переменных скорость–давление // Прикл. гідромеханіка. – 2008. – 10, № 2. – С. 13–23.
22. Харлоу Ф. Х. Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики // Вычислительные методы в гидродинамике. – М.: Мир, 1967. – 342 с.
23. Бруязцкий Е. В., Костин А. Г. Численное исследование течения жидкости в закрытой прямоугольной полости с движущейся верхней крышкой // Прикл. гідромеханіка. – 2009. – 11, № 1. – С. 3–15.
24. Бруязцкий Е. В., Костин А. Г., Никифорович Е. И. Численное исследование полей скорости и давления в плоском канале при наличии на его стенке квадратного препятствия // Прикл. гідромеханіка. – 2011. – 13, № 3. – С. 33–47.
25. Бруязцкий Е. В., Костин А. Г. Прямое численное моделирование течения в плоском внезапно расширяющемся канале на основе уравнений Навье-Стокса // Прикладна гідромеханіка. – 2010. – 12, № 1. – С. 11–27.
26. Spalding D. B. A novel finite difference formulation for expressions involving both first and second derivatives // Int. J. Number. Methods in Engineering. – 1972. – 4. – P. 551–559.
27. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.
28. Perry A. E., Chong M. S., Lim T. T. The vortex shedding process behind two-dimensional bluff bodies // J. Fluid Mech. – 1982. – 116. – P. 77–90.
29. Случановская З. П. Распределение давления по поверхности прямоугольного, трехгранного и полукруглого цилиндров и их аэродинамические коэффициенты // Сб. научных трудов Института механики МГУ. – 1973. – № 24. – С. 52–60.
30. Okajima A. Strouhal numbers of rectangular cylinders // J. Fluid Mech. – 1982. – 123. – P. 379–398.