

УДК 532

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УЕДИНЕННЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ И ВНУТРЕННИХ ВОЛН С БЕРЕГОВЫМИ СКЛОНАМИ

В. И. НИКИШОВ, И. Т. СЕЛЕЗОВ, В. В. ХОМИЦКИЙ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 14.10.2010

Рассматриваются особенности процессов взаимодействия поверхностных и внутренних уединенных волн с наклонным берегом. Приведены результаты измерений коэффициентов отражения по амплитуде и по энергии. Показано, что с увеличением угла эти коэффициенты быстро растут для пологих склонов. Для достаточно крутых склонов скорость роста существенно снижается. Отмечается, что указанные особенности поведения коэффициентов отражения связаны с различными механизмами, которые управляют процессами отражения.

Розглядаються особливості процесів взаємодії поверхневих та внутрішніх відокремлених хвиль із похилим берегом. Приведено результати вимірювань коефіцієнтів відбиття по амплітуді та по енергії. Показано, що зі збільшенням кута ці коефіцієнти швидко зростають для пологих схилів. Для достатньо крутих схилів швидкість зростання суттєво знижується. Відмічено, що зазначені особливості поведінки коефіцієнтів відбиття пов'язані з різними механізмами, що керують процесами відбиття.

Features of the processes of interaction of surface and internal solitary waves with slope are considered. The results of the measurements of amplitude and energy coefficients of reflection are represented. It is shown that these coefficients rapidly grow with the increase of angle for gentle slopes. The growth rate considerably decreases for sufficiently steep slopes. Notes, the mentioned features of behavior of coefficient reflection are connected with different mechanisms that control the processes of reflection.

ВВЕДЕНИЕ

Задача о накате поверхностных гравитационных волн на наклонный берег привлекала много исследователей (математиков и физиков) давно (см. Стокер, 1959) [48] и рассматривалась в основном в линейной постановке, обнаруживающей только то, что потенциал скоростей может быть очень большим у линии берега, т. е. иметь математическую сингулярность. В реальных условиях такая задача существенно нелинейная, так как накат волн сопровождается сильным проявлением нелинейных и других эффектов:

- опрокидыванием волн;
- растеканием волн;
- турбулентностью;
- аэрацией.

В последнее время проводится численное моделирование на основе более адекватных натурным условиям моделей, и это видно из нижеприведенного обзора.

Известно, что уединенные волны могут возникать как на свободной поверхности морской среды, так и на глубинных горизонтах, причем внутренние уединенные волны особо наглядно проявляются при наличии резкой границы раздела сред с разными значениями плотности и других свойств (температура, соленость).

Поверхностные волны. Изучение процессов взаимодействия поверхностных уединенных волн с береговыми склонами важно для разработки методов оценки величин наката волн, их обрушения, воздействия на береговые сооружения, переноса донных наносов и др. Особый интерес к изучению этих процессов обусловлен тем, что основные особенности процесса распространения и взаимодействия уединенной поверхностной волны со склоном подобны аналогичным характеристикам взаимодействия волн цунами с береговыми склонами. Под волнами цунами принято понимать поверхностные гравитационные волны, возникающие вследствие крупномасштабных возмущений малой длительности [1, 2]. Существуют три основные источника генерации волн цунами: подводные землетрясения, извержения подводных вулканов, оползни и падение крупных горных масс в воду. В результате их действия на поверхности жидкости формируется система волн, которые, как правило, являются линейными волнами на глубокой воде. По мере продвижения к берегу происходит уменьшение длины волны и укрупнение волн за счет нелинейных эффектов при входе в область мелкой воды, и в результате эти волны могут двигаться к береговой линии в виде ондулярного или турбулентного бора. Существует и другой режим движения волн цунами, когда происходит плавное затопление береговой зоны без возникновения высоких

скоростей жидкости. Режим волн цунами вблизи береговой зоны определяется, в основном, характеристиками падающей волны и батиметрией донной поверхности.

Другое принципиальное отличие от линейной теории длинных волн заключается в эффекте дисперсии, когда скорость распространения волны зависит от ее длины. При учете дисперсии возникает проблема нестационарного поведения волны при подходе к береговой линии, когда под влиянием дисперсии и нелинейности гладкая поверхность длинной волны становится взволнованной. Развитие этих возмущений приводит к распаду длинной волны в серию уединенных волн.

Изучению взаимодействия нелинейных уединенных поверхностных волн с береговыми склонами посвящено достаточно большое количество теоретических и экспериментальных работ. Среди них отметим работы, в которых рассмотрен процесс взаимодействия волн с вертикальной стенкой. В работе [3] изучено лобовое столкновение двух слабо нелинейных идентичных уединенных волн, распространяющихся в противоположных направлениях. Пренебрегая эффектами вязкости и поверхностного напряжения, автор показал, что максимальный подъем свободной поверхности равен $\zeta/h = 2\varepsilon + 0.5\varepsilon^2$, где h – глубина потока; $\varepsilon = a/h$, a – амплитуда волны. Отметим, что аналогичное выражение получено в работе [4], исходя из условия сохранения инвариантов Римана вдоль характеристик. Видно, что величина подъема превышает удвоенную амплитуду волны. Отмечено, что при лобовом столкновении процесс взаимодействия аналогичен процессу отражения уединенной волны от вертикальной стенки, если не принимать во внимание вязкие эффекты.

В работе [5] представлены результаты экспериментальных исследований столкновения двух уединенных волн одинаковой амплитуды. Несмотря на некоторый разброс данных, четко показано, что вывод работы [3] о превышении максимальным подъемом свободной поверхности удвоенной амплитуды волны имеет экспериментальное подтверждение. В этой же работе обнаружен пространственный фазовый сдвиг в волновых траекториях: отраженная волна приходит в точку наблюдения из некоторого виртуального начала, которое находится за стенкой. Другими словами, она достигает точки наблюдения с некоторым запаздыванием. Автор отмечает, что этот результат содержится в решении, представленном в [3].

Используя метод возмущений с учетом членов третьего порядка малости по величине ε , в работе [6] проведено уточнение выражений, описыва-

ющих величину максимального подъема и фазовый сдвиг. Эти же авторы в работе [7] путем численного интегрирования уравнения Гарднера (см. [8]) показали, что в результате столкновения двух уединенных волн одинаковой амплитуды формы волн становятся асимметричными, и, кроме того, было обнаружено возникновение дисперсионного “хвоста” малой интенсивности. В результате потери энергии амплитуда волны уменьшается, хотя и не намного: для $\varepsilon = 0.5$ амплитуда уменьшается не более, чем на 2%. Это свидетельствует, что столкновение уединенных волн является неупругим, поскольку появляется слабый пространственный фазовый сдвиг и возникают потери энергии на формирование вторичных волн.

В работе [9] для решения полностью нелинейных уравнений Эйлера использован метод разложения решения в ряд Фурье. В случае, когда авторы ограничивались членами третьего порядка малости по амплитуде, результаты расчета максимального подъема свободной поверхности полностью согласуются с результатами работы [6]. Показано, что пространственный фазовый сдвиг зависит от положения точки наблюдения, приведены рекомендации относительно выбора области, в которой целесообразно устанавливать регистрирующую аппаратуру, в частности, положение датчика должно быть выбрано в пределах $15 < x/h < 35$, что согласуется с результатами работы [7].

Результаты лабораторных исследований отражения уединенных волн приведены в работе [10]. Отмечено, что имеют место неустановившиеся потери энергии отраженной волны при ее распространении от стенки, что находится в соответствии с результатами работ [6, 9]. Следует заметить, что пространственный фазовый сдвиг оказался значительно меньше, чем получено в работе [5]. Авторы пришли к заключению, что фазовый сдвиг сильно зависит от условий эксперимента.

Представляют интерес результаты работы [11], в которой рассмотрены потери энергии уединенных волн при столкновении. Показано, что на большом расстоянии от точки столкновения асимптотически потери энергии составляют величину порядка $O(\varepsilon^5)$.

В работе [12] на основе метода граничных интегральных уравнений, использованного для решения полных уравнений Эйлера, выполнено численное моделирование процесса взаимодействия нелинейных уединенных волн с вертикальной стенкой. Основное внимание сконцентрировано на изучении особенностей поведения волны вблизи стенки. Показано, что для волн большой амплитуды фазовый сдвиг не является пространственно

независимым. Рассчитанная величина максимального подъема свободной поверхности согласуется с результатами работы [9]. Дальнейшее изучение тонких особенностей взаимодействия уединенных волн с вертикальной стенкой проведено в работе [13], в которой выполнены экспериментальные исследования, а также осуществлены численные расчеты параметров взаимодействующих волн, в частности, рассчитаны величины фазового сдвига, максимального поднятия свободной поверхности, форма остаточной волны, формирующейся при отражении. Результаты согласуются с данными вышеприведенных работ [7, 9, 12].

Таким образом, в процессе взаимодействия уединенной волны с вертикальной стенкой (или лобового столкновения двух уединенных волн) происходит подъем свободной поверхности, который превышает удвоенную амплитуду падающей волны. После отражения формируется основная отраженная волна, амплитуда которой незначительно ниже, чем амплитуда падающей волны, но движение ее центра слегка запаздывает по сравнению с траекторией падающей волны (фазовый сдвиг). Отметим, что фазовый сдвиг увеличивается с ростом амплитуды. Кроме того, в процессе отражения возникает остаточная волна (дисперсионный "хвост"), энергия которой мала и ее движение описывается линейной теорией.

Характерной особенностью процесса отражения уединенной волны является возникновение вертикального движения жидкости у стенки с ускорением, отличным от нуля, как это наглядно продемонстрировано в работе [5]. Для уединенных волн относительно малой амплитуды (при $\varepsilon < 0.3$ [12]) распределение давления в целом является гидростатическим. При $\varepsilon > 0.4$ вертикальное ускорение в процессе наката волны на стенку оказывается заметным и давление становится выше гидростатического. Затем после достижения максимального подъема свободной поверхности жидкость начинает двигаться вниз под действием силы тяжести. В последней стадии движения она замедляется и возникает второй максимум давления, который выше гидростатического. В случае взаимодействия волны со стенкой указанные максимумы давления являются причиной возникновения максимумов сил, действующих на стенку, которые имеют место, когда пик волны подходит к стенке и когда он отходит.

В той или иной мере, отмеченные выше особенности (возникновение фазового сдвига, генерация дисперсионного "хвост" и др.) взаимодействия уединенных волн с вертикальной стенкой, свидетельствующие о "неупругом" характере вза-

имодействия, обнаруживаются и при взаимодействии волн с наклонными склонами, однако в этом случае картина течений существенным образом усложняется. В связи с практической важностью данной проблемы ее изучению посвящено много как теоретических, так и экспериментальных работ. Большое внимание уделяется применению численных методов для решения проблемы взаимодействия уединенных волн с наклонным берегом. Отметим работу [14], в которой выведены уравнения движения длинных волн в канале в лагранжевых координатах. В результате численного решения полученной системы уравнений найдена величина максимального заплеска волны на плоский склон в прямоугольном канале. В работе [15] использован метод граничных интегральных уравнений для вычисления величины наката уединенной волны. В работе [16] методом конечных разностей Годунова были решены нелинейные уравнения мелкой воды и вычислен максимальный накат для необрушающихся и обрушающихся волн. Отметим, что в расчетах наблюдались осцилляции решения вблизи точки обрушения. Полностью нелинейная модель, описывающая потенциальное движение жидкости, использовалась в работе [17]. На основе метода конечных элементов были вычислены некоторые характеристики распространяющихся уединенных волн, а также их обрушение. Используя модифицированную существенно неосциллирующую схему, развитую для газодинамических исследований, в работе [18] вычислены характеристики обрушающихся волн, их накат и др. Особое внимание уделялось моделированию движущейся линии уреза воды. Отметим также работу [19], в которой на основе уравнений Буссинеска методом конечных разностей проведены численные расчеты влияния препятствий, расположенных в шельфовой зоне, на величину наката. Характерные особенности процессов наката и отката нелинейной волны от плоского склона (поле течения, величина наката, диссипация энергии при обрушении и др.) были вычислены в работе [20], в которой применялись уравнения Рейнольдса и $k - \varepsilon$ модель турбулентности. Для тестирования были использованы экспериментальные данные и результаты решения потенциальной задачи методом граничных интегральных уравнений.

Для получения аналитических зависимостей, описывающих характеристики процесса взаимодействия уединенных волн со стенкой, которые обладают большей общностью по сравнению с численными решениями, используются уравнения мелкой воды, а также уравнения Буссинеска. Получаемые зависимости находят на основе неко-

торых предположений, существенно упрощающих исходные уравнения. Тестирование осуществляется, как правило, путем сравнения результатов с экспериментальными данными и результатами численных расчетов.

Одними из важных характеристик набегающей на склон волны являются форма профиля и максимальная величина наката. Среди работ, посвященных определению этих характеристик, следует отметить работу [21], в которой на основе ряда упрощающих предположений получено выражение, описывающее зависимость максимальной величины наката r от параметров набегающей уединенной волны и угла склона: $r/h = 2.83 \varepsilon^{3/4} \operatorname{ctg}^{1/2} \vartheta$, где ϑ – угол склона. Экспериментальные данные, полученные в работе, хорошо согласуются с приведенной зависимостью. Это же можно сказать и о других работах, посвященных накату уединенных волн на склон. Так, приведенные в работе [22] экспериментальные данные о величине наката в зависимости от амплитуды падающей волны согласуются с приведенной выше зависимостью. Уточнение зависимости, найденной в [21], на случай учета нелинейных членов сделано в работе [23], в которой продемонстрировано, что уточненная зависимость несколько лучше описывает экспериментальные данные авторов. Эксперименты [24], выполненные в больших волновых лотках, длина которых составляет 200 и 300 м, показали, что предположения, принятые в [21] при аппроксимации нелинейной теории, достаточно удовлетворительно описывают инженерные решения.

Как отмечалось выше, цунами распространяется в виде ряда волн, причем первая волна не является самой мощной. При отражении первой волны от берегового склона в виде уединенной волны за ней формируется дисперсионный “хвост”, который наблюдается даже при отражении от вертикальной стенки. Это приводит к ситуации, когда последующая волна цунами перемещается к берегу на фоне или отраженной уединенной волны, или ее дисперсионного “хвоста”. Следует отметить, что волновая картина, формирующаяся при отражении уединенной волны от склона, сравнительно мало изучена. Сложности проведения экспериментальных исследований обусловлены возникновением дисперсионного “хвоста”, который, как правило, распространяется вслед за генерируемой уединенной волной. При численном моделировании в связи с возможным обрушением волны и необходимостью решать задачи со сложной формой свободной поверхности при наличии возможной зоны аэрации потока, которая возника-

ет при отражении волны, также появляются трудности не только вычислительного характера, но и выбора модельных уравнений.

Внутренние волны. При наличии резкой границы между слоями жидкости с разными плотностями внутренние уединенные волны могут распространяться вдоль указанной границы раздела. Эти волны являются важным промежуточным звеном в каскадном переносе энергии от больших масштабов к малым в замкнутых стратифицированных водоемах.

Известно, что главный источник энергии, ответственный за появление волн и течений в озерах – действие ветра на свободную поверхность. Этот приток энергии ответственен за изменение уровня свободной поверхностной воды и генерацию внутренних волн в виде стоячих волн, масштаб которых соизмерим с размерами водного бассейна или распространяющихся нелинейных волн. Полевые наблюдения указывают, что скорость затухания вынужденных волн оказывается большей, чем это дают оценки влияния диссипации [25, 26]. Другие механизмы, управляющие переносом энергии от волн масштаба бассейна к волнам меньшего масштаба или к турбулентным вихрям, должны рассматриваться для объяснения высокой скорости затухания. Распространяющиеся короткопериодные внутренние волны и уединенные волны относятся к процессам относительно малых масштабов, и их энергия мала по сравнению с энергией крупномасштабных волн. Однако этот энергетический резервуар – важное промежуточное звено между крупномасштабными движениями большой энергии и мелкомасштабными флуктуациями, которые приводят к диссипации энергии. Важным механизмом переноса энергии от короткопериодных (внутренних волн) движений к движениям малого масштаба в озерах является трансформация волн на мелкой воде, приводящая к их обрушению над наклонным береговым склоном. Это приводит к турбулизации потока и перемешиванию жидкости. Лабораторные эксперименты были выполнены [27], чтобы изучить распространение внутренних уединенных волн депрессии на наклонном берегу. Авторы рассматривали обрушение внутренних волн при взаимодействии их со склоном. Было найдено, что начало обрушения волны происходит вследствие развития сдвиговой неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, которое развивалось, когда локальное число Ричардсона становилось меньше 1/4.

Геометрическая конфигурация дна вносит значительный вклад в этот процесс вследствие интенсификации обратного течения в нижнем слое,

которое возникает вследствие условия сохранения массы. Показано, что перед обрушением форма волны деформируется таким образом, что ее передний фронт становится более плавным и параллельным поверхности берегового склона. В процессе своего приспособления к склону задний фронт волны становится заметно более крутым вплоть до обрушения.

Распространение длинных слабо нелинейных волн вдоль поверхности раздела двухслойной жидкости теоретически изучено в [28]. Кубическая нелинейность была включена в рассмотрение для того, чтобы исследовать поведение волны около "точки поворота", которая приблизительно определена равенством толщин слоев. Было найдено, что более чем одна волна обратной полярности может появиться по мере того, как падающая волна проходит через "точку поворота".

Теоретические и экспериментальные исследования развития слабо нелинейных уединенных волн в двухслойной жидкости над донной топографией были выполнены в [29]. Было продемонстрировано, что амплитуда падающей волны и стратификация влияют на развитие наблюдаемого слабого сдвига скорости и, более того, неустойчивость развивается вплоть до обрушения волны. Области неустойчивости, которые зависят от длины волны, и отношения между амплитудой волны и глубиной нижнего слоя на шельфе, могут быть идентифицированы. Чтобы исследовать развитие падающих волн К-дВ уравнение было решено численно и были найдены асимптотические решения. Особое внимание было сосредоточено на ситуации, когда "точка поворота" встречается на склоне.

Накат внутренних волн на плавный склон был экспериментально изучен в [30]. Волны генерировались непрерывно на поверхности раздела двух смешивающихся слоев различного удельного веса. По мере того, как каждая волна в периодическом цуге распространяется вверх по склону, она укручается и трансформируется в солитоподобную волну перед окончательным обрушением. Окружающая жидкость вовлекается в волну при ее опрокидывании, и развивающаяся неустойчивость производит существенную турбулизацию потока и перемешивание. Обрушившаяся волна приобретает специфическую форму, похожую на солитоподобный всплеск ("боллос"), который распространяется вверх по склону. Отмечено, что картина процесса опрокидывания являлась подобной картине, которая наблюдалась в экспериментах [27, 29], несмотря на некоторые фазовые различия. Основное внимание было сосредоточено на определении объемных параметров жидкости,

которые характеризуют природу "боллоса", и на установлении зависимости этих параметров от характеристик падающей волны.

Численное моделирование процесса взаимодействия внутренней уединенной волны депрессии с топографией наклонного шельфа проведено в [31]. В этой работе были решены Рейнольдс-осредненные уравнения с параметризацией вертикальной диффузии. Выполнен детальный анализ развития поля скорости в течение процесса взаимодействия сильно нелинейных волн с донной топографией. Было показано, что в начале процесса приспособления волны ее передний фронт становится более плавным и задний фронт укручается. Такое поведение волны связано с фактом, что скорость подошвы волн меньше скорости гребня в мелкой воде, когда изучается волна депрессии. Совместный эффект нелинейности вызывает укручение и в конечном счете опрокидывание заднего фронта волны над склоном. Авторы нашли, что непосредственно перед обрушением горизонтальная орбитальная скорость на участке развития неустойчивости превышает фазовую скорость внутренней уединенной волны. Результаты ясно показывают, что обрушение происходит прежде всего из-за кинематического опрокидывания заднего фронта волны.

Лабораторные эксперименты были проведены в [32], чтобы исследовать взаимодействие внутренней уединенной волны депрессии с однородным склоном. Были изучены распад падающей уединенной волны на несколько солитоподобных волн возвышения ("боллосов") и их развитие на склоне. Показано, что влияние мелководья приводит к обрушению волны и продуцированию разнообразных турбулентных выбросов (или боллосов), которые перемещались вверх по склону. Существенное перемешивание происходило во всей прибрежной зоне обрушения. Автор предложил критерий обрушения волны. Амплитуды волн не превышали 3.5 см. Только одна конфигурация отношения толщин слоев была рассмотрена. Автор оценил энергию отраженной волны для рассмотренного ряда склонов (0.034; 0.050; 0.067) и показал, что она составляет менее 25% энергии падающей волны.

Теоретические исследования, включая сравнение с полевыми наблюдениями наката волн, распространяющихся вдоль поверхности раздела, выполнены в [33]. Авторы интерпретировали резкие флуктуации плотности на фоне медленно изменяющегося поля плотности, которые были зарегистрированы STD (проводимость-температура-глубина) профилиером, как обуслов-

ленные обрушением уединенных внутренних волн при накате на однородный склон. Подобные процессы также наблюдались в работе [32], в которой показано, что медленные изменения плотности сопровождаются последовательностью изолированных всплесков увеличенной плотности. Эти изменения плотности возникали при обрушении и последующем накате внутренних уединенных волн на склон и непосредственно связаны с боллосами, перемещающимися вверх по склону. Было обнаружено, что форма части боллосов близка к форме внутренних уединенных волн, но форма других боллосоподобных структур является нерегулярной [33]. Отмечена важная роль боллосов в переносе жидкости, находящейся под пикноклином, в область, находящуюся выше линии пересечения пикноклина со склоном. Существенной особенностью процесса взаимодействия внутренних уединенных волн со склоном, отмеченной в [31], является формирование интрузионного слоя, простирающегося от зоны перемешивания назад в толщу жидкости.

Влияние уменьшения глубины на поведение внутренней уединенной волны депрессии и ее последующее обрушение на однородном склоне были изучены экспериментально в [34]. В этой работе рассмотрены различные наклоны дна, отношения толщин слоев и различных плотностей между слоями. Механизм, который приводил к обрушению волны, был изучен с помощью визуализации течения и использования PIV-метода (particle image velocimetry). Показано, что на ранней стадии взаимодействия внутренней уединенной волны со склоном передний фронт становится параллельным склону, в то время как задний фронт становится круче. Течение, связанное с проходящей волной, характеризуется сдвигом скорости: оно направлено вверх по склону в верхнем слое и вниз – в нижнем слое. Это приводит к тому, что в непосредственной близости от поверхности склона возникает область, в которой скорость направлена вверх по склону. Формирование такой области связано с отрывом потока от границы, который возникает при течении жидкости в области с отрицательным градиентом давления. По мере возрастания эффекта “обмеления” вертикальная скорость жидкости возрастает и задний фронт волны становится неустойчивым, что приводит к образованию вихря и возникновению боллосов.

Результаты численного моделирования процесса отражения внутренних уединенных волн от склона и сравнения результатов с экспериментальными данными работы [34] представлены в [35]. Предложено использовать параметр Ирибаррена [36] для

анализа процессов отражения волны от склона. Параметр Ирибаррена представляет собой отношение между наклоном склона и амплитудой волны, разделенной на длину волны. В расчетах учитывалась вязкая диссипация. Был сделан вывод о недооценке коэффициента отражения от однородного склона для нормально падающих волн в экспериментах (см. работу [34]), хотя теоретическая модель не принимала во внимание трехмерный характер турбулентности, генерируемой при обрушении волны.

Экспериментальные исследования распространения внутренних волн и их отражения от гладкого однородного наклона проводились в [37, 38]. Авторы показали, что К-дВ теория является подходящей для внутренних уединенных волн с относительно малой амплитудой. В то же время, для волн большей амплитуды ЕК-дВ уравнение более адекватно соответствует полученным данным. Для однородного склона были определены коэффициенты отражения, основанные на амплитуде и энергии внутренних уединенных волн. Показано, что для достаточно малых и умеренных углов склонов коэффициенты отражения растут линейно с возрастанием наклона склона, и при больших углах коэффициенты асимптотически приближаются к постоянному значению. Затухание волны, вызванное эффектами вязкости при распространении вдоль канала, было принято во внимание при оценке амплитуды и энергии падающей и отраженных волн. Амплитуда отраженной волны, рассчитанная по экспериментальным данным, согласуется с оценками других авторов. Были также проведены эксперименты с обратными наклонами склонов.

Следует также упомянуть о других экспериментах по изучению взаимодействия волн со склонами. Особенности процесса отражения внутренних волн от склона были изучены экспериментально Sacchione и Wunch (1974), Ivey и Nokes (1989) и Daughous и другие (2004). Особое внимание было уделено случаю почти критического отражения внутренних волн, когда наклон вектора групповой скорости был близок к топографическому наклону. В этом случае отраженные волны захватываются вдоль склона и их энергия концентрируется в узкой зоне над склоном. Было найдено, что граничное перемешивание вблизи границы раздела происходит в результате обрушения волн большого периода и диссипативных процессов, происходящих в придонном пограничном слое для волн короткого периода. Граничное перемешивание возрастает существенно, когда угол склона приближается к критическому. Выполне-

на оценка степени перемешивания, обусловленного обрушением внутренней волны. Экспериментальные исследования наката внутренней волны на склон и степени перемешивания сделаны в Umeяama и Shintani (2004). Была применена специальная техника обработки снимков наката внутренней волны и перемешивания чистой и солевой жидкостей. Показано, что вовлечение воды из верхнего слоя в жидкость из нижнего слоя болюсами играет важную роль в процессе переноса вод. Было продемонстрировано, что взаимодействие внутренних волн со склоном может привести к неустойчивости и обрушению волны, которое обуславливает сильное перемешивание жидкостей вблизи границ. Такие механизмы переноса энергии от больших к малым (или диссипативным) масштабам играют важную роль в динамике озер наряду с более энергичными процессами взаимодействия больших внутренних уединенных волн с топографией дна. В заключение отметим также работы [47, 49–53].

Из приведенного обзора следует, что проблема взаимодействия волн с топографией, и особенно береговой, весьма сложна и интенсивно развивается. В настоящей работе проблема наката волн на склон и особенно их отражения существенно продвинута посредством проведения серии экспериментов. Основное внимание уделяется изучению процесса взаимодействия уединенных волн со склонами. Сначала приведены результаты экспериментальных исследований отражения поверхностных уединенных волн гладкими склонами, затем рассматриваются вопросы взаимодействия внутренних уединенных волн с гладкими склонами.

1. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН СО СКОЛОМ

Эксперименты проводились в волновом лотке длиной 16 м, шириной 0.3 м и высотой 0.7 м. Боковые стенки лотка были сделаны из стекла. Схема лотка и используемого оборудования представлена на рис. 1. Уединенные волны генерировались при падении в воду металлической призмы 1 в голове лотка и образовании поверхностного возмущения в виде локального поднятия свободной поверхности, при дальнейшем развитии которого происходило формирование уединенной волны. Возникающий при выбранном способе генерации волны дисперсионный “хвост” отсекался с помощью специального устройства 2. Регистрация деформаций свободной поверхности, вызванных прохождением

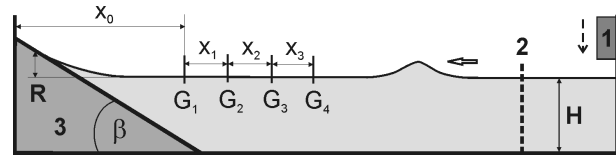


Рис. 1. Схема волнового лотка и размещения оборудования. Двойная стрелка показывает направление распространения уединенной волны

уединенной волны, проводилась с помощью емкостных волновых датчиков G_n (от четырех до шести). Сигнал от датчиков подавался на аналогово-цифровой преобразователь, соединенный с персональным компьютером. Величина временного интервала между регистрируемыми данными составляла 5 мс для каждого датчика. Подробное описание установки и метода генерации уединенной волны представлено в работе [39].

В противоположном конце лотка устанавливались модели береговых склонов 3, которые представляли собой металлическую конструкцию, покрытую слоем оргстекла толщиной 10 мм. В процессе проведения опытов регистрировалась максимальная величина наката R волн на склон путем проведения цифровой видеосъемки (данные измерений приведены в работе [39]). Эксперименты проводились для углов наклона β , равных 17° , 30° , 45° , 60° , 90° . Глубины слоя воды в лотке составляли 11 см и 17 см. Амплитуды уединенных волн могли варьироваться путем изменения высоты, с которой падает призма 1.

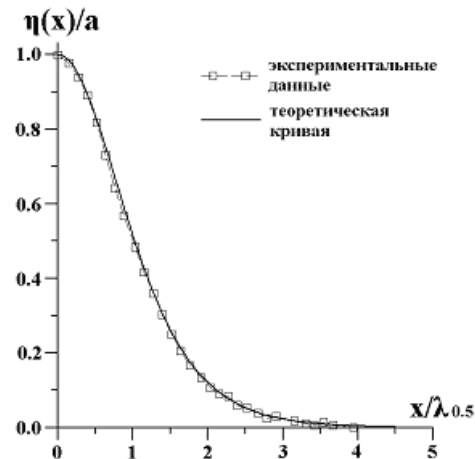


Рис. 2. Форма профиля уединенной волны $\eta(x)/a$. Здесь $\lambda_{0.5}$ – расстояние от точки, соответствующей гребню волны, до точки, в которой отклонение свободной поверхности равно половине амплитуды волны [41]

В результате обработки данных обнаружено, что в лотке распространяется уединенная волна, форма которой изображена на рис. 2, и описывается теоретическим профилем, получаемым из решения уравнения К-дВ:

$$\eta = a \cdot \operatorname{sech}^2 \left[\left(\frac{3a}{4H^3} \right)^{1/2} x \right], \quad (1)$$

где a – амплитуда волны.

Уединенные волны в экспериментах распространялись вдоль лотка и затем вверх по склону без обрушения. Отметим, что существуют два основных режима взаимодействия уединенных волн со склоном: с обрушением и без обрушения. Граница между этими режимами определяется зависимостью [21], $a/H = 0.8183 (\operatorname{ctg} \beta)^{-10/9}$, полученной на основе уравнений мелкой воды. Также широко используется другая зависимость, $a/H = 16.9 \cdot \operatorname{ctg}^{-2} \beta$, полученная в [17] путем обработки результатов численного решения потенциальной задачи о взаимодействии волны со склоном.

Одной из важных характеристик уединенных поверхностных волн является их энергия. В работе [42] показано, что для оценки общей энергии для уединенных волн с амплитудами $a/H < 0.5$ можно принять, что кинетическая энергия E_K приближенно равна потенциальной E_P , т.е. $E_K \approx E_P$. Тогда для оценки общей энергии волны можно использовать следующее выражение:

$$E = \rho \cdot g \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 dx, \quad (2)$$

где ρ – плотность жидкости; g – ускорение силы тяжести.

Отражения волн от береговых склонов характеризуется коэффициентами отражения по амплитуде $R_a = a_r/a_i$ и по энергии $R_E = E_r/E_i$. Здесь соответственно a_r и a_i – амплитуды отраженной и падающей волн; E_r и E_i – энергия отраженной и падающей волн. При расчете этих коэффициентов следует учитывать затухание энергии распространяющихся волн вдоль лотка, поскольку регистрация их характеристик осуществляется датчиками, расположенными на некотором расстоянии от склона. В качестве примера на рис. 3 представлены результаты измерений затухания амплитуды при распространении волны вдоль лотка в случае, когда глубина воды составляет 17 см. Здесь также приведена регрессионная зависимость в виде сплошной кривой $a/a_0 = \exp(-bx/H)$, где постоянная величина $b=0.00362$. Аналогичные зависимости, описывающие затухание амплитуды и энергии

волны, были найдены для других глубин. Полученные эмпирические зависимости позволили оценить амплитуду и энергию падающих и отраженных волн непосредственно перед склоном.

Следует отметить, что точность определения указанных коэффициентов в значительной мере зависит от интенсивности дисперсионного “хвоста”, присутствие которого сильно влияет на точность измерений амплитуды отраженной волны, которая распространяется на фоне дисперсионного “хвоста” падающей волны.

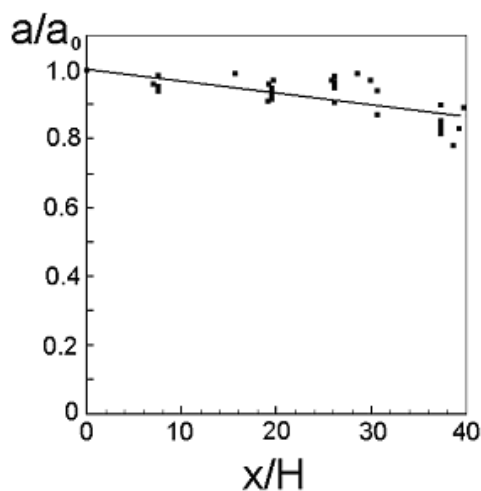


Рис. 3. Затухание амплитуды уединенной волны при распространении вдоль лотка при глубине воды 17 см

В проведенных исследованиях, как упомянуто выше, осуществлялась обрезка указанного “хвоста” с помощью специального устройства, что приводило к существенному понижению его интенсивности.

Результаты измерений коэффициентов отражения R_a и R_E уединенных волн от склонов с разными углами наклонов представлены на рис. 4.

Здесь можно видеть быстрое возрастание коэффициента отражения с изменением угла берегового склона от 0° до 30° , затем при дальнейшем увеличении угла рост заметно замедляется (режим насыщения). При определении коэффициента отражения по энергии (рис. 4, б) характер поведения кривой, построенной по результатам вычисления, немного меняется. Это свидетельствует о том, что величина энергии зависит не только от амплитуды уединенной волны, но и от ее скорости и длины. Отметим также, что с уменьшением угла склона интенсивность отраженной волны падает.

Уменьшение амплитуды и энергии отраженной волны при малых углах склона связано с особен-

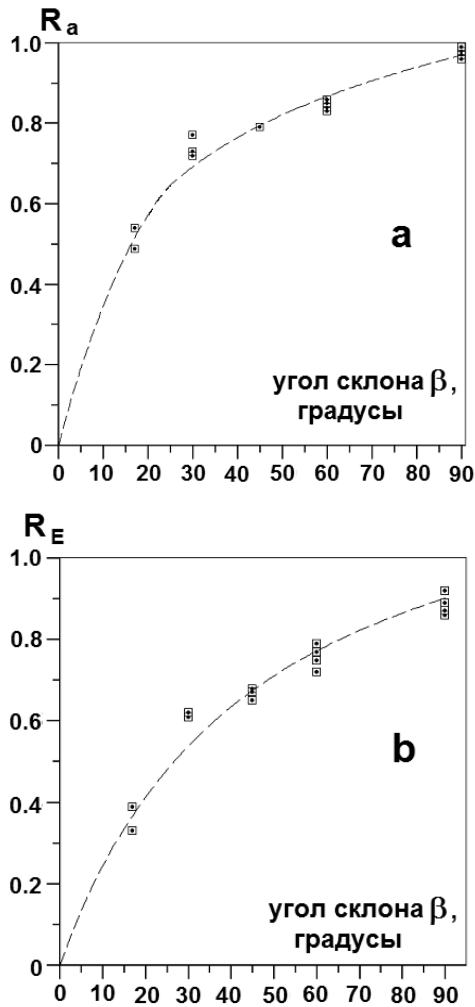


Рис. 4. Зависимость коэффициентов отражения уединенной волны по амплитуде R_a (a) и по энергии R_E (b) от угла склона. Глубины воды были равны 11 и 17 см

ностями взаимодействия падающей волны со склоном, в частности, с откатом волны. При откате волны вблизи линии уреза воды возникает депрессия свободной поверхности, обусловленная стекающей со склона жидкостью, и начинается формирование отраженной уединенной волны, которая начинает двигаться вниз по потоку. В это же время величина депрессии уменьшается. Затем отраженная уединенная волна покидает прибрежную зону, и одновременно возникают колебания жидкости вблизи уреза воды, вызванные первоначальной депрессией. В результате происходит генерация волновых движений жидкости, которые распространяются вниз по потоку вслед за отраженной уединенной волной в виде дисперсионного “хвоста”. Энергия отраженной волны, как видно из рис. 4,

меньше, чем энергия падающей волны, и эта разница тем больше, чем меньше угол склона. Таким образом, при взаимодействии уединенной волны со склоном часть энергии отражается в виде отраженной уединенной волны. Оставшаяся часть энергии (мы не рассматриваем в данном случае потери на диссипацию) затрачивается на формирование дисперсионного “хвоста”, который в виде цуга волн распространяется вслед за отраженной уединенной волной.

2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВНУТРЕННИХ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН СО СКЛОНОМ

Экспериментальные исследования взаимодействия нелинейных уединенных внутренних волн со склонами проводились в волновом лотке размерами $7 \times 0.33 \times 1.5$ м. Стенки лотка и его дно были изготовлены из плексиглаза. В лотке создавалась двухслойная стратификация путем заполнения его сначала соленой водой (соленость составляла 15 ppt) до заданной глубины, а затем сверху добавлялась пресная вода. Подача пресной воды осуществлялась с помощью специально созданного устройства, которое позволяло уменьшить размыв поверхности раздела между жидкостями. Подробно методика создания двухслойной системы в волновом лотке изложена в работе [43]. Уединенные волны генерировались, следуя методике, описанной в работе [27] (step pool method), с некоторыми модификациями. Схематически генератор волн изображен на рис. 5.

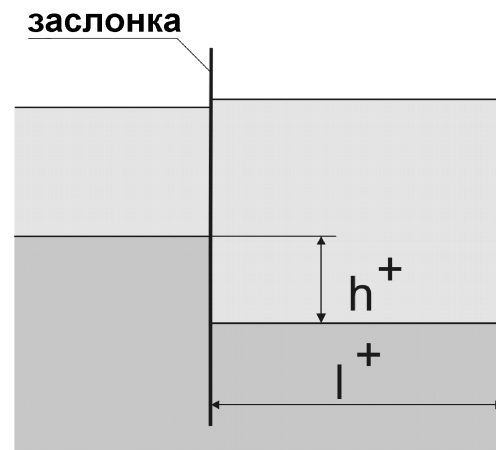


Рис. 5. Схема генератора уединенных внутренних волн

Водонепроницаемая перемещающаяся заслонка

устанавливалась в верхней части лотка с небольшим зазором между нижним концом и дном. После создания двухслойной системы в лотке заслонка опускалась до заданного уровня, тем самым отделяя небольшую часть лотка длиной l^+ , изображенную на рисунке, от основной части лотка. Затем проводился дополнительный налив пресной воды в выделенную часть лотка. Это приводило к понижению уровня поверхности раздела (халоклина) в выделенной части по сравнению с уровнем халоклина в основной части лотка на величину h^+ . При этом возникало незначительное повышение уровня свободной поверхности в выделенной части лотка. Следуя рекомендациям, изложенным в работе [34], заслонка была наклонена под определенным углом по отношению к горизонту, что улучшало качество генерации волн. После подъема заслонки более легкая (пресная) жидкость, находящаяся в выделенной части лотка, начинала движение в направлении основной части лотка и происходило формирование уединенной волны депрессии. Одновременно наблюдалось перемещение более тяжелой (соленой) жидкости из основной в выделенную часть лотка в виде волны подъема. Затем эта волна отражалась от стенки и двигалась в основную часть лотка, генерируя нежелательные возмущения. Чтобы избежать этого, заслонка через определенный промежуток времени возвращалась в исходное положение, отсекая возмущения от распространяющейся уединенной волны депрессии. Такая процедура позволяла генерировать уединенные волны с очень малой интенсивностью дисперсионного “хвоста”, что особенно важно при изучении отражения уединенных волн от препятствий. Профиль плотности измерялся с помощью микродатчиков электропроводности, диаметр которых составлял 0.8 мм. Их калибровка выполнялась с использованием серии резервуаров с заданной соленостью. Типичные распределения солености перед началом опытов (перед пробегом 1 и после пробега 1) представлены на рис. 6.

Сплошные кривые на рис. 6 описываются выражением

$$S = S_{0.5} \left[1 - \operatorname{th} \frac{(z - z_c)}{\delta} \right], \quad (3)$$

где толщина слоя раздела равна 2δ .

Измерения деформаций поверхности раздела, вызванных прохождением волны, осуществлялись с помощью распределенных емкостных датчиков. Сигнал от датчиков подавался на аналого-цифровой преобразователь, соединенный с ПК. Калибровка датчиков проводилась с использованием специального резервуара, заполненного пре-

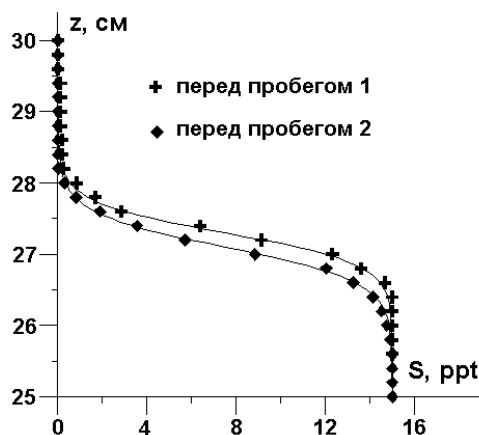


Рис. 6. Профили солености перед пробегами 1 и 2

сной водой, в котором находился малый сосуд с соленой водой. Отметим, что рабочая характеристика данных датчиков, в отличие от датчиков электропроводности, имела близкий к линейному характеру.

Граница между слоями (или верхний слой) была окрашена. Использование цифровой камеры позволяло проводить оценку параметров внутренних уединенных волн и сравнивать данные с результатами измерений с помощью датчиков.

Эксперименты были выполнены с двумя типами склонов, имеющих различные углы относительно горизонта: $\beta = 12.5^\circ$ и $\beta = 60^\circ$ (пологий и крутой склоны). Модель склона устанавливалась в нижнем конце лотка. Так, в первой серии экспериментов был использован пологий склон, $\beta = 12.5^\circ$. Длина склона по горизонтали L_s была равна 135.5 см. Схема расположения датчиков относительно склона представлена на рис. 7. Датчики G_0, G_1, G_2, G_3, G_4 устанавливались вдоль центральной оси лотка. Двойная стрелка указывает на направление распространения волны.

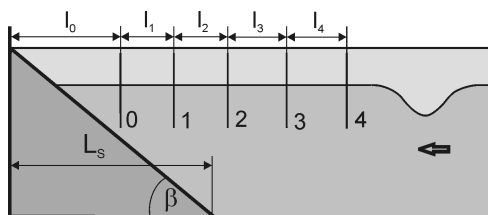


Рис. 7. Схема расположения датчиков в эксперименте с плавным склоном: $l_0 = 82.5$ см, $l_1 = 59.5$ см, $l_2 = 55.5$ см, $l_3 = 40$ см, $l_4 = 49.5$ см (эксперимент 0404, пробег 1)

Общая глубина жидкости в эксперименте 0404 была равной 30 см и профиль солености описывал-

ся выражением (3) с $\delta = 0.55$ см. Толщина нижнего слоя составляла 27.55 см. Измеренные амплитуды падающих и отраженных волн (индекс “r”) представлены в таблице 1.

Таблица 1.

датчик	4	3	2	1	0	4r	2r
амплитуда	4.5	4.4	4.3	4.3	4.0	1.6	1.3
	см	см	см	см	см	см	см

Подобные эксперименты были проведены для волн с другими значениями амплитуд. Был также выполнен цикл исследований отражения уединенных внутренних волн депрессии со склоном, имеющим угол наклона $\beta = 60^\circ$. Методика проведения исследований полностью совпадает с описанной выше.

Известно [44], что для уединенных волн малой амплитуды потенциальная энергия практически равна кинетической; для более интенсивных волн эти энергии пропорциональны друг другу. Авторами было предложено (см. также [34]) оценивать общую энергию уединенной внутренней волны с использованием следующего выражения:

$$E = g \Delta \rho \int_0^\lambda \eta^2(x) dx = c g \Delta \rho \int_0^\lambda \eta^2(t) dt. \quad (4)$$

Как следует из этого выражения, для расчета энергии волны необходимо иметь информацию о профиле волны. Проведенные исследования показали [43], что форма профиля генерируемых уединенных внутренних волн соответствует известному “sinh²”-профилю, т. е. описывается уравнением К-дВ. При больших амплитудах волн наблюдалось уширение профиля, которое обусловлено усилением нелинейных эффектов.

Для определения коэффициентов отражения, как и в случае отражения поверхностных волн, необходимо учитывать затухание энергии волны по мере ее распространения вдоль лотка. С этой целью были проведены специальные исследования затухания энергии внутренней волны. Анализ данных показал, что их можно аппроксимировать следующей зависимостью: $E/E_0 = 10^{-b\tilde{x}}$, где $\tilde{x} = x h_2/H^2$, константа $b = 0.0021$ [43]. Отметим, что постоянная величина, характеризующая затухание энергии, в выполненных опытах близка к аналогичной величине $b = 0.023$, полученной в работе [34].

Основываясь на результатах измерений амплитуды волны, измеряемой датчиками, и на данных,

характеризующих затухание волны с расстоянием, были проведены оценки коэффициентов отражения по амплитуде R_a и по энергии R_E , которые представлены на рис. 8. Штриховая кривая на рис. 8, а изображает данные измерений коэффициента отражения уединенных внутренних волн, приведенные в работах [45, 46]. Такая же кривая на рис. 8, б, представляет собой объединенные данные, представленные в работах [45, 46], а также в работе [34]. Здесь характерная длина волны оценивалась по формуле [34, 41].

$$L_W = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(x) dx \cong \frac{c}{a} \int_{t_0}^{t_1} \eta(t) dt. \quad (5)$$

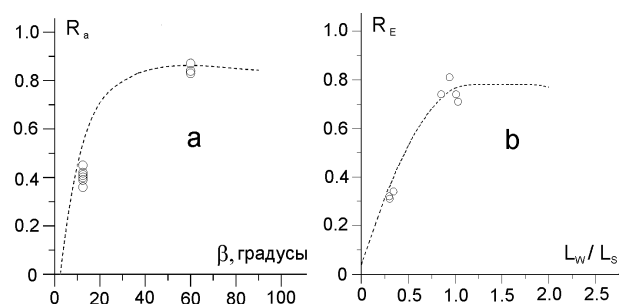


Рис. 8. Зависимость коэффициента отражения R_a от угла наклона склона (а) и зависимость коэффициента отражения R_E от отношения характерных длин волны и склона (б)

Анализируя представленные результаты, можно сделать вывод о том, что кривую, характеризующую зависимость коэффициентов отражения от угла или от отношения характерных масштабов волны и склона, можно условно разбить на две части, каждая из которых соответствует разным механизмам отражения волн. Для плавных склонов топографический эффект является слабым и отражение волны происходит в результате потери устойчивости заднего фронта волны, его укрупнения, обрушения и последующей генерации турбулентности, приводящей к перемешиванию соленой и пресной жидкостей. Затем более легкая жидкость (промежуточной плотности) движется вверх под действием сил плавучести, в результате чего возникает отраженная волна. Этот механизм характеризуется слабым отражением и существенной диссипацией. В то же время, сильный топографический эффект существует для крутых склонов. Наблюдается существенный рост амплитуды волны вблизи склона. Когда рост амплитуды останавливается, начинается быстрый подъем легкой

жидкости и происходит генерация интенсивной уединенной волны. Процесс отражения уединенной волны является быстрым по сравнению с процессом отражения от плавного склона; и диссипация энергии невелика. Ясно, что между выделенными частями существует промежуточная кривая, которая характеризует переход от одного режима к другому.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе основное внимание уделено изучению процесса отражения уединенных волн от склонов. Сравнение кривых, характеризующих зависимость коэффициентов отражения от угла склона, показывает, что вид этих кривых близок друг к другу для поверхностных и внутренних уединенных волн. С ростом угла склона наблюдается быстрый рост коэффициентов отражения, затем возрастание замедляется, и для крутых склонов наступает режим, когда увеличение угла вызывает сравнительно небольшое возрастание коэффициентов (режим “насыщения”). Такое поведение кривых связано, в первую очередь, с различными механизмами, управляющими процессом отражения волны. При малых углах эти процессы характеризуются неустойчивостью волны, при развитии которой может происходить обрушение волны, и заметным перемешиванием жидкости и диссипацией энергии. Коэффициенты отражения малы, но быстро нарастают с ростом угла склона. Для крутых склонов процесс отражения характеризуется заметным возрастанием амплитуды волны, переходом кинетической энергии волны в потенциальную и обратно в кинетическую, что приводит к формированию интенсивной отраженной волны. Диссипация энергии при этом мала. Характерные времена процессов отражения различны для этих режимов: время мало для процесса отражения уединенной волны от крутых склонов и велико для плавных склонов.

Характеристики отраженных волн важны при изучении процессов взаимодействия уединенных поверхностных волн со склонами в связи с проблемой волн цунами. Как правило, порождается не одна волна цунами, и каждая последующая развивается на фоне отраженной волны, что может приводить к заметному росту амплитуды, неустойчивости волн, формированию бора, и это может существенно усилить разрушительное воздействие волн. Не менее важна информация о процессе отражения уединенных внутренних волн от склонов. Этот механизм является одним из основных

механизмов, приводящих к относительно быстрому переходу энергии движений больших масштабов к энергии движений малых масштабов в замкнутых стратифицированных водоемах. Информация о характере процессов отражения волн приводит к лучшему пониманию роли тех или иных механизмов в перераспределении энергии движений и переносе примеси в водоемах.

1. Dalrymple R.A., Grilli L.E., Kirby A.T. Tsunami and challenges for accurate modeling // *Oceanography*.– 2006.– vol. 19, No.1.– P. 142–151.
2. Пелиновский Е.Н. Гидродинамика волн цунами.– ИИФ РАН: Нижний Новгород, 1996.– 276 с.
3. Byatt-Smith J.G.B. An integral equation for unsteady surface waves and a comment on the Boussinesq equation // *J. Fluid Mech.*– 1971.– vol. 49.– P. 625–633.
4. Pelinovsky E., Kharif C., Talipova T. Large-amplitude long wave interaction with a vertical wall // *Europ. J. of Mech. B/ Fluids*.– 2008.– vol. 27.– P. 409–418.
5. Maxworthy T. Experiments on collision between solitary waves // *J. Fluid Mech.*– 1976.– vol. 76.– P. 177–185.
6. Su C.H., Mirie R.M. On head-on collision between two solitary waves // *J. Fluid Mech.*– 1980.– vol. 98.– P. 509–525.
7. Mirie R.M., Su C.H. Collisions between two solitary waves // *J. Fluid Mech.*– 1982.– vol. 115.– P. 475–492.
8. Su C.H., Gardner C.S. Korteweg-de Vries equation and generalizations III. Derivation of the Korteweg-de Vries equation and Burgers equation // *J. Math. Phys.*– 1969.– vol. 98.– P. 509–525.
9. Fenton J.D., Reinecker M.M. A Fourier method for solving nonlinear water-wave problems: application to solitary-wave interaction // *J. Fluid Mech.*– 1982.– vol. 118.– P. 411–443.
10. Renouard D.P., Seabra-Santos F.J., Temperville A.M. Experimental study of the generation, damping and reflection of a solitary wave // *Dyn. Atmos. Oceans*.– 1985.– vol 9.– P. 341–358.
11. Byatt-Smith J.G.B. The reflection of a solitary wave by a vertical wall // *J. Fluid Mech.*– 1988.– vol. 197.– P. 503–521.
12. Cooker M.J., Weidman P.D., Bale D.S. Reflection of a high-amplitude solitary wave at a vertical wall // *J. Fluid Mech.*– 1997.– vol. 342.– P. 141–158.
13. Craig W., Guyenne P., Sulem C. Solitary wave interactions // *Physics of Fluids*.– 2006.– vol. 18, 057106.– P. 1–25.
14. Pedersen G., Gjevik B. Run-up of solitary waves // *J. Fluid Mech.*– 1983.– vol.135.– P. 283–299.
15. Rim S.K., Liu P. L.-F., Liggett J.A. Boundary integral equation solution for solitary wave generation, propagation and run-up // *Coastal Engng.*– 1983.– vol. 7.– P. 299–317.
16. Titov V.V., Synolakis C.E. Modeling of breaking and non-breaking long-wave evolution and run-up using VTCS-2 // *J. Waterway, Port, Coastal Ocean Engng.*– 1995.– vol.121, No.6.– P. 308–461.

17. Grilli S.T., Svendsen I.A., Subramanya R. Breaking criterion and characteristics for solitary waves on slope // *J. Waterway, Port, Coastal Ocean Engng.*– 1997.– vol.123, No.3.– P. 102–112.
18. Li Y., Raichlen F. Non-breaking and breaking solitary wave run-up // *J. Fluid Mech.*– 2002.– vol. 456.– P. 295–318.
19. Lynett P.J. Effect of a shallow water obstruction on long wave runup and overland flow velocity // *J. Waterway, Port, Coastal Ocean Engng.*– 2007.– vol. 133, No. 6.– P. 455–462.
20. Lin P., Chang K.-A., Liu Ph. L.-F. Runup and rundown of solitary waves on sloping beaches // *J. Waterway, Port, Coastal Ocean Engng.*– 1999.– vol. 125, No. 5.– P. 247–255.
21. Synolakis C.E. The run-up of solitary waves // *J. Fluid Mech.*– 1987.– vol.185.– P. 523–545.
22. Jensen A., Pedersen G.K., Wood D.J. An experimental study of wave run-up at a steep beach // *J. Fluid Mech.*– 2003.– vol. 188.– P. 161–188.
23. Li Y., Raichlen F. Solitary wave runup on plane slopes // *J. Waterway, Port, Coastal Ocean Engng.*– 2001.– vol.127, No.1.– P. 33–44.
24. Chang Y.-H., Hwung H.-H. Experiments on the run-up of solitary waves over sloping bottom.– Proc. 3rd Chinese-German Joint Symposium on Coastal and Ocean Engineering: National Cheng Kung Univ., Tainan, November, 8-16, 2006.– 13 p.
25. Stevens C., Imberger J.: The initial response of a stratified lake to a surface shear stress // *J. Fluid Mech.*– 1996.– vol.342.– P. 39–66.
26. Horn D.A., Imberger J., Ivey G.N. The degeneration of large-scale interfacial gravity waves in lakes // *J. Fluid Mech.*– 2001.– vol. 434.– P. 181–207.
27. Kao T.W., Pan F.S., Renouard D. Internal soliton on the pycnocline : Generation, propagation, and shoaling and breaking over a slope // *J. Fluid Mech.*– 1985.– vol. 159.– P. 19–53.
28. Helfrich K.R., Melville W.K., Miles J.W. On interfacial solitary waves over slowly varying topography // *J. Fluid Mech.*– 1984.– vol. 149.– P. 305–317.
29. Helfrich K.R., Melville W.K. On long nonlinear internal waves over slope-shelf topography // *J. Fluid Mech.*– 1986.– vol. 167.– P. 285–308.
30. Wallace B.C., Wilkinson D.L. Run-up of internal waves on a gentle slope in a two-layered system // *J. Fluid Mech.*– 1988.– vol. 191.– P. 419–442.
31. Vlasenko V.I., Hutter K.: Numerical experiments on the breaking of solitary internal waves over a slope-shelf topography // *J. Phys. Oceanogr.*– 2002.– vol. 32.– P. 1779–1793.
32. Helfrich K.R.: Internal solitary wave breaking and run-up on a uniform slope // *J. Fluid Mech.*– 1992.– vol. 243.– P. 133–154.
33. Bourgault D., Kelley D.E., Galbraith P.S.: Interfacial solitary wave run-up in the St. Lawrence estuary // *J. Mar. Res.*– 2005.– vol. 63.– P. 1001–1015.
34. Michallet H., Ivey G.N.: Experiments on mixing due to internal solitary waves breaking on uniform slopes // *J. Geophys. Res.*– 1999.– vol. 104.– P. 13467–13477.
35. Bourgault D., Kelley D.E.: On the reflectance of uniform slopes for normally incident interfacial solitary waves // *J. Phys. Oceanogr.*– 2007.– vol. 37.– P. 1156–1162.
36. Boegman L., Ivey G.N., Imberger J.: The degeneration of internal waves in lakes with sloping topography // *Limnol. Oceanogr.*– 2005.– vol. 50.– P. 1620–1637.
37. Chen C.-Y., Hsu J.R.-C., Chen H.-H., Kuo C.-F., Cheng M.-H.: Laboratory observations on internal solitary wave evolution on steep and inverse uniform slopes // *Ocean Eng.*– 2007.– vol. 34.– P. 157–170.
38. Chen C.-Y., Hsu J.R.-C., Chen H.-H., Kuo C.-F., Cheng M.-H.: An investigation on internal solitary waves in a two-layer fluid: Propagation and reflection from steep slope // *Ocean Eng.*– 2007.– vol. 34.– P. 171–184.
39. Городецький О.В., Котельнікова А.С., Нікішов В.І., Олексюк В.В., Романенко П.Ю., Селезова Л.В., Соколовський Г.П., Сребнюк С.М. Генерація, розповсюдження та накат відокремлених хвиль на берегові склони // *Прикладна гідромеханіка.*– 2010.– т. 12(84), №1.– С. 40–47.
40. Hammack J.L., Segur. H. The Korteweg-de Vries equation and water waves // Part 2. Comparison with experiments.– *J. Fluid Mech.*– 1974.– P. vol. 65.289–314
41. Koop C.G., Butler G. An investigation of internal solitary waves in a two-fluid system // *J. Fluid Mech.*– 1981.– vol. 112.– P. 225–251.
42. Li Y., Raichlen F. Energy balance model for breaking solitary wave runup // *J. Waterway, Port, Coastal Ocean Engng.*– 2003.– vol.129, No.2.– P. 47–59.
43. Кулик А.И., Никишов В.И., Олексюк В.В., Пихур С.В., Стеценко А.Г. Исследование распространения сильно нелинейных внутренних волн в каналах и их взаимодействие с топографическими неоднородностями. 1. Генерація и распространение волн // *Прикладная гидромеханика.*– 2009.– т. 11(83), № 2.– С. 40–54.
44. Bogucki, D., Garrett C. A simple model for the shear-induced decay of an internal solitary wave // *J. Phys. Oceanogr.*– 1993.– vol. 8.– P. 1767–1776.
45. Chen C.-Y., Hsu J.R.-C., Chen H.-H., Kuo C.-F., Cheng M.-H. Laboratory observations on internal solitary wave evolution on steep and inverse uniform slopes // *Ocean Eng.*– 2007.– vol. 34.– P. 157–170.
46. Chen C.-Y., Hsu J.R.-C., Chen H.-H., Kuo C.-F., Cheng M.-H. An investigation on internal solitary waves in a two-layer fluid: Propagation and reflection from steep slope // *Ocean Eng.*– 2007.– vol. 34.– P. 171–184.
47. Селезов И.Т., Ткаченко В.А., Савченко С.А. О гашении волн на воде локальными донными неоднородностями // *Прикладная гидромеханика.*– 2006.– 8(80), №1.– С. 73–78.
48. Стокер Дж. Дж. Волны на воде.– М.: ИЛ, 1959.– 618 с.
49. Селезов И. Т., Авраменко О. В., Гуртовий Ю. В., Нарядовий В. В. Нелинейное взаимодействие внутренних и поверхностных гравитационных волн в двухслойной жидкости со свободной поверхностью // *Мат. методы и физико-механ. поля.*– 2009.– 52, №1.– С. 72–83.
50. Selezov I.T. Modeling of tsunami wave generation and propagation // *Int. J. Fluid Mechanics Research.*– 2006.– 33, N 1.– P. 44–54.
51. Bernard E.N., Moffeld H.O., Titov V., Synolakis C.E., Gonzales F.I. Tsunami: scientific frontiers, mitigation forecasting and policy implications // *Phil Trans. R. Soc.*– 2006.– A, vol. 364.– P. 1989–2007.