

УДК 537.84

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ, ПОРОЖДАЕМЫЕ ВРАЩАЮЩИМСЯ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ В ЦИЛИНДРЕ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

А. Ф. ЗИБОЛЬД

Донецкий национальный технический университет

Получено 29.09.2010

Рассматривается течение вязкой проводящей жидкости в ограниченном по высоте цилиндрическом сосуде, возникающее под действием вращающегося магнитного поля. Задача решается итерационным методом. Установлены значения параметров, при которых итерационный процесс еще сходится. Исследованы трехмерные гидродинамические структуры, возникающие при различных значениях геометрических и электромагнитных параметров течения.

Розглядається течія в'язкої провідної рідини в обмеженій по висоті циліндричній посудині, що виникає під дією обертового магнітного поля. Задача розв'язується ітераційним методом. Встановлені значення параметрів, при яких ітераційний процес ще збігається. Досліджені тривимірні гідродинамічні структури, що виникають при різних значеннях геометричних та електромагнітних параметрів течії.

The flow of viscous conducting liquid in the cylinder of the limited length, arising under the action of the rotating magnetic field is considered. The problem was solved by an iterative method. The meanings of parameters are established, at which the iterative process still converges. The three-dimensional hydrodynamical structures arising at various meanings of geometrical and electromagnetic parameters of flow are investigated.

ВВЕДЕНИЕ

Характерной особенностью вращательных течений является то, что при потере устойчивости первичного ламинарного течения возникает не турбулентное течение, а вторичный ламинарный режим. При этом на первичное ламинарное течение накладывается система периодических вдоль оси сосуда меридиональных вихрей – так называемых вихрей Тейлора (следует отметить, что остаточная структура в виде вихрей Тейлора наблюдается и в далеко закритических режимах, когда течение жидкости является практически турбулентным [1]). Эта особенность вращательных течений имеет исключительно важное значение для практики. Использование вращающегося магнитного поля в различных технологических процессах часто связано с вопросами сепарации либо перемешивания жидких или двухфазных смесей [2]. К примеру, расплавы металлов получили широкое применение в атомной энергетике в качестве теплоносителей в ядерных реакторах. В связи с этим возникла проблема центрифугирования из расплавов газа и сепарации примесей. Сепарация происходит при одномерном вращательном течении, в то время как для перемешивания необходимо развитое трехмерное течение. При создании соответствующих технологических устройств необходимо знать, при каких условиях будет реализоваться тот или иной тип течения. В этом смысле исследование условий перехода одномерного враща-

тельного течения (режим сепарации) в трехмерное ламинарно-вихревое (режим перемешивания) и возникающих при этом динамических структур представляет большой интерес как с точки зрения теории, так и с точки зрения практических приложений.

Устойчивость первичного ламинарного течения вязкой проводящей жидкости, возникающего под действием вращающегося магнитного поля в бесконечно длинном цилиндре, исследована достаточно подробно с помощью численных методов [3–7]. Для широкого диапазона изменения параметров процесса были получены кривые нейтральной устойчивости, отделяющие область одномерного азимутального течения от области трехмерного ламинарно-вихревого течения. В расчетах была получена одновихревая (по радиусу) структура тейлоровских вихрей. Необходимость изучения трехмерной структуры, возникающей в сосуде конечной длины, и ее эволюции при изменении параметров связана с возможностью использования одномерной модели первичного ламинарного течения в задачах на устойчивость. Хотя задача о МГД-вращении в сосуде конечной длины вообще не имеет одномерного решения (т. е. течение в нем возникает сразу в виде сложной трехмерной структуры), но можно предположить, что в достаточно большой части длинного цилиндрического сосуда возможно существование одномерного течения. В этом смысле исследование динамических структур, возникающих в реальном со-

суде конечной длины под действием вращающегося магнитного поля, представляет большой интерес, как с точки зрения теории, так и с точки зрения практических приложений. Эти вопросы впервые были поставлены донецкой группой исследователей во главе с А. Б. Капустой. В дальнейшем актуальность этих исследований отмечалась Э. Далбергом [8] и Н. К. Моффатом [9].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Полная система уравнений, необходимая для описания движения вязкой несжимаемой электропроводной жидкости, включает уравнения механики сплошной среды и электродинамики. В неподвижной системе отсчета МГД-процессы описываются следующей системой уравнений Навье-Стокса-Максвелла:

уравнение Навье-Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta\mathbf{V} + \frac{1}{\rho}(\mathbf{j} \times \mathbf{B}), \quad (1)$$

закон Ампера

$$\text{rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}, \quad (2)$$

закон Фарадея

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3)$$

закон Ома в дифференциальной форме

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}), \quad (4)$$

уравнение неразрывности

$$\text{div}\mathbf{V} = 0, \quad (5)$$

$$\text{div}\mathbf{B} = 0, \quad (6)$$

где

- \mathbf{V} – скорость течения жидкости,
- \mathbf{B} – магнитная индукция,
- \mathbf{E} – напряженность электрического поля,
- \mathbf{j} – плотность тока,
- P – давление,
- ρ – плотность жидкости,
- σ – электропроводность жидкости,
- ν – кинематическая вязкость,
- μ_0 – магнитная постоянная ($4\pi \cdot 10^{-7} \text{Гн/м}$).

Подставляя в уравнение Навье-Стокса (1) плотность тока из закона Ампера (2), получаем уравнение движения в виде

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta\mathbf{V} + \frac{1}{\mu_0\rho}\text{rot}\mathbf{B} \times \mathbf{B}. \quad (7)$$

Подставляя выражение для плотности тока из закона Ома (4) в закон Ампера (2), действуя на него оператором rot и исключая с помощью закона Фарадея (3) напряженность электрического поля \mathbf{E} , получаем уравнение для индукции магнитного поля:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{B} - (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{V} = \frac{1}{\mu_0\sigma}\Delta\mathbf{B}. \quad (8)$$

Вводя вектор вихря $\mathbf{\Omega} = \text{rot}\mathbf{V}$, перейдем от уравнения Навье-Стокса (7) к уравнению Гельмгольца:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{\Omega} - (\mathbf{\Omega}\nabla)\mathbf{V} + \nu\text{rot}\text{rot}\mathbf{V} = \\ = \frac{1}{\mu_0\rho}\text{rot}(\text{rot}\mathbf{B} \times \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (9)$$

В нашем случае МГД-процессы удобно описать с помощью векторного потенциала скорости $\mathbf{\Psi}$, связанного со скоростью соотношением $\mathbf{V} = \text{rot}\mathbf{\Psi}$ и электрического векторного потенциала \mathbf{A} , связанного с магнитной индукцией аналогичным выражением $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$. Заметим, что при этом уравнение неразрывности (5) и условие соленоидальности для вектора магнитной индукции (6) выполняются тождественно. Уравнения магнитной гидродинамики для векторных потенциалов имеют вид:

$$\mu_0\sigma\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \Delta\mathbf{A} = \mu_0\sigma(\text{rot}\mathbf{\Psi} \times \text{rot}\mathbf{A}), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta\mathbf{\Psi}}{\partial t} + (\text{rot}\mathbf{\Psi}\nabla)\Delta\mathbf{\Psi} - (\Delta\mathbf{\Psi}\nabla)\text{rot}\mathbf{\Psi} = \\ = \nu\Delta^2\mathbf{\Psi} + \frac{1}{\mu_0\rho}[(\text{rot}\mathbf{A}\nabla)\Delta\mathbf{A} - (\Delta\mathbf{A}\nabla)\text{rot}\mathbf{A}]. \end{aligned} \quad (11)$$

В безындукционном приближении, когда магнитное поле не зависит от скорости течения, рассмотрим трехмерное осесимметричное стационарное течение вязкой несжимаемой электропроводной жидкости, возбуждаемое в цилиндрическом сосуде ограниченной длины однородным вдоль оси z соосно вращающимся магнитным полем произвольной поворотной симметрии. Цилиндр неподвижен, имеет бесконечно тонкую диэлектрическую стенку и находится в цилиндрической полости, вырезанной в идеальном ферромагнетике. Известно, что вращающееся магнитное поле создается системой проводников, определенным образом включенных в сеть многофазного переменного тока. При этом токи, протекающие по каждому двум соседним проводникам, смещены по фазе. В нашем случае вращающееся магнитное поле создается бегущим токовым слоем вида $N I e^{i(\omega t - p\varphi)}$, равномерно

распределенным по поверхности расточки индуктора, выполненного из ферромагнетика. Здесь NI – линейная токовая нагрузка, ω – угловая скорость вращения магнитного поля, p – порядок поворотной симметрии вращающегося магнитного поля. Предполагается, что проводимость торцов сосуда – порядка проводимости жидкости. При этих условиях можно считать, что поле электромагнитных сил также однородно вдоль оси z . Как следует из результатов работы [10], в безындукционном приближении, что соответствует малым значениям относительной частоты ($\bar{\omega} < 1$, $\bar{\omega} = \mu_0 \sigma \omega R_0^2 / p$, R_0 – радиус цилиндра), уравнения индукции (10) и Гельмгольца (11) разделяются и оказывается возможным независимое решение электродинамической задачи. Решение задачи для определения электрического векторного потенциала искалось в виде разложения в ряд по степеням малого параметра $\bar{\omega}$. Задача нулевого приближения имеет следующее решение:

$$a_z = -\frac{r^p}{p} \cos(\omega t - p\varphi). \quad (12)$$

Как показал Далберг [8], вихрь плотности сил в этом случае не зависит от координаты φ и, следовательно, осесимметричное течение порождается осесимметричной составляющей электромагнитных сил. Выделение осесимметричной части плотности электромагнитной силы эквивалентно осреднению по координате φ .

Будем полагать, что в нашем случае для возбуждения магнитного поля используется идеальный индуктор, создающий только первую гармонику поля, т. е. для описания электрического векторного потенциала можно использовать выражение (12). В случае осевой симметрии течение в плоскости (r, z) можно описать φ -компонентой векторного потенциала скорости:

$$v_r = -\frac{\partial \psi_\varphi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial (r\psi_\varphi)}{\partial r}.$$

Таким образом, для описания трехмерного осесимметричного течения удобно выбрать переменные v_φ и ψ_φ . Записав уравнение Гельмгольца для v_φ и ψ_φ , получаем систему двух уравнений, однозначно описывающую трехмерное течение в цилиндре ограниченной длины. В такой постановке задача рассмотрена в работе [11]. Впоследствии А. Б. Капустой была предложена более точная постановка, учитывающая φ -компоненту ротора азимутальной силы в уравнении для φ -составляющей векторного потенциала скорости (как показали расчеты, вклад этой добавки становится существенным при

числах $Ha_d > 1$). Уточненная модель задачи описывается следующей системой безразмерных уравнений [12]:

$$\begin{aligned} \frac{Re_\omega}{h} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi_\varphi) \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial z} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\varphi) \right] = \\ = Lv_\varphi + Ha_d^2 r^{2p-1} (1 - v_\varphi/r), \quad (13) \\ \frac{Re_\omega}{h} \left[\frac{\partial (L\psi_\varphi)}{\partial z} \frac{1}{r} \frac{\partial (r\psi_\varphi)}{\partial r} - r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{L\psi_\varphi}{r} \right) \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial z} + \right. \\ \left. + 2 \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right] = L^2 \psi_\varphi - Ha_d^2 r^{2p-2} \times \\ \times \left[2\Delta \psi_\varphi + \frac{\partial^2 \psi_\varphi}{\partial z^2} + 4(p-1) \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r\psi_\varphi)}{\partial r} \right] \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} v_\varphi|_{r=0} < \infty, \quad v_\varphi|_{\Gamma} = 0, \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 - \text{условие симметрии} \\ \text{области течения}, \quad (14) \\ v_\varphi|_{r=0} < \infty, \quad \psi_\varphi|_{\Gamma} = \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0, \end{aligned}$$

где $Ha_d = Ha/\sqrt{2}$ – число Гартмана, образованное по действующему значению индукции; $Re_\omega = \omega R_0^2 / p\nu$ – число Рейнольдса, определенное по относительной скорости движения границы области в магнитном поле; $v_0 = \omega R_0 / p$ – масштаб скорости; ψ_φ – φ -компонента векторного потенциала скорости $\mathbf{v} = \text{rot} \Psi$; $h = Z_0 / R_0$, p – число пар полюсов (порядок поворотной симметрии) вращающегося магнитного поля; Γ – внутренняя поверхность сосуда;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \delta^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad L = \Delta - \frac{1}{r^2}.$$

Анализ второго уравнения системы (1) показывает, что задача вообще не имеет одномерного решения. Действительно, трехмерное решение может отсутствовать, если v_φ или $\partial v_\varphi / \partial z$ обращаются в нуль. При течении жидкости в сосуде конечных размеров ни первое, ни второе условия не выполняются, так как выполнение первого условия означает отсутствие одномерного течения, а второе может выполняться только в бесконечно длинном сосуде. Таким образом, причиной возникновения трехмерного течения является пространственное изменение азимутальной скорости.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

При решении задачи был использован метод Галлеркина, широко применяемый в вычислительной

гидродинамике. Этому методу было отдано предпочтение перед другими численными методами из-за достаточно высокой точности расчетов при сравнительно небольшом объеме оперативной памяти ЭВМ (сравнительным расчетом Оржаг [12] показал, что метод Галеркина с N^p степенями свободы, где p – размерность пространства, дает такую же точность, как метод конечных разностей с $(2N)^p$ степенями свободы). Включение решения в итерационную схему существенно повысило степень достоверности решения.

Итак, система уравнений (13) с граничными условиями (14) решается методом итераций с использованием метода Галеркина на каждом шаге итерации. На i -м шаге итерации по известному значению ψ_{i-1} находится значение азимутальной скорости v_i . Затем уже известные значения ψ_{i-1} и v_i подставляются во второе уравнение системы (13), из которого находится значение ψ_i . Итерация начинается со значения $\psi_0 = 0$. Используемая вычислительная схема метода имеет вид:

$$L v_i - \text{На}_d^2 r^{2p-2} v_i - \frac{\text{Re}_\omega}{h} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \psi_{i-1}) \frac{\partial v_i}{\partial z} - \frac{\partial \psi_{i-1}}{\partial z} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_i) \right] = -\text{На}_d^2 r^{2p-1}, \quad (15)$$

$$L^2 \psi_i - \text{На}_d^2 r^{2p-2} \left[2\Delta \psi_i + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial z^2} + 4(p-1) \times \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r \psi_i) \right] - \frac{\text{Re}_\omega}{h} \left[\frac{\partial}{\partial z} (L \psi_{i-1}) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \psi_i) - r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{L \psi_i}{r} \right) \frac{\partial \psi_{i-1}}{\partial z} \right] = 2 \frac{\text{Re}_\omega}{h} \frac{v_i}{r} \frac{\partial v_i}{\partial z}.$$

Возможны и другие схемы итераций, однако прямой численный эксперимент показал, что использованная выше схема итерации обладает наилучшей сходимостью по параметрам.

Значения v_φ и ψ_φ определяются разложением в ряды по двум полным системам функций (по радиусу – функции Бесселя, по высоте сосуда – тригонометрические и комбинация тригонометрических и гиперболических функций), удовлетворяющим граничным условиям (14):

$$v_\varphi = \sum_{m,n} C_{mn} J_1(\beta_m r) \cos \gamma_n z, \quad (16)$$

$$\psi_\varphi = \sum_{m,n} D_{mn} [J_1(\lambda_m r) + A_m I_1(\lambda_m r)] \times (\sin \alpha_n z + B_n \text{sh } \alpha_n z), \quad (17)$$

где β_m – корни уравнения

$$J_1(\beta_m) = 0;$$

γ_n – корни уравнения

$$\cos \gamma_n = 0,$$

т. е. $\gamma_n = (n - 1/2)\pi$;

λ_m – корни уравнения

$$J_1(\lambda_m) I_1'(\lambda_m) - J_1'(\lambda_m) I_1(\lambda_m) = 0;$$

α_n – корни уравнения

$$\sin \alpha_n \text{ch } \alpha_n - \cos \alpha_n \text{sh } \alpha_n = 0;$$

$$A_m = -J_1(\lambda_m) / I_1(\lambda_m); \quad B_n = -\sin \alpha_n / \text{sh } \alpha_n.$$

При разложении по координате z учитывалось, что v_φ четна относительно плоскости $z = 0$, а ψ_φ – нечетна.

Вследствие худшей сходимости тригонометрических и комбинация тригонометрических и гиперболических функций в сравнении с функциями Бесселя, в расчетах использовалось 15 базисных функций по радиусу и 28 – по высоте сосуда [14]. Оказалось, что в области значений $\text{На}_d > 1$ эта мера недостаточно эффективна для получения достаточно гладких профилей азимутальной скорости по координате z . Введение в двойной ряд (16) так называемого множителя сходимости σ_n [15, с. 575] значительно повысило гладкость профилей. При использовании в расчетах двадцати восьми членов ряда по координате z множитель сходимости имеет вид $\sigma_n = \sin(\gamma_n/29) / (\gamma_n/29)$. Таким образом, для нахождения коэффициентов C_{mn} в разложении для азимутальной скорости в первом уравнении системы (15) использовалось разложение (16), а значения азимутальной скорости для подстановки во второе уравнение системы (15) по уже полученным C_{mn} рассчитывались по формуле

$$v_\varphi = \sum_{m,n} C_{mn} J_1(\beta_m r) \sigma_n \cos \gamma_n z. \quad (18)$$

Подставляя разложения (16)–(18) в систему уравнений (15) и выполняя формальную процедуру метода Галеркина, окончательно получаем следующую систему уравнений для нахождения коэффициентов разложений C_{mn} и D_{mn} :

$$\sum_{m,n} C_{mn}^i \left\{ \left[\beta_m^2 + (\gamma_n/h)^2 \right] I_{1mnij} + \text{На}_d^2 I_{2mnij} - \frac{\text{Re}_\omega}{h} \left(\gamma_n \sum_{k,l} D_{kl}^{i-1} \lambda_k I_{3mnijkl} + \beta_m \sum_{k,l} D_{kl}^{i-1} \alpha_l I_{4mnijkl} \right) \right\} = \text{На}_d^2 I_{5ij},$$

$$\sum_{m,n} D_{mn}^i \left\{ \left[\lambda_m^4 + (\alpha_n/h)^4 \right] I6_{mni} + \right. \quad (19)$$

$$+ 2(\lambda_m \alpha_n/h)^2 I7_{mni} + (\text{Ha}_d \alpha_n/h)^2 I8_{mni} +$$

$$+ 2\text{Ha}_d^2 \lambda_m [\lambda_m I9_{mni} - 2(p-1) I10_{mni}] +$$

$$+ \frac{\text{Re}_\omega}{h} \left[\lambda_m \sum_{k,l} D_{kl}^{i-1} \alpha_l \left(\lambda_k^2 I11_{mnikl} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\alpha_l^2}{h^2} I12_{mnikl} \right) + \lambda_m \sum_{k,l} D_{kl}^{i-1} \alpha_l \times \right.$$

$$\left. \left. \times \left(\lambda_m^2 I13_{mnikl} + \frac{\alpha_n^2}{h^2} I14_{mnikl} \right) \right] \right\} =$$

$$= -\frac{2\text{Re}_\omega}{h} \sum_{k,l,m,n} C_{kl}^i C_{mn}^i \sigma_l \sigma_n \gamma_n I15_{klmni},$$

где

$$I1_{mni} = \int_0^1 r J_1(\beta_m r) J_1(\beta_i r) dr \times$$

$$\times \int_{-1}^1 \cos \gamma_n z \cos \gamma_j z dz =$$

$$= \begin{cases} 0, & m \neq i, \quad n \neq j, \\ 1/2 J_0^2(\beta_m), & m = i, \quad n = j, \end{cases}$$

$$I2_{mni} = \int_0^1 r^{2p-1} J_1(\beta_m r) J_1(\beta_i r) dr \times$$

$$\times \int_{-1}^1 \cos \gamma_n z \cos \gamma_j z dz = \begin{cases} 0, & n \neq j, \\ I2A_{mi}, & n = j, \end{cases}$$

$$I3_{mnikl} = \int_0^1 r J_1(\beta_m r) J_1(\beta_i r) BJ0(\lambda_k r) dr \times$$

$$\times \int_{-1}^1 \sin \gamma_n z \cos \gamma_j z SP(\alpha_l z) dz = I3A_{mik} I3B_{njl},$$

$$I4_{mnikl} = \int_0^1 r J_0(\beta_m r) J_1(\beta_i r) BJ1P(\lambda_k r) dr \times$$

$$\times \int_{-1}^1 \cos \gamma_n z \cos \gamma_j z CP(\cos \alpha_l z) dz = I4A_{mik} I4B_{njl},$$

$$I5_{ij} = \int_0^1 r^{2p} J_1(\beta_i r) dr \int_{-1}^1 \cos \gamma_j z dz = I5A_i 2 \sin \gamma_j / \gamma_j,$$

$$I6_{mni} = \int_0^1 r BJ1P(\lambda_m r) BJ1P(\lambda_i r) dr \times$$

$$\times \int_{-1}^1 SP(\alpha_n z) SP(\alpha_j z) dz =$$

$$= \begin{cases} 0, & m \neq i, \quad n \neq j, \\ I6A_m I6B_n, & m = i, \quad n = j, \end{cases}$$

$$I7_{mni} = \int_0^1 r BJM1(\lambda_m r) BJ1P(\lambda_i r) dr \times$$

$$\times \int_{-1}^1 SM(\alpha_n z) SP(\sin \alpha_j z) dz = I7A_{mi} I7B_{nj},$$

$$I8_{mni} = \int_0^1 r^{2p-1} BJP1(\lambda_m r) BJ1P(\lambda_i r) dr \times$$

$$\times \int_{-1}^1 SM(\alpha_n z) SP(\sin \alpha_j z) dz = I8A_{mi} I7B_{nj},$$

$$I9_{mni} = \int_0^1 r^{2p-1} BJM1(\lambda_m r) BJ1P(\lambda_i r) dr \times$$

$$\times \int_{-1}^1 SP(\alpha_n z) SP(\sin \alpha_j z) dz =$$

$$= \begin{cases} 0, & n \neq j, \\ I9A_m I6B_n, & n = j, \end{cases}$$

$$I10_{mni} = \int_0^1 r^{2p-2} BJ0(\lambda_m r) BJ1P(\lambda_i r) dr \times$$

$$\times \int_{-1}^1 SP(\alpha_n z) SP(\sin \alpha_j z) dz =$$

$$= \begin{cases} 0, & n \neq j, \\ I10A_m I6B_n, & n = j, \end{cases}$$

$$I11_{mnikl} = \int_0^1 r BJ0(\lambda_m r) BJ1P(\lambda_i r) \times$$

$$\times BJ1M(\lambda_k r) dr \int_{-1}^1 SP(\alpha_n z) SP(\alpha_j z) \times$$

$$\times CP(\alpha_l z) dz = I11A_{mik} I11B_{njl},$$

$$I12_{mni jkl} = \int_0^1 r B J_0(\lambda_m r) B J_1 P(\lambda_i r) \times \\ \times B J_1 P(\lambda_k r) dr \int_{-1}^1 S P(\alpha_n z) S P(\alpha_j z) \times \\ \times C M(\alpha_l z) dz = I12 A_{mik} I12 B_{njl},$$

$$I13_{mni jkl} = \int_0^1 r B J_2 P(\lambda_m r) B J_1 P(\lambda_i r) \times \\ \times B J_1 P(\lambda_k r) dr \int_{-1}^1 S P(\alpha_n z) S P(\alpha_j z) \times \\ \times C P(\alpha_l z) dz = I13 A_{mik} I11 B_{njl},$$

$$I14_{mni jkl} = \int_0^1 r B J_2 M(\lambda_m r) B J_1 P(\lambda_i r) \times \\ \times B J_1 P(\lambda_k r) dr \int_{-1}^1 S M(\alpha_n z) S P(\alpha_j z) \times \\ \times C P(\alpha_l z) dz = I14 A_{mik} I14 B_{njl},$$

$$I15_{klmni j} = \int_0^1 J_1(\beta_k r) J_1(\beta_m r) B J_1 P(\lambda_i r) dr \times \\ \times \int_{-1}^1 \cos \gamma_l z \sin \gamma_n z S P(\alpha_j z) dz = I15 A_{kmi} I3 B_{nlj},$$

$$B J_0(\lambda_k r) = J_0(\lambda_k r) + A_k I_0(\lambda_k r),$$

$$B J_1 P(\lambda_k r) = J_1(\lambda_k r) + A_k I_1(\lambda_k r),$$

$$B J_1 M(\lambda_k r) = J_1(\lambda_k r) - A_k I_1(\lambda_k r),$$

$$B J_2 P(\lambda_k r) = J_2(\lambda_k r) + A_k I_2(\lambda_k r),$$

$$B J_2 M(\lambda_k r) = J_2(\lambda_k r) - A_k I_2(\lambda_k r),$$

$$S P(\alpha_k z) = (\sin \alpha_l z + B_l \text{sh } \alpha_l z),$$

$$S M(\alpha_k z) = (\sin \alpha_l z - B_l \text{sh } \alpha_l z),$$

$$C P(\alpha_k z) = (\cos \alpha_l z + B_l \text{ch } \alpha_l z),$$

$$C M(\alpha_k z) = (\cos \alpha_l z - B_l \text{ch } \alpha_l z).$$

Все интегралы вычислялись по методу Симпсона. На каждом шаге итерации задача сводилась к последовательному решению двух систем (19) линейных алгебраических уравнений 420-го порядка, соответствующих первому и второму уравнениям исходной системы (15). Системы уравнений решались на ЭВМ методом отражения.

Оценка сходимости итерации осуществлялась по относительным среднеквадратичным погрешностям v_φ и ψ_φ :

$$S_i(v_\varphi) = \left[\frac{\sum_{m,n} (C_{mn}^i - C_{mn}^{i-1})^2 \int_0^1 \int_{-1}^1 r \times \times J_1^2(\beta_m r) \cos^2 \gamma_n z dr dz}{\sum_{m,n} (C_{mn}^i)^2 \int_0^1 \int_{-1}^1 r \times \times J_1^2(\beta_m r) \cos^2 \gamma_n z dr dz} \right]^{1/2} = \\ = \left[\frac{\sum_{m,n} (C_{mn}^i - C_{mn}^{i-1})^2 J_0^2(\beta_m)}{\sum_{m,n} (C_{mn}^i)^2 J_0^2(\beta_m)} \right]^{1/2},$$

$$S_i(\psi_\varphi) = \left[\frac{\sum_{m,n} (D_{mn}^i - D_{mn}^{i-1})^2 \int_0^1 \int_{-1}^1 r \times \times [B J_1 P(\lambda_m r)]^2 (S P(\alpha_n z))^2 dr dz}{\sum_{m,n} (D_{mn}^i)^2 \int_0^1 \int_{-1}^1 r \times \times [B J_1 P(\lambda_m r)]^2 (S P(\alpha_n z))^2 dr dz} \right]^{1/2} = \\ = \left[\frac{\sum_{m,n} (D_{mn}^i - D_{mn}^{i-1})^2 I6 A_m I6 B_n}{\sum_{m,n} (D_{mn}^i)^2 I6 A_m I6 B_n} \right]^{1/2}.$$

, Вычисления показали, что итерация перестает сходиться как только параметры задачи приближаются к значениям критических параметров, соответствующих возникновению гидродинамической неустойчивости в задаче о стационарной неустойчивости МГД-вращения в бесконечно длинном цилиндрическом сосуде [4]. Такая связь между сходимостью итерации в задаче для сосуда конечной длины и переходом к неустойчивости в случае бесконечно длинного цилиндра, по-видимому, позволяет по сходимости итерации оценивать устойчивость течения в цилиндре конечной длины. Причем, поскольку система уравнений (13) нелинейная и никаких ограничений на степень малости ψ_φ не накладываемся (известно, что вихри на торцах имеют конечную интенсивность), такая оценка будет, по-видимому, характеризовать возникновение нелинейной неустойчивости при естественных конечных возмущениях.

На ЭВМ были проведены необходимые вычисления. Для нахождения значений параметров, соответствующих предельной сходимости итерации, была использована следующая ступенчатая вычислительная схема. Вначале задавались такие значения параметров, при которых итерация заведомо сходилась. Область параметров, соответствующих сходимости итерации, располагалась, предположительно, таким образом, что окаймляла с внешней стороны кривые нейтральной устойчивости (случай бесконечно длинного цилиндра) и находилась на некотором расстоянии от них. Значения параметров Re_ω и Ha_d выбирались из этой области, причем в дальнейшем значения Re_ω фиксировались, а значения Ha_d менялись. Для выбранной пары значений параметров Re_ω и Ha_d проверялась сходимость итерационного процесса. Собственно, уже 2-й – 3-й шаг итерации позволял судить о ее сходимости, и в случае ее отсутствия необходимо было изменить значения Ha_d в ту или иную сторону, чтобы обеспечить сходимость итерации. Итерация начиналась со значения $\psi_0 = 0$. После выполнения 5 – 7 шагов итерации записывались значения полученных при этом значений азимутальной скорости и φ -компоненты векторного потенциала скорости. Далее значение Ha_d изменялось на 1% в сторону ухудшения сходимости итерации и выполнялся новый расчет, но при этом в качестве начальных значений для v_φ и ψ_φ использовались уже полученные в предыдущем расчете значения. Вычисления продолжались до тех пор, пока на очередном этапе даже малое изменение значения Ha_d приводило к расходимости итерации. Тогда процесс вычислений прекращался и в качестве критического значения выбиралось предыдущее значение Ha_d , при котором итерация еще сходилась. Приближаясь таким образом к соответствующей кривой нейтральной устойчивости, мы получали значения параметров, при которых итерационный процесс еще сходится (при ненулевых начальных v_φ и ψ_φ), хотя если при этих параметрах просто попытаться начать итерацию с нулевыми v_φ и ψ_φ , то итерационный процесс обязательно будет расходящимся¹. Очевидно, в системе уравнений (19) имеется внутренняя согласованность, позволяющая описанным выше способом подойти возможно ближе к значениям параметров, соответствующим нейтральной устойчиво-

¹Здесь можно провести аналогию с известным в гидромеханике “затянутым” ламинарным режимом течения, когда в эксперименте путем удаления возмущений или уменьшения их начальной интенсивности удается искусственно затянуть ламинарный режим в область достаточно больших значений числа Рейнольдса.

сти для бесконечно длинного цилиндра.

3. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Используя описанный выше прием последовательного изменения параметров течения, удалось уточнить значения предельных параметров течения, при которых итерационный процесс еще сходится [14]. Эти значения для различных p и h приведены в табл.1; соответствующие кривые показаны на рис. 1.

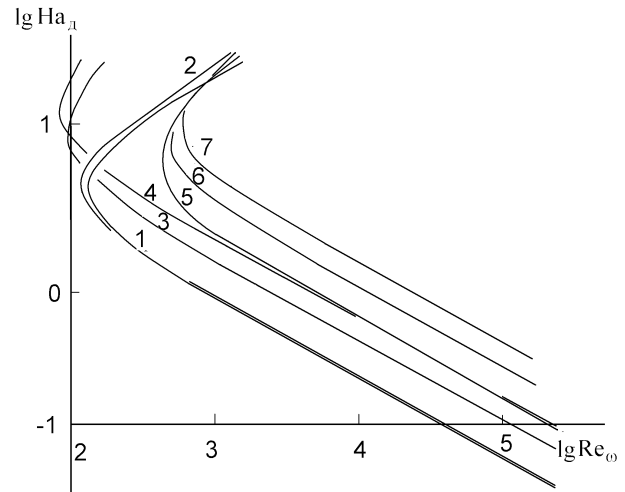


Рис. 1. Области структурных переходов: 1–4 – кривые, соответствующие предельной сходимости итерационного процесса (цилиндр конечной длины), 1 – $p = 1, h = 10$; 2 – $p = 1, h = 4$; 3 – $p = 2, h = 10$; 4 – $p = 3, h = 10$. 5–7 – кривые нейтральной устойчивости для бесконечно длинного цилиндра [4], 5 – $p = 1; 6 – p = 2; 7 – p = 3$

Кривые 1–4, соответствующие предельной сходимости итерации, ведут себя подобно кривым нейтральной устойчивости 5–7, полученным при исследовании стационарной неустойчивости по отношению к бесконечно малым возмущениям для случая бесконечно длинного цилиндра. Для малых Ha_d наклоны кривых примерно совпадают, но предельная сходимость итерации наступает при меньших числах Гартмана, чем при потере устойчивости одномерного течения в случае бесконечно длинного цилиндра. С учетом высказанного в [12] предположения о том, что по сходимости итерации можно косвенно оценивать возникновение нелинейной неустойчивости при естественных конечных возмущениях (вихри на торцах цилиндра имеют конечную интенсивность), можно утверждать, что для малых Ha_d нелинейная бифурка-

Табл 1. Значения параметров, соответствующие предельной сходимости итерации

$p = 1, h = 10$		$p = 1, h = 4$		$p = 2, h = 10$		$p = 3, h = 10$	
Re_ω	Ha_d	Re_ω	Ha_d	Re_ω	Ha_d	Re_ω	Ha_d
250000	0.0437	250000	0.0424	250000	0.0754	250000	0.107
100000	0.0688	100000	0.0668	100000	0.119	100000	0.168
50000	0.0975	50000	0.0946	50000	0.169	50000	0.239
10000	0.220	10000	0.212	10000	0.379	10000	0.531
5000	0.311	5000	0.301	5000	0.537	5000	0.755
3000	0.403	3000	0.390	3000	0.696	3000	0.977
1000	0.713	1000	0.689	2000	0.856	2000	1.20
500	1.05	500	1.01	1000	1.24	1000	1.71
400	1.20	400	1.15	500	1.83	500	2.48
300	1.44	300	1.37	400	2.09	400	2.81
200	1.93	200	1.83	300	2.52	300	3.32
150	2.55	150	2.33	200	3.27	200	4.28
140	2.81	140	2.50	150	4.17	150	5.32
127	3.69	130	2.73	120	5.05	140	5.62
127	3.91	115	3.57	100	6.77	130	6.04
140	5.04	115	4.35	91	8.78	120	6.56
150	5.49	130	5.62	91	9.03	110	7.26
200	7.20	140	6.17	100	12.4	100	7.93
300	10.4	150	6.64	110	15.6	90	9.20
400	12.3	200	8.53	120	18.1	84	14.0
500	14.2	300	11.2	130	20.3	84	14.7
1000	21.0	400	13.8	140	22.4	90	20.2
1500	26.2	500	16.1	150	24.5	100	22.3
-	-	1000	25.8	160	26.0	110	26.8

ция предшествует линейному переходу. Получает объяснение и тот факт, что в случае более короткого цилиндра ($h = 4$) для малых Ha_d нелинейная неустойчивость наступает при меньших числах Гартмана по сравнению с более длинным цилиндром ($h = 10$), так как в более коротком цилиндре торцевой вихрь занимает больший объем и вносит большее возмущение в азимутальное вращение. В области значений $Ha_d > 1$ кривые предельной сходимости имеют перегибы. Возникновение перегибов, как и в [3, 4], можно объяснить влиянием двух факторов, противоположным образом влияющих на устойчивость первичного азимутального течения. С одной стороны, при увеличении числа Гартмана возрастает средняя скорость первичного течения [16], что ведет к уменьшению устойчивости (ясно, что течение становится абсолютно устойчивым, если средняя скорость первичного течения стремится к нулю). С другой стороны, смещение максимума скорости к стенке сосуда, наблюдающееся при увеличении Ha_d и связанное с образованием гартмановского пограничного слоя, приводит к уменьшению зоны неустойчивости и, таким образом, повышает устой-

чивость первичного течения. Очевидно, при возрастании числа Гартмана (начиная от малых значений $Ha_d \sim 0.1$) сначала преобладает первый фактор – увеличение средней скорости первичного течения, в результате чего происходит понижение устойчивости. Однако при увеличении Ha_d средняя скорость жидкости приближается к постоянному значению, причем при увеличении порядка поворотной симметрии вращающегося магнитного поля кривая средней скорости выходит на насыщение при больших числах Гартмана. Начиная с некоторых значений числа Гартмана ($Ha_d \sim 5 - 10$, для больших p – большие Ha_d), определяющим становится второй фактор – смещение максимума к стенке сосуда и устойчивость первичного течения соответственно повышается. Слева от точек перегиба располагается область абсолютной устойчивости по Re_ω относительно конечных возмущений. Сравнение с результатами работы [4] показывает, что в случае конечных возмущений бифуркация возникает при меньших Re_ω . Выше перегибов кривая предельной сходимости итерации для $p = 1$ и $h = 4$ проходит выше кривой для $p = 1$ и $h = 10$, т. е., что совершенно логично,

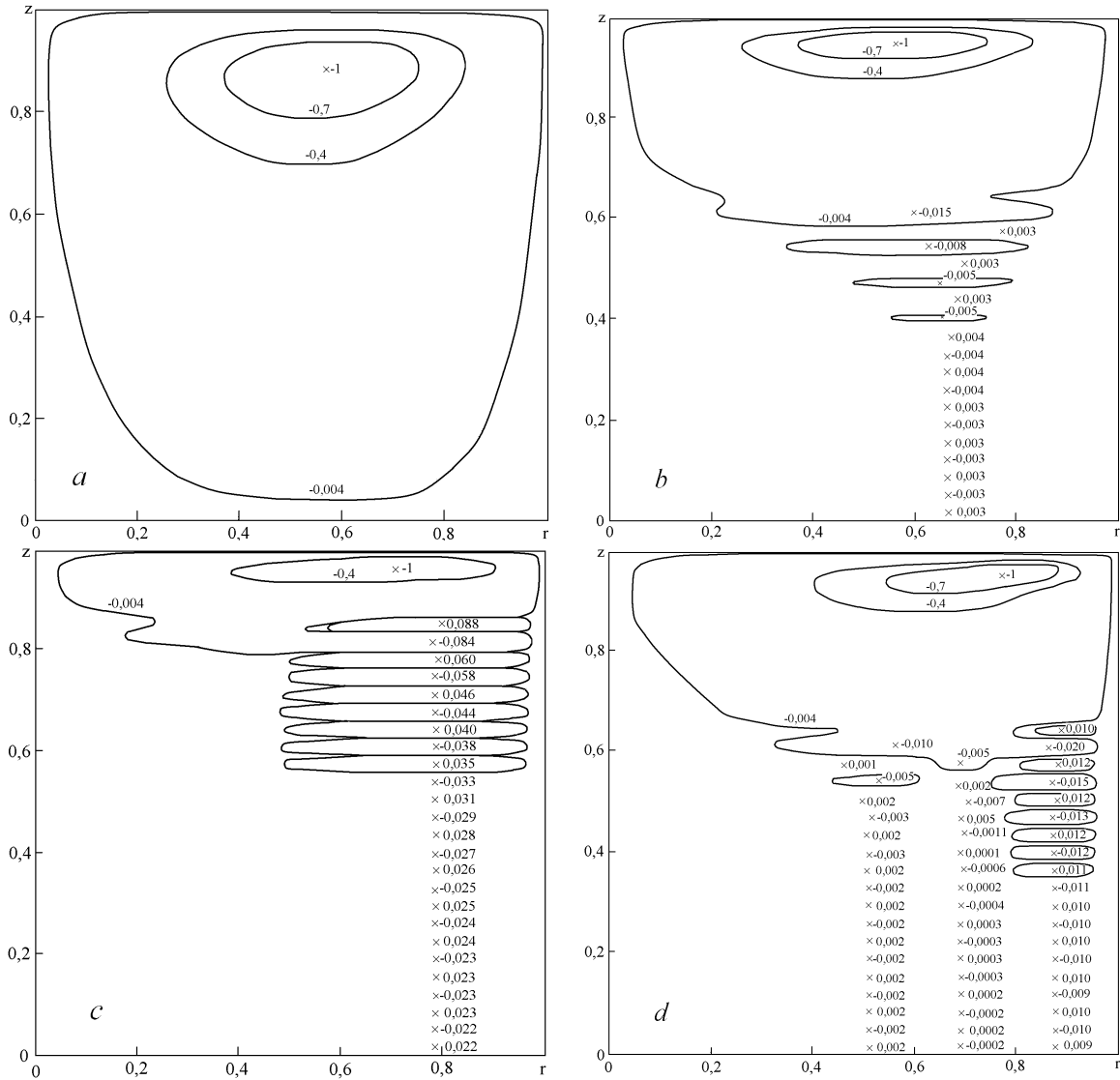


Рис. 2. Эволюция гидродинамической структуры (везде $p = 1$ и $Re_\omega = 500$)
 $a - h = 4, Na_d = 1.01$; $b - h = 10, Na_d = 1.05$; $c - h = 10, Na_d = 14.2$; $d - h = 4, Na_d = 16.1$

нелинейная неустойчивость в этом случае наступает для более короткого цилиндра при больших числах Гартмана. Кривая предельной сходимости для $p = 1$ и $h = 10$ при больших числах Гартмана пересекает соответствующую кривую нейтральной устойчивости. Точка пересечения соответствует значениям $Re_\omega \sim 800$ и $Na_d \sim 18.3$. Этот факт, по-видимому, говорит о том, что, начиная с таких значений этих параметров, линейный переход будет предшествовать нелинейной бифуркации. Численный эксперимент позволил изучить возникающие при этом пространственные структуры течения и проследить их эволюцию при изменении параметров течения. При малых значениях Na_d

определяющее влияние на структуру оказывает относительная высота сосуда. При $h \sim 4$ на половине длины сосуда возникает один интенсивный торцевой вихрь (рис. 2, a). При малых числах Гартмана и $h > 5$ происходит оттеснение этого вихря к торцу и появление в центральной по высоте зоне слабых пристеночных меридиональных вихрей чередующегося направления вращения, причем зарождаются эти вихри из торцевого вихря, отделяясь от него парами. С ростом h число этих малых вихрей увеличивается (рис. 2, b), а их относительные размеры приближаются к соответствующим размерам вихрей Тейлора, возникающих в бесконечно длинном цилиндре [4]. Одновременное

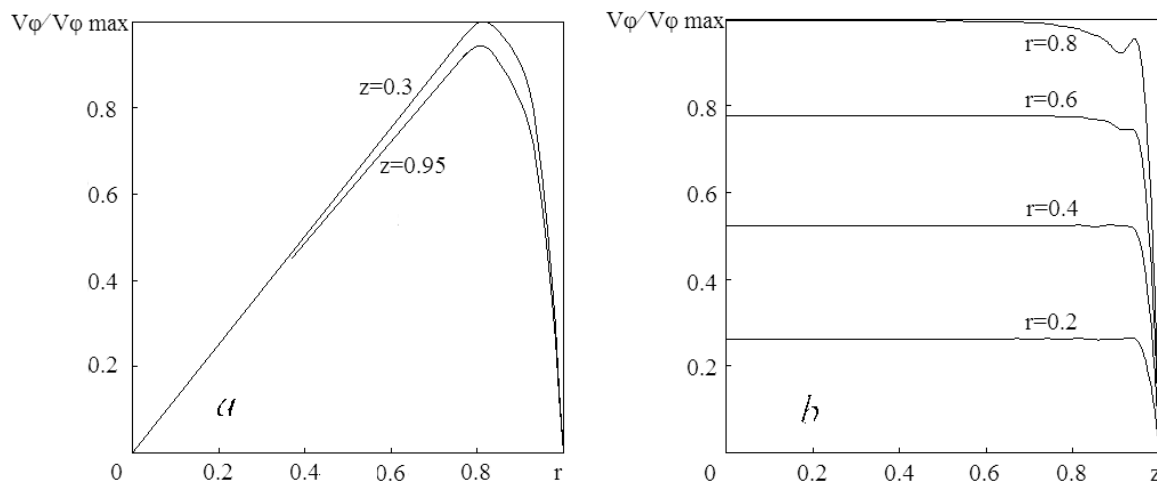


Рис. 3. Радиальные (а) и осевые (б) профили азимутальной скорости. Значения параметров течения – те же, что и на рис. 2, d

увеличение h и Na_d приводит к относительному уменьшению высоты торцевого вихря и увеличению интенсивности пристеночных меридиональных вихрей (рис. 2, c). Увеличение числа Гартмана при $h = 4$ вначале приводит к появлению под торцевым вихрем цепочки слабых меридиональных вихрей чередующегося направления вращения с центрами при $r \sim 0.55$. При $Na_d > 7$ появляется вторая цепочка сравнимых по интенсивности вихрей с центрами при $r \sim 0.85$. При $Na_d > 15$ между этими двумя цепочками появляется еще одна цепочка сравнительно слабых по интенсивности вихрей с центрами при $r \sim 0.68$ (рис. 2, d). При этом пристеночная цепочка смещается ближе к стенке (с центрами вихрей при $r \sim 0.88$), а интенсивность ее вихрей возрастает. Увеличение числа Гартмана во всех случаях приводит к смещению к боковой поверхности как центра торцевого вихря, так и центров лежащей под ним цепочки пристеночных меридиональных вихрей. Из рис. 2, b–d видно, что меридиональные вихри в центральной части сосуда возникают путем отпочкования от торцевого вихря. При этом во всех случаях интенсивность торцевого вихря существенно превышает интенсивность вихрей в центральной по высоте сосуда области.

Отмеченные выше тенденции эволюции гидродинамической структуры наблюдаются и при изменении порядка поворотной симметрии вращающегося магнитного поля. Торцевой вихрь при этом незначительно деформируется и несколько разворачивается таким образом, что полнее заполняет угловое пространство между боковой и торцевой поверхностями цилиндра.

Расчет радиальных профилей азимутальной скорости (рис. 3, a) показал, что практически по всей высоте цилиндра значение скорости остается постоянным, уменьшаясь к торцам. Распределение скорости при малых Na_d носит параболический характер, приближаясь к профилю типа “твердого” вращения при увеличении чисел Гартмана. Максимум скорости смещается при этом к боковой поверхности цилиндра. Распределение азимутальной скорости по длине сосуда (рис. 3, b) показало, что у торцов цилиндра в месте локализации торцевого вихря возникает двойной ламинарный пограничный слой, причем толщина прилегающего к торцу подслоя совпадает с расстоянием от центра вихря до торца. При малых числах Гартмана толщина внутреннего слоя достигает ~ 0.3 полудлины сосуда, уменьшаясь до ~ 0.2 при увеличении чисел Гартмана. Следует отметить, что двойной ламинарный слой возникает именно в области расположения торцевого вихря, смещаясь вместе с вихрем при изменении параметров течения. По мере смещения вдоль радиуса от центра вихря к его периферии этот эффект уменьшается, и за пределами вихря на торце цилиндра существует обыкновенный ламинарный пограничный слой. О существовании на торцах двух ламинарных слоев указано в работах [17, 18].

Соотношение значений азимутальной и вихревой скоростей в торцевом вихре, полученное в расчетах, удовлетворительно согласуется с экспериментом Робинсона и Ларсона [19].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате численного эксперимента уточнены значения параметров, при которых возможно решение методом итераций задачи об МГД-вращении в цилиндре конечной длины. Результаты численного моделирования позволяют с большой степенью достоверности утверждать, что в средней части достаточно длинного сосуда возникает структура вихрей подобная тейлоровской. В предположении, что по сходимости итерации можно косвенно оценивать нелинейную устойчивость вращательного течения в сосуде конечной длины, можно утверждать, что только для случая достаточно длинного сосуда и одной пары полюсов вращающегося магнитного поля имеется тенденция перехода к мягкому характеру возбуждения. Во всех остальных случаях речь, по-видимому, может идти о жестком характере возбуждения.

Расчеты азимутальной скорости течения выявили характерную закономерность возникновения в месте локализации торцевого вихря двойного ламинарного пограничного слоя.

Полученные результаты могут быть использованы при создании МГД-сепараторов и перемешивателей в технологических процессах металлургии, литейного производства и ядерной энергетики.

1. *Burkhalter J.E., Koschmieder E.L.* Steady supercritical Taylor vortices after sudden starts // *The Physics of Fluids.*– 1974.– Vol. 17.–N 11.– P. 1925-1935.
2. *Капуста А.Б., Зибольд А.Ф.* Неустойчивость МГД вращения и ее использование в некоторых технологических процессах // *Применение магнитной гидродинамики в металлургии и литейном производстве* Сб. науч. тр. Ч. 2.– К.: Изд. ИПЛ АН УССР, 1981.– С. 39-41.
3. *Капуста А.Б., Зибольд А.Ф.* О стационарной неустойчивости осесимметричного течения жидкости во вращающемся магнитном поле // *Магнитная гидродинамика.*– 1977.– N 3.– С. 67-76.
4. *Капуста А.Б., Зибольд А.Ф.* Влияние симметрии вращающегося магнитного поля на устойчивость стационарного осесимметричного течения // *Магнитная гидродинамика.*– 1981.– N 4.– С. 134-136.
5. *Капуста А.Б., Зибольд А.Ф.* Стационарная неустойчивость осесимметричного течения, возбуждаемого высокочастотным вращающимся магнитным полем // *Магнитная гидродинамика.*– 1983.– N 1.– С. 77-81.
6. *Зибольд А.Ф.* Стационарная неустойчивость осесимметричного течения жидкости в слабом вращающемся магнитном поле // *Магнитная гидродинамика.*– 1984.– N 2.– С. 61-68.
7. *Зибольд А.Ф.* Об одной простой постановке задачи на устойчивость в слабом вращающемся магнитном поле // *Магнитная гидродинамика.*– 1984.– N 3.– С. 132-133.
8. *Dahlberg E.* On the action of a rotating magnetic field on a conducting liquid. AB Atomenergi Rep. AE-447.– Studsvik, Sweden: , 1972.– 60 p.
9. *Moffatt H.K.* Some problems in the magnetohydrodynamics of liquid metals // *ZAMM.*– 1978.– **58 (6).**– P. 65-71.
10. *Капуста А.Б.* Двухмерное нестационарное течение проводящей жидкости, возбуждаемое вращающимся магнитным полем // *Магнитная гидродинамика.*– 1977.– N 3.– С. 77-83.
11. *Капуста А.Б., Зибольд А.Ф.* О трехмерных эффектах, возникающих в сосуде ограниченной длины под действием вращающегося магнитного поля // *Магнитная гидродинамика.*– 1982.– N 4.– С. 57-63.
12. *Zibold A.* Estimation of the MHD-rotation stability in a cylinder of finite length // *Proceedings of the Third International Conference on Transfer Phenomena in MagnetoHydroDynamic and Electroconducting Flows.* Vol. 2.– Aussois, France, 1997.– P. 427-432.
13. *Orszag S.A.* Numerical simulation of incompressible flows within simple boundaries: accuracy // *J. Fluid Mech.*– 1971.– Vol. 49.–Part 1.– P. 75-112.
14. *Zibold A.F.* Evolution of the hydrodynamical structure arising in the cylinder of the limited length under action of the rotating magnetic field // *Proceedings of the 7th PAMIR International Conference on Fundamental and Applied MHD.* Vol. 1.– Presqu'île de Giens, France, 2009.– P. 467-472.
15. *Арфкен Т.* Математические методы в физике. Пер. с англ.– М.: Атомиздат, 1970.– 712 с.
16. *Капуста А.Б., Зибольд А.Ф.* Влияние симметрии вращающегося магнитного поля на динамические характеристики ламинарного течения // *Магнитная гидродинамика.*– 1978.– N 1.– С. 143-146.
17. *Ingham D. B.* Magnetohydrodynamic flow in a container // *The Physics of Fluids.*– 1969.– Vol. 12.–N 2.– P. 389-396.
18. *Капуста А. Б., Дремов В. В., Доронин В. И.* Экспериментальное исследование движения ртути во вращающемся магнитном поле // *Техническая электромагнитная гидродинамика.* Вып. 20 (4).– Донецк: Книжное изд-во, 1970.– С. 187-191.
19. *Robinson T., Larsson K.* An experimental investigation of a magnetically driven rotating liquid-metal flow // *J. Fluid Mech.*– 1973.– Vol. 60.–Part 4.– P. 641-664.