УДК 532.5

О ФОРМЕ СУДНА НАИМЕНЬШЕГО СУММАРНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

В. Г. СИЗОВ

Одесская национальная морская академия

Получено 21.06.2010

Рассматривается задача о форме судна заданного водоизмещения, имеющего при заданной скорости наименьшее сопротивление, состоящее из суммы сопротивления трения и волнового сопротивления, выражаемого интегралом Мичелла. Решение получено в виде линейного неоднородного интегрального уравнения третьего рода, имеющего единственное решение, которое непрерывно.

Розглядається задача про форму судна із заданою водотоннажністю, яке при певній швидкості має найменший опір, який є сумою хвильового опору, що визначається інтегралом Мічела, та опору тертя. Задачу зведено до пошуку єдиного неперервного розв'язку лінійного неоднорідного інтегрального рівняння третього роду.

A study of ship's form having minimum resistance (friction and wave resistance) at a given displacement and at a certain speed is considered and expressed by means of Mitchell Integral. The solution is found in the form of a linear non-homogeneous integral equation of the third kind and having one only solution of continuity.

Необходимо отметить, что задача о волновом сопротивлении судна изучалась многими авторами, [см., например 2–6]. Как было показано в докладе М. Г. Крейна [1], задача об определении формы судна, которой отвечает наименьшее мичеллевское сопротивление при заданной скорости v, диаметральной области D и водоизмещении V, приводит к вырожденным формам, выражаемым либо обобщенными функциями, либо функциями с особенностями.

Иная картина получается, если рассматривается соответствующая задача на минимум для суммарного сопротивления, состоящего из мичелловского сопротивления R_w:

$$R_w = \iint\limits_{DD} K\,(x,\, z,\, \xi,\, \zeta) f\,(x,\, z)\, f\,(\xi,\, \zeta)\ dx\, dz\, d\xi\, d\zeta, \tag{1}$$

и сопротивления трения R_f, относительно которого принимается, что оно пропорционально смоченной поверхности D и коэффициенту сопротивления c:

$$R_f = 2\, c \int\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}\ dx\, dz, \tag{2}$$

где x и z – продольная и вертикальная координаты; поверхность судна задается уравнением

$$y = \pm f\,(x,\, z)\,.$$

Ядро, входящее в выражение (1), определяется по формуле

$$K\,(x,\, z,\, \xi,\, \zeta) = \frac{4\,\rho\, g^2}{\pi\, v^2}\ I\,(x - \xi,\ z + \zeta)\,, \tag{3}$$

где ρ – плотнось жидкости; g – гравитационная постоянная; v – скорость;

$$I\,(x,\, z) = \int\limits_1^\infty e^{-\frac{g\,z}{v^2}\,\lambda^2} \cos\left(\frac{g\,x}{v^2}\ \lambda\right)\ \frac{\lambda^4\; d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}.$$

Таким образом, если известно ядро $K(x,\, z,\, \xi,\, \zeta)$ и форма поверхности судна $(f(x,\, z)$, то можно вычислить мичелловское сопротивление R_w. В пределах точности, с которой интеграл R_w выражает волновое сопротивление, можно принять

$$R_f = 2\, c\, D + c \int\limits_D \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dz. \tag{4}$$

Таким образом, для общего сопротивления $R = R_f + R_w - 2\, c\, D$ с учетом формулы (4) получается выражение

$$R = c \int\limits_D \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dz + \tag{5}$$

$$+ \iint\limits_{DD} K\,(x,\, z,\, \xi,\, \zeta) f\,(x,\, z)\,(\xi,\, \zeta)\ dx\, dz\, d\xi\, d\zeta.$$

В дальнейшем для определения общего сопротивления R по формуле (5) приведены постановки двух задач.

Задача 1. Задана скорость v, область D и водоизмещение V:

$$V = 2 \int\limits_D f\,(x,\, z)\, dx\, dz. \tag{6}$$

Требуется найти форму судна, которая давала бы наименьшее суммарное сопротивление R. Иными словами, найти неотрицательную функцию $f\,(x,\,z)$, обращающуюся в нуль на подводной границе области D, для которой интеграл R достигал бы наименьшего значения, при условии (6).

Временно отбросим требование неотрицательности функции $f\,(x,\,z)$. Тогда известные правила определения минимума квадратичного функционала, при дополнительном линейном условии, позволяют утверждать, что искомый минимум реализуется на функции $f_{\min}$, которая с точностью до скалярного множителя совпадает с функцией f_1, определяемой из следующей интегро-дифференциальной краевой задачи:

$$\begin{cases} -c\,\Delta f_1 + \int\limits_D K\,(x,\,z,\,\xi,\,\zeta)\;\; f_1\,(\xi,\,\zeta)\;\; d\xi\, d\zeta = \gamma\,; \\ f_1\,|_{\Gamma_+} = 0; \qquad \dfrac{\partial f_1}{\partial z}\,|_{\Gamma_0} = 0, \end{cases} \tag{7}$$

где $\gamma-$ удельный вес жидкости; Γ_+ – подводная часть границы области D; Γ_0 – часть границы области D, лежащая на свободной поверхности.

В правой части уравнения (7) можно было бы поставить любую постоянную (например, единицу), однако введена величина γ с тем, чтобы размерность f_1 была размерностью длины. Часть границы области D, лежащая на свободной поверхности, будет отсутствовать, если судно подводное.

Функция $f_{\min}$ связана с f_1 соотношением:

$$f_{\min} = \frac{V}{V_1}\; f_1, \tag{8}$$

где

$$V_1 = 2\int\limits_D f_1\,(x,\,z)\;\; dx\, dz,$$

а $R_{\min}$ с учетом выражения (8) находится по формуле:

$$R_{\min} = \frac{\gamma}{2}\;\left(\frac{V}{V_1}\right)^2. \tag{9}$$

Обозначим через $g\,(x,\,z,\,\xi,\,\zeta)$ функцию Грина оператора $-\Delta$, отвечающую граничным условиям в (7). С помощью нее интегро-дифференциальное уравнение (7) преобразуется в интегральное уравнение

$$f_1 + \frac{1}{c} G\; K\; f_1 = \frac{\gamma}{c}\; G\; u; \qquad [u\,(x,\,z) \equiv 1]\,, \tag{10}$$

где через G и K обозначены интегральные операторы, порождаемые ядрами g и K соответственно.

Как видно из выражения (3), ядро K зависит от величины g/v^2.

Уравнение (9) является линейным неоднородным уравнением III рода с регулярным ядром. Легко видеть, что соответствующее однородное уравнение имеет единственное нулевое решение. Поэтому уравнение (9) имеет единственное решение, которое непрерывно. Если это решение оказывается неотрицательным, то оно и будет единственным решением поставленной задачи 1.

В том случае, когда это решение принимает и отрицательные значения, получается осложнение такого же рода, как и в задаче, рассмотренной в [1]. Физический смысл этого, так же как и в [1], заключается в том, что наименьшее суммарное сопротивление достигается при реализации заданного водоизмещения в виде двух или целого каравана судов. Можно строго доказать, что для подводных судов при достаточно малом коэффициенте трения c такой случай будет иметь место.

Может ли иметь место такой случай для надводного судна? Этот вопрос остается открытым, как и аналогичный вопрос в [1].

С аналитической стороны задача 1 упрощается, если заранее принять, что судно имеет биподобную форму и форма шпангоутов задана с точностью до подобия.

В этом случае форма поверхности судна имеет вид:

$$y = \varphi\,(x)\;\; \psi\,(z)\,, \tag{11}$$

$$\left(H \le z \le H + T, \quad -\frac{L}{2} \le x \le \frac{L}{2}\right),$$

где функция $\psi\,(z)$ $\;--$ задана.

Задача 2. Задана скорость v, функция $\psi\,(z)$ $(H \le z \le H+T)$, длина судна L и площадь ватерлинии

$$S = 2\int\limits_{-l}^{l} \varphi\,(x)\; dx; \quad \left(l = \frac{L}{2}\right). \tag{12}$$

Требуется найти форму ватерлинии (т. е. неотрицательную функцию $\varphi\,(x)$), для которой сопротивление R принимает возможно меньшее значение.

Если отбросить условие неотрицательности функции $\varphi\,(x)$, то она будет определяться из интегро-дифференциальной краевой задачи:

$$-A\;\frac{d^2\varphi}{dx^2} + B\;\varphi + \frac{4\rho\; g^3}{\pi\; v^6\; c}\times \tag{13}$$

$$\times \int\limits_{-l}^{l} K_\psi\,(x-\xi)\;\varphi\,(\xi)\;\; d\xi = \text{const},$$

$$\varphi(-l) = \varphi(l) = 0, \tag{14}$$

где

$$A = \int\limits_H^{H+T} \psi^2(z)\, dz; \quad B = \int\limits_H^{H+T} \left[\frac{d\psi(z)}{dz}\right]^2 dz;$$

$$K_\psi(x) = \int\limits_1^\infty \Psi^2(\lambda) \;\; \cos\frac{g\,x}{v^2}\lambda \;\; \frac{\lambda^4\, d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-1}};$$

$$\Psi(\lambda) = \int\limits_H^{H+T} \psi(z) \;\; e^{-\frac{g\,z}{v^2}\lambda^2}\, dz,$$

а const в уравнении (13) определяется из условия (12).

Тем же приемом, который был применен в задаче 1, краевую задачу (12) можно преобразовать в линейное интегральное уравнение Фредгольма III рода:

$$\varphi + \lambda\, G_1\, K_\psi\, \varphi = \mathrm{const}\; G_1\; u, \tag{15}$$

где

$$\lambda = \frac{4\rho\, g^3}{\pi\, v^6\, c};$$

K_ψ и G_1 – интегральные операторы, порождаемые ядрами $K_\psi(x-\xi)$ и $g_1(x,\xi)$, причем $g_1(x,\xi)$ является функцией Грина дифференциального оператора $-A\dfrac{d^2}{dx^2} + B$, отвечающей граничным условиям

$$\varphi(-l) = \varphi(l) = 0.$$

В отличие от функции Грина g, функция g_1 вычисляется элементарно. Если решение этого интегрального уравнения будет неотрицательным, то оно и будет решением задачи 2, определяющим искомую форму ватерлинии.

Если же решение уравнения (15) будет знакопеременным, то это будет означать, что вступает в силу обстоятельство, отмеченное выше в задаче 1.

В общем случае функция φ будет определяться из условия неотрицательности, условия (13) и из равенства-неравенства, получающегося из (12) заменой знака "$=$" на знак "$\geq$" с дополнительным требованием, что в каждой точке x, в которой $\varphi(x) > 0$, имеет место знак "$=$".

1. *Крейн М. Г.* О форме судна наименьшего мичеллевского сопротивления. – Сборник "Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике", Москва, 23.01 – 3.02.1960 г. Аннотации докладов.
2. *Michell J.H.* The wave resistance of a ship // Phil. Mag.– 1898.– N 45.– P. 106–123.
3. *Кочин Н.Е.* О волновом сопротивлении и подъемной силе действующих на тела погруженные в жидкость. – Труды конференции по теории волнового сопротивления – М., 1937 – с. 65-134.
4. *Костюков А.А.* Теория судовых волн и волнового сопротивления.– М.: Судпромгиз, 1959.– 311 с.
5. *Peters A.A.* A new treatment of the ship wave problems // Communications on pure and applied mathematics.– 1949.– N 2.– P. 123-148.
6. *Сизов В. Г.* О краевой задаче в работе Мичелла о волновом сопротивлении судна // Прикл. гідромеханіка.– 2005.– Т. 7, N 2.– P. 73–75.