

УДК 533.6.013:577.31

# ИНЕРЦИОННО–ВИХРЕВОЙ ПРИНЦИП ГЕНЕРАЦИИ УСИЛИЙ НА КРЫЛЬЯХ НАСЕКОМЫХ

А. В. ШЕХОВЦОВ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 06.10.2009 ◊ Пересмотрено 02.11.2010

Исследован принцип создания подъемных сил, возникающих на крыльях насекомых. Для численного моделирования процесса броска (основной фазы механизма Вейс-Фо) применялся усовершенствованный метод дискретных вихрей (УМДВ), обобщенный для вязкой вихревой среды, и метод расчета нестационарного поля давления (обобщенная формула Коши-Лагранжа для вязкой вихревой среды). Для случаев мгновенного и плавного углового старта крыльев при числах Рейнольдса, равных  $10^2$  и  $10^6$ , проведены специальные исследования для выяснения вклада сил различной природы в формирование главного вектора внешних сил на крыльях. Обнаружено, что при уменьшении числа Рейнольдса вклад сил инерционной природы возрастает, вклад сил вихревой природы уменьшается, однако в случае мгновенного старта крыльев он все же может составлять две трети от всей нормальной силы в конце броска. Наоборот, при плавном старте доминируют инерционные силы, а их вклад в конце броска составляет 70% – 80%. Вклад сил циркуляционной природы мал во всех случаях.

Досліджено принцип утворення підйомних сил, що виникають на крилах комах. Для чисельного моделювання процесу кидка (головної фази механізму Вейс-Фо) застосовувався удосконалений метод дискретних вихорів (УМДВ), узагальнений для в'язкого вихрового середовища, та метод розрахунку нестационарного поля тиску (узагальнена формула Коші-Лагранжа для в'язкого вихрового середовища). Для випадків миттєвого та плавного кутового старту крил при числах Рейнольдса, що дорівнюють  $10^2$  та  $10^6$ , було проведено спеціальні дослідження для з'ясування внеску сил різної природи у формування головного вектору зовнішніх сил на крилах. З'ясовано, що при зменшенні числа Рейнольдса внесок сил інерційної природи зростає, внесок сил вихрової природи зменшується, однак у випадку миттєвого старту крил він все-таки може складати дві третини від усієї нормальної сили наприкінці кидка. Навпаки, при плавному старті домінують інерційні сили, а їх внесок наприкінці кидка складає 70% – 80%. Внесок сил циркуляційної природи малий в усіх випадках.

The principle of creation of the lift arising on wings of insect was investigated. The improved method of discrete vortices (IMDV) generalized for a viscous vortical medium and also a method of calculation of a non-steady field of pressure (generalized formula Cauchy-Lagrange for a viscous vortical medium) to numerical modeling process of fling (the main phase of Weis-Fogh mechanism) are applied. For cases of instant and smooth start of wings at Reynolds number equal  $10^2$  and  $10^6$ , for finding the contribution of forces of the various nature in formation of the main vector of external forces on wings, the special researches are carried out. It was revealed that at decreasing of Reynolds number the contribution of forces of the inertial nature grows, the contribution of forces of the vortical nature decreases, however in case of instant start of wings it can constitute two thirds of all normal force in the end of fling. On the contrary, inertial forces dominate over smooth start, and their contribution makes 70% – 80% in the end of fling. The contribution of forces of the circulating nature is small in all cases.

## ВВЕДЕНИЕ

Исследования нестационарной аэродинамики полета насекомых, для которой характерны сверхкритические углы атаки и необычайно сложные законы движения крыльев, в последнее десятилетие переживают стремительный прогресс. Однако вместе с открытиями, отказом от классических парадигм, он чередуется новыми заблуждениями и ошибочными гипотезами [1, 2]. Причина этого лежит в том, что для понимания аэродинамической природы сил, возникающих на крыльях насекомых, необходима информация о трех компонентах этих сил – инерционной, вихревой и циркуляционной, которые сложно выделить как в численных, так и в физических экспериментах.

Данная работа является развитием исследований природы сил, возникающих при полете насекомых. Эти исследования были начаты в работе [3], опираясь на усовершенствованный метод дис-

кретных вихрей (УМДВ), обобщенный для вязких вихревых сред [4, 5], и метод расчета нестационарного поля давления для вязких вихревых сред (обобщенную формулу Коши-Лагранжа) [6, 7]. Так как насекомые машут крыльями при числах Рейнольдса  $10 < Re < 10^5$ , необходима проверка: имеет ли место установленный в [2] инерционно-вихревой принцип полета в случае вязкой среды, и если да, то какие компоненты сил преобладают.

В работе в рамках двумерного приближения будет рассматриваться начальная фаза раскрытия крыльев насекомых перед их раздвижением в горизонтальной плоскости в процессе нормального трепещущего полета (начальная фаза механизма Вейс-Фо [8]).

Для этого применим подход, который впервые был с успехом апробирован для рассматриваемого класса задач в работе [5]. Его принципиальное отличие от всех других методов заключается в том, что моделирование диффузии завихренно-

сти осуществляется не численно, а аналитически. При этом в качестве частного (базового) решения используется вихрь Лэмба–Озеена – фундаментальное решение обобщенного уравнения Гельмгольца (его автомодельное решение для случая диффузии прямолинейной вихревой нити) [9].

Сама идея использования в качестве базового, фундаментального решения обобщенного уравнения Гельмгольца для вязкой вихревой среды (вихря Лэмба–Озеена) не нова – первые попытки ее воплощения были осуществлены Шифером, Эскинази [10], затем Белоцерковским [11], Леонардом [12]. Грингард [13] провел анализ сходимости данного метода моделирования дисперсии завихренности (он назвал его "метод расплывающегося ядра") и показал, что метод абсолютно правильно моделирует процесс диффузии завихренности, но некорректно моделирует ее конвекцию. Однако он не сделал никаких оценок точности метода. В то же время, Кида, Накаима и Сумицу [14] показали, что данный метод достаточно точный, чтобы решать практические задачи.

Как известно, вследствие нелинейности обобщенного уравнения Гельмгольца, суперпозиция его частных решений может не являться общим решением, что формально делает задачу некорректной.

Большинство важнейших практических задач некорректны по Адамару (при больших числах Рейнольдса "включается" действие нелинейности и начинают проявляться свойства решения, несовместимые с определением корректности), но, тем не менее, они успешно решаются современными численными методами.

Автором было показано [4], что для решения некорректных начально–краевых задач с помощью метода дискретных вихрей (МДВ) нельзя использовать традиционные методы, предназначенные для решения задачи Коши. Вместо них нужно регуляризовать решение с помощью сглаживающего функционала, уменьшающего локальные ошибки дискретизации вихревой пелены, которые являются ошибками входных данных задачи Коши и превосходят ошибки усечения на 1–4 порядка.

Это дало возможность решить основную проблему МДВ – существенное (до 50%) завышение значений нормальных сил на пластине для идеальной среды [15]. Усовершенствованный метод дискретных вихрей открыл также путь для обобщения на случай вязких вихревых течений: к примеру, для неустановившегося отрывного обтекания пластины полученные значения нормальной силы оказались в пределах погрешности экспери-

мента для всего диапазона чисел Рейнольдса и всех закритических углов атаки [15]. Уточнение МДВ касалось именно расчета конвективной скорости, что было слабым местом метода расплывающегося ядра, который грешил при нарушении осесимметричности течения, когда начинает работать конвективный член обобщенного уравнения Гельмгольца, ответственный за нелинейность.

Важно отметить, что указанное уточнение МДВ обеспечило выполнение обобщенной теоремы Гельмгольца–Пуанкаре с точностью дискретизации во времени и пространстве, которая утверждает, что для вязкого двумерного течения баротропной среды в поле консервативных сил вихревые линии заморожены в среду. Это связано с тем, что в таком случае вектор завихренности оказывается коллинеарен вектору лапласиана завихренности. Во всех других моделях вязкого вихревого течения выполнение этой теоремы нужно проверять, так как в них, как правило, отождествляются понятия "перемещение завихренности" и "перемещение вихревого элемента" (см., например, [16]). Однако на самом деле вихревые элементы должны двигаться только со скоростью вязкой двумерной несжимаемой невесомой среды, в то время как завихренность – и с конвективной скоростью среды, и со скоростью диффузии завихренности относительно самой среды, что и обеспечивает обобщенный УМДВ благодаря уточненному учету нелинейных конвективных слагаемых обобщенного уравнения Гельмгольца.

Также несомненным преимуществом непосредственного использования вихря Лэмба–Озеена для моделирования диффузии завихренности перед численным есть то, что он не требует дополнительных тестовых сравнений с такими известными аналитическими решениями, как диффузия вихревой окружности и диффузия вихревого круга [9], так как линейность обобщенного уравнения Гельмгольца в этих случаях гарантированно обеспечивает сходимость численного решения к аналитическому с увеличением числа дискретных вихрей.

Кроме этого, УМДВ, обобщенный для вязких двумерных вихревых сред, также обеспечивает:

- точное выполнение обобщенного уравнения Гельмгольца в центрах вихревых нитей и на бесконечном удалении от них;
- точное выполнение закона сохранения завихренности (закона сохранения момента импульса вихря) в пределах контуров, расширяющихся относительно среды со скоростью диффузии завихренности;

- точное выполнение обобщенного уравнения Гельмгольца для изолированных пар вихревых нитей одинаковой интенсивности, независимо от их знака, в средней точке между ними;
- быстрое уменьшение невязки (как  $\exp(-r^2)$ ) за пределами произвольных пар вихревых нитей (так как она зависит от произведения касательной скорости на градиент завихренности).

Это означает, что отклонение от точного решения обобщенного уравнения Гельмгольца в произвольном двумерном случае происходит только локально, причем эти локальные ошибки не накапливаются со временем.

Таким образом, использование в качестве базового, фундаментального решения обобщенного уравнения Гельмгольца эквивалентно предположению, что нелинейные диффузионные эффекты в вязком несжимаемом двумерном течении невосомой среды достаточно малы, влияют только на локальные характеристики поля завихренности и поэтому ими можно пренебречь.

Апробация УМДВ для класса задач о колебаниях крыла в неподвижной вязкой несжимаемой среде с ограниченным решением на кромках показала, что эта гипотеза успешно работает – получено удовлетворительное соответствие с экспериментальными и теоретическими данными других численных методов как по осредненным, так и по мгновенным кинематическим и динамическим характеристикам течения и крыла [5].

## 1. ФИЗИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О РАСКРЫТИИ КРЫЛЬЕВ НАСЕКОМЫХ В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ

Сделаем упрощающие предположения относительно свойств среды и крыльев насекомого.

Пусть вязкая среда является сплошной и обладает свойствами несжимаемости и невосомости (отсутствуют внешние объемные силы). Во всех ее точках в начальный момент времени предполагается отсутствие вихрей, а сама среда – неподвижной. Пусть в некоторой области пространства среды находятся два крыла, задние кромки которых соединены. Будем предполагать, что крылья являются бесконечно тонкими, непроницаемыми, прямолинейными и недеформируемыми. Будем рассматривать лишь средние сечения крыльев, параллельные их хордам. Влиянием эффектов трехмерности будем пренебрегать. В начальный момент времени вместо сложенных крыльев рас-

смотрим два параллельных крыла, задние кромки  $B_2$  которых соединены непроницаемой перемычкой  $s$ , длина которой принималась равной 0.2 хорды. Так как рассматривается лишь зеркально-симметричный тип движения крыльев друг относительно друга, достаточно моделировать лишь движение одного крыла  $S$  в верхней полуплоскости  $D$ , учитывая влияние второго методом зеркальных отражений относительно линии симметрии  $L$ , которая станет непроницаемой. В начальный момент времени  $t = 0$  границей рассматриваемой среды  $D$  будет совокупность  $S \cup s \cup L = S \notin D$ .

В силу того, что среда  $D$  является вязкой, на поверхности крыла  $S$  и перемычки  $s$  должно выполняться условие прилипания.

Однако экспериментальные наблюдения говорят о том, что вклад силы трения в главный вектор внешних сил на крыльях насекомых настолько мал, что им можно пренебречь. Графически это означает, что главный вектор внешних сил на крыле насекомого приближенно ему перпендикулярен, что и наблюдается на экспериментальных диаграммах сил [17].

Кроме того, известно, что во всех экспериментах с привязанными насекомыми и их моделями, подобными по числам Рейнольдса и Струхала, отрыв потока всегда происходит только с кромок их крыльев. Это указывает на то, что вторичных вихрей на крыльях насекомых не образуется.

Физические условия, которые это обеспечивают, достаточно ясны. Дело в том, что основной рабочий режим работы крыльев насекомых – это их движение под углами атаки  $40^\circ - 60^\circ$ , причем крылья находятся во вращательно-поступательном колебательном режиме при числах Рейнольдса от  $\sim 10^1$  до  $\sim 10^3$ . Такие большие углы атаки гарантированно обеспечивают отрывной режим обтекания всех кромок, что математически соответствует ограниченному решению на концах рассматриваемого интервала. Сила трения при таких больших углах резко уменьшается, а сила давления – резко возрастает. Сравнительно малые числа Рейнольдса, в свою очередь, ухудшают условия для турбулизации потока и возникновения вторичных вихрей.

Оценка соотношения сил, обусловленных давлением потока на крыло,  $C_N = 1.95 + 50/\text{Re}$  [18] (это для углов атаки  $90^\circ$ ; для рабочих углов атаки  $C_N$  уменьшается на  $\sim 15\% - 30\%$ ), и сил, обусловленных трением на одной стороне крыла (поток не попадает на другую сторону из-за его срыва со всех кромок крыла),  $C_f = 0.664/\sqrt{\text{Re}}$  (это для углов атаки  $0^\circ$ ; для рабочих углов атаки  $C_f$  уменьшае-

тятся на  $\sim 50\% - 70\%$ ), показывается, что для рабочих углов атаки и чисел Рейнольдса силы трения меньше сил давления почти на два порядка. В случае вращения крыла вокруг одной из кромки углы атаки составляют  $90^\circ$ , что приводит к еще большей диспропорции сил трения и давления.

Поэтому мы примем к рассмотрению модель обтекания крыла  $S$  со сходом слоя течения с его передней кромки  $B_1$ , что равносильно выполнению постулата Кутта–Жуковского–Чаплыгина о конечности скорости в окрестности этой кромки, а также будем пренебрегать эффектами прилипания частиц среды к поверхности вращающегося крыла и неподвижной перемычки.

При вращательном движении крыла эпора скоростей в поперечном сечении сходящего потока будет несимметричной: из-за вязкого трения между его слоями будет развиваться неустойчивость с последующим возникновением вращательного движения жидких частиц, то есть течение будет вихревым. Будем считать вихревой слой бесконечно тонким. Таким образом, с передней кромки  $B_1$  вращающегося крыла  $S$ , которое заменим присоединенным вихревым слоем, будет сходить вихревая пелена  $\sigma$ , точки которой будут двигаться по траекториям жидких частиц в соответствии с обобщенной теоремой Гельмгольца–Пуанкаре (поэтому будем называть ее свободной). Нормальные компоненты скорости  $\vec{W}$  при переходе через нее не меняются, а касательные будут терпеть разрыв  $\gamma$ :

$$\vec{n}(\vec{r}_0, t) \times [\vec{W}_-(\vec{r}_0, t) - \vec{W}_+(\vec{r}_0, t)] = \vec{\gamma}(\vec{r}_0, t), \quad (1.1)$$

$$\vec{r}_0 \in S \cup s \cup \sigma.$$

Отметим, что  $\gamma$  имеет физический смысл погонной вихревой интенсивности, или плотности вихревого слоя.

Так как среда вязкая, то циркуляция скорости по жидким контурам не будет сохраняться, что обусловлено тем, что завихренность уже не будет сосредоточена все время в свободных вихревых пеленах, а будет распространяться относительно среды с течением времени с некоторой скоростью диффузии  $\vec{V}_d$ .

Дисперсия завихренности в несжимаемой вязкой среде описывается обобщенным уравнением Гельмгольца, которое в двумерном случае имеет вид:

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + W_x \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial x} + W_y \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 \vec{\Omega}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{\Omega}}{\partial y^2} \right), \quad (1.2)$$

$$\text{где } \vec{\Omega} = \left( \frac{\partial W_y}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Для случая изолированной прямолинейной вихревой нити уравнение (1.2) имеет автомодельное решение, являющееся фундаментальным [9]:

$$\vec{\Omega} = \frac{\vec{\Gamma}_0}{4\pi\nu t} \exp\left(-\frac{\vec{r}^2}{4\nu t}\right). \quad (1.3)$$

Оно справедливо для  $t > 0$ , то есть сразу после того, как изъяли источник завихренности, во всем объеме вязкой среды мгновенно возникло указанное распределение завихренности, ядро которого начало диффундировать (расплываться) относительно частиц среды в радиальном направлении со скоростью  $\vec{V}_d$ :

$$\vec{V}_d = -\nu \frac{\nabla \Omega}{\Omega} = \frac{\vec{r}}{2t}. \quad (1.4)$$

Выражение (1.4) следует из уравнения (1.2), если его слегка преобразовать:

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \left[ \left( \vec{W} - \nu \frac{\nabla \Omega}{\Omega} \right) \cdot \nabla \right] \vec{\Omega} = 0. \quad (1.5)$$

Анализируя решение, можно видеть, что произвольной последовательности фиксированных окружностей с радиусами  $\vec{r}_{m1} < \vec{r}_{m2} < \vec{r}_{m3} \dots$  соответствует последовательность моментов времени  $t_{m1} < t_{m2} < t_{m3} \dots$  таких, что для каждого  $\vec{r}_{mi}$  в момент времени  $t_{mi} = \vec{r}_{mi}^2 / (4\nu)$  завихренность в точках этих окружностей достигает своего максимума, причем  $\Omega_{m1} < \Omega_{m2} < \Omega_{m3} \dots$ . Таким образом, времена  $t_{mi}$  – это последовательные времена прохождения максимума (ядра) расплывающейся завихренности со скоростью:

$$\dot{r}_m = \left( \frac{\nu}{t_m} \right)^{1/2} = \frac{2\nu}{r_m}. \quad (1.6)$$

В то же время, согласно (1.4):

$$\vec{V}_d = \frac{\vec{r}_m}{2t_m} = \frac{2\nu \vec{r}_m}{\vec{r}_m^2}. \quad (1.7)$$

Следовательно,  $\vec{V}_d = \vec{r}_m$ .

Теперь покажем, что циркуляция скорости по окружностям с радиусами  $\vec{r}_m = \vec{r}_m(t_m)$  (то есть, по контурам  $C_m$ , расширяющимся со скоростью диффузии  $\vec{V}_d$  относительно среды) не меняется с течением времени.

Учитывая, что при этом  $4\nu t_m = \vec{r}_m^2$ , имеем:

$$\vec{\Gamma}_m = \vec{k} \oint_{C_m} \vec{V}_m \cdot \delta \vec{r}_m = 2\pi \vec{r}_m \times \vec{V}_m = 2\pi \vec{r}_m \times \frac{\vec{\Gamma}_0 \times \vec{r}_m}{2\pi \vec{r}_m^2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\vec{r}_m^2}{4\nu t_m}\right) \right] = \vec{\Gamma}_0 (1 - e^{-1}). \quad (1.8)$$

Таким образом, циркуляция скорости по указанным контурам, а следовательно, и суммарная завихренность в пределах своего ядра  $\vec{r} = \vec{r}_m$ , которое распространяется относительно вязкой среды с радиальной скоростью диффузии  $\vec{V}_d = \vec{r}_m$ , действительно сохраняются.

Распределение скорости, соответствующее авторемодельному распределению завихренности (1.3), имеет вид [9]:

$$\vec{W} = \frac{\vec{\Gamma}_0 \times \vec{r}}{2\pi r^2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \right]. \quad (1.9)$$

Поле скорости (1.9), а также суперпозиция полей скорости от любого конечного числа прямолинейных вихревых нитей будет точно удовлетворять уравнению неразрывности:

$$\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} = 0. \quad (1.10)$$

Кроме того, поля (1.3) и (1.9) для любого момента времени точно удовлетворяют уравнению дисперсии завихренности (1.2) в центрах вихревых нитей, а также на бесконечном удалении от них. В остальных точках суперпозиция полей скорости от конечного числа прямолинейных вихревых нитей, а также соответствующих полей завихренности будут удовлетворять уравнению дисперсии завихренности (1.2) приближенно.

## 2. ФОРМУЛИРОВКА НАЧАЛЬНО–КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Сформулируем начально–краевую задачу для нахождения общего решения обобщенного уравнения Гельмгольца (1.2) в случае вращения крыла  $S$  в вязкой среде  $D$  вблизи твердой поверхности  $L$  и перемычки  $s$ , с учетом принятых упрощений.

Как было показано в предыдущем параграфе, вместо условия прилипания для данного класса задач достаточно задавать условие непроницаемости границы  $S \cup s \cup L = S'$ , пренебрегая эффектом трения:

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} \vec{W}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n}(\vec{r}_0(t)) = \vec{W}^*(\vec{r}_0(t)) \cdot \vec{n}(\vec{r}_0(t)), \quad (2.1)$$

$$\forall t, \vec{r}_0 \in S' \setminus (\vec{r}_1 \cup \vec{r}_2), \vec{r} \in D,$$

где  $\vec{W}^*$  – вектор скорости точек границы  $S'$ ;  $\vec{r}_1$  – радиус–вектор передней кромки крыла;  $\vec{r}_2$  – радиус–вектор задней кромки крыла;  $\vec{n}$  – вектор нормали к  $\vec{W}^*$ .

Условие движения вихревой пелены  $\sigma$  по траекториям жидких частиц:

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} \vec{W}(\vec{r}, t) = \vec{W}(\vec{r}_0(t, \tilde{t}), t), \quad (2.2)$$

$$t \geq \tilde{t}, \vec{r}_0 \in \sigma, \vec{r} \in D,$$

где  $\vec{W}$  – вектор скорости точек вихревой пелены;  $\tilde{t}$  – время, при котором  $\vec{r}_0 = \vec{r}_1$ .

Условие затухания возмущений на бесконечном удалении от крыла и вихревой пелены:

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0 \rightarrow \infty} \vec{W}(\vec{r}, t) = 0, \quad \forall t, \vec{r} \in D, \vec{r}_0 \in S' \cup \sigma. \quad (2.3)$$

Условие существования решения внешней краевой задачи (2.1)–(2.3) для уравнения (1.2) следует из закона сохранения массы внутри границы  $S' \setminus L$  (в общем случае – произвольной замкнутой), что в плоском случае для несжимаемой среды эквивалентно сохранению площади внутри непроницаемого контура  $S \cup s$ , или нулевому балансу потока через этот контур:

$$\oint_{S \cup s} \vec{W}^*(\vec{r}_0, t) \cdot \vec{n}(\vec{r}_0(t)) ds = 0, \quad \forall t, \vec{r}_0 \in S \cup s. \quad (2.4)$$

В силу принятых ограничений, это условие будет выполняться для любого момента времени, то есть существование решения краевой задачи (2.1)–(2.3) для уравнения (1.2) обеспечено.

Так как область  $D$  является односвязной, условие единственности решения задачи обеспечивается автоматически.

Задача Коши для нахождения формы свободной вихревой пелены  $\sigma$  в произвольный момент времени  $t$  имеет вид:

$$\begin{cases} \vec{r}_0(t, \tilde{t}) = \vec{r}_1(\tilde{t}), & t = \tilde{t}, \\ \frac{d\vec{r}_0(t, \tilde{t})}{dt} = \vec{W}(\vec{r}_0(t, \tilde{t}), t), & t > \tilde{t}, \end{cases} \quad (2.5)$$

где  $\vec{r}_0 \in \sigma$ .

Для внешней начально–краевой задачи (1.2), (2.1)–(2.5) начальным условием будет известная форма границ и отсутствие вихревой пелены в момент  $t = 0$ :

$$S' \cup \sigma = S', \quad t = 0. \quad (2.6)$$

Скорости точек свободных вихревых пелен, входящие в уравнения (2.2) и (2.5), являются функциями от всех предшествующих положений границ  $S$  и  $\sigma$ , причем форму вихревой пелены  $\sigma$  необходимо находить в процессе решения задачи. Поэтому внешняя начально–краевая задача (1.2), (2.1)–(2.6) является нелинейной.

### 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК С ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЕННОЙ ФОРМУЛЫ КОШИ-ЛАГРАНЖА

После решения кинематической задачи (1.2), (2.1)–(2.6), используя обобщенную формулу Коши–Лагранжа [6, 7], можно определить поле давления вокруг крыла, вращающегося по произвольному закону вблизи твердой поверхности в вязкой несжимаемой среде, и его динамические характеристики.

Впервые формула для определения коэффициента давления в смешанной потенциально–вихревой области идеальной несжимаемой среды в неинерциальной системе координат была получена автором в работе [6]. Через несколько лет в работе [7] была выведена практически та же самая формула, что и в работе [6], однако в более универсальном виде, который позволял рассчитывать поля давления вне группы тел произвольной формы. Позже в работе [16] было показано, что эта формула справедлива и для вязких течений.

Приведем ее в интегральной безразмерной форме для случая, когда скорость потока на бесконечности равна нулю, а положительный обход циркуляции – по часовой стрелке:

$$C_P(\vec{r}, \tau) = 2 \left( \int_{\Sigma \cup \Sigma^\circ} \frac{d\vec{r}_0}{d\tau} \cdot \vec{w}(\vec{r}, \vec{r}_0, \tau) dr_0 + \frac{1}{2\pi} \int_{S \cup S^\circ} \frac{\partial' \Gamma(\vec{r}_0, \tau)}{\partial \tau} \alpha(\vec{r}, \vec{r}_0, \vec{r}^*) dr_0 \right) - \vec{W}^2(\vec{r}, \tau), \quad (3.1)$$

где  $\Sigma = S \cup \sigma$ ;  $\tau$  – безразмерное время;  $\vec{w}$  – скорость, индуцированная вихревым элементом в расчетной точке;  $\Gamma$  – циркуляция вихревого элемента;  $\alpha$  – угол, под которым видна из точки  $\vec{r}$  линия, соединяющая точки  $\vec{r}_0$  и произвольную точку  $\vec{r}^*$ , такую, что  $\vec{r}_0 - \vec{r}^* \in S$  (в инверсивной полуплоскости  $D^\circ$ :  $\vec{r}_0^\circ - \vec{r}^{*\circ} \in S^\circ$ , соответственно) [7]. Штрих означает, что дифференцирование совершается в системе координат, связанной с подвижным крылом. Верхний индекс "о" означает инверсивное отражение относительно твердой поверхности  $L$ .

В общем случае обобщенная формула Коши–Лагранжа (3.1) справедлива с точностью до константы, однако по условиям данной задачи эта константа равняется нулю.

Применим формулу (3.1) к нижней "–" и верхней "+" поверхностям крыла, учитывая, что абсолютная скорость  $\vec{W}$  есть сумма переносной  $\vec{W}^*$  и

относительной  $\vec{W}_r$ , а также принимая во внимание соотношение (1.1), и взаимосвязь:

$$\left( \vec{W}_-(\vec{r}_0, t) + \vec{W}_+(\vec{r}_0, t) \right) / 2 = \vec{W}(\vec{r}_0, t), \quad (3.2)$$

$$\vec{r}_0 \in S \cup \sigma,$$

а также то, что при обходе контура крыла от  $\vec{r}_{0-}$  до  $\vec{r}_{0+}$ ,  $\Delta\alpha = 2\pi$ . В итоге получим выражение для перепада коэффициента давления на крыле, которое полностью совпадает с аналогичным выражением для случая идеальной среды, потенциальной вне вихревых поверхностей:

$$\Delta C_P(\vec{r}, \tau) = 2 \left\{ \left[ \vec{\gamma}(\vec{r}, \tau) \times \vec{n}(\vec{r}, \tau) \right] \cdot \left[ \vec{W}(\vec{r}, \tau) - \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau} \right] - \frac{\partial'}{\partial \tau} \left[ \int_{\sigma} + \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}} \Gamma_{\Lambda}(\vec{r}_0, \tau) dr_0 \right] \right\}, \quad (3.3)$$

где  $\vec{n}$  – вектор нормали к крылу;  $\Gamma_{\Lambda}$  – циркуляция по контуру  $\Lambda$ , охватывающему вихревую пелену  $\sigma$  и часть крыла до расчетной точки, а также всю область вязкого вихревого течения  $D$  против часовой стрелки (это позволит учесть все поле завихренности от пелены  $\sigma$ , в соответствии с фундаментальным решением (1.3)).

Для коэффициента нормальной силы будем иметь:

$$C_N(\tau) = \int_S \Delta C_P(\vec{r}, \tau) dr. \quad (3.4)$$

Метод дискретных вихрей позволяет представить скорость любой точки среды в виде суммы невозмущенной скорости потока  $\vec{U}$ , возмущенной скорости от системы суммарных дискретных вихрей  $\vec{W}$ , моделирующих обтекаемое тело, а также возмущенной скорости от системы свободных вихрей  $\vec{W}$ , моделирующих вихревую пелену, сошедшую с тела. Как было показано выше, в случае, когда крыло полагается бесконечно тонким, применение обобщенной формулы Коши–Лагранжа (3.1) для расчета перепада давления на крыле с учетом свойств вихревого слоя (1.1) и (3.2) приводит к линеаризации нелинейных слагаемых (3.3). Указанные особенности моделирования дают возможность представить коэффициент нормальной силы в виде суммы трех компонент:

– инерционной:

$$C_{N_I}(\tau) = -2 \int_S \frac{\partial'}{\partial \tau} \left[ \int_{\sigma} + \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}} \Gamma_{\Lambda}(\vec{r}_0, \tau) dr_0 \right] dr, \quad (3.5)$$

где штрих при частной производной означает, что дифференцирование совершается в подвижной системе координат крыла;

– циркуляционной:

$$C_{Nc}(\tau) = 2 \int_S [\vec{\gamma}(\vec{r}, \tau) \times \vec{n}(\vec{r}, \tau)] \cdot \left[ \vec{W}(\vec{r}, \tau) - \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau} \right] dr; \quad (3.6)$$

– вихревой:

$$C_{Nv}(\tau) = 2 \int_S [\vec{\gamma}(\vec{r}, \tau) \times \vec{n}(\vec{r}, \tau)] \cdot \vec{W}(\vec{r}, \tau) dr. \quad (3.7)$$

Данное разделение сил имеет довольно ясную физическую основу: циркуляционная компонента (3.6) есть аналог квазистационарной силы Жуковского для нормальной силы и определяется мгновенным значением циркуляции по контуру, прилегающему к крылу (без учета сошедших вихрей); инерционная компонента (3.5) есть нестационарная составляющая, зависящая от мгновенной присоединенной массы крыла; вихревая (индуктивная) компонента (3.7) определяется текущими величинами и распределением завихренности вокруг крыла [19].

#### 4. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ К СИНГУЛЯРНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ДЛЯ ЕЕ РЕШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ УМДВ

Закон дальнего действия для индуцированного поля конвективной окружной скорости от прямолинейной вихревой нити в вязкой среде (1.9) отличается от закона Био–Савара множителем для циркуляции:

$$\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_0 \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\vec{r}^2}{4\nu t} \right) \right], \quad (4.1)$$

который обеспечивает ее уменьшение с течением времени вследствие диффузионного растекания ядра завихренности с радиальной скоростью  $\vec{V}_a$  (1.4), (1.7) по заранее известному закону.

Данное обстоятельство, в совокупности с доказанным ранее свойством сохранения циркуляции (1.8) по контурам, расширяющимся со скоростью диффузии (а, следовательно, и по бесконечно удаленному контуру), позволяет свести начально-краевую задачу (2.1)–(2.6) для вихревого течения вязкой несжимаемой среды, описываемого обобщенным уравнением Гельмгольца (1.2), к системе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с начальными данными для плотности вихревого слоя  $\gamma$  (1.1), непрерывно распределенного

по контуру  $S \cup s \cup \sigma$  в классе функций, ограниченных на концах интервала  $S \cup s$ .

В соответствии со свойствами вихревого слоя (1.1), (3.2) (аналогам формул Сохоцкого–Племеля) и известным частным решением (1.9) уравнения (1.2), одновременно являющимся фундаментальным решением уравнения (1.10), непрерывное распределение плотности вихревого слоя по контуру крыла  $S$ , перемычки  $s$  и по контуру свободной вихревой пелены  $\sigma$  приведет к следующим предельным интегральным выражениям для скорости на границах:

$$\begin{aligned} \vec{W}_{\pm}(\vec{r}_0(t), t) = & \\ = & \frac{1}{2\pi} \int_{S \cup s} \gamma(\vec{r}(t), t) \frac{[y_0(t) - y(t)]\vec{i} - [x_0(t) - x(t)]\vec{j}}{[x_0(t) - x(t)]^2 + [y_0(t) - y(t)]^2} dr - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{S \cup s^{\circ}} \gamma(\vec{r}(t), t) \frac{[y_0(t) + y(t)]\vec{i} - [x_0(t) - x(t)]\vec{j}}{[x_0(t) - x(t)]^2 + [y_0(t) + y(t)]^2} dr + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \gamma(\vec{r}(t, \tilde{t})) \frac{[y_0(t) - y(t, \tilde{t})]\vec{i} - [x_0(t) - x(t, \tilde{t})]\vec{j}}{[x_0(t) - x(t, \tilde{t})]^2 + [y_0(t) - y(t, \tilde{t})]^2} \times \\ & \times \left[ 1 - \exp \left\{ -\frac{[x_0(t) - x(t, \tilde{t})]^2 + [y_0(t) - y(t, \tilde{t})]^2}{4\nu(t - \tilde{t})} \right\} \right] dr - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma^{\circ}} \gamma(\vec{r}(t, \tilde{t})) \frac{[y_0(t) + y(t, \tilde{t})]\vec{i} - [x_0(t) - x(t, \tilde{t})]\vec{j}}{[x_0(t) - x(t, \tilde{t})]^2 + [y_0(t) + y(t, \tilde{t})]^2} \times \\ & \times \left[ 1 - \exp \left\{ -\frac{[x_0(t) - x(t, \tilde{t})]^2 + [y_0(t) + y(t, \tilde{t})]^2}{4\nu(t - \tilde{t})} \right\} \right] dr \mp \\ & \mp \frac{1}{2} \vec{m}(\vec{r}_0(t)) \gamma(\vec{r}_0(t), t), \quad \vec{r}_0 \in S \cup s. \quad (4.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{W}_{\pm}(\vec{r}_0(t, \tilde{t}), t) = & \\ = & \frac{1}{2\pi} \int_{S \cup s} \gamma(\vec{r}(t), t) \frac{[y_0(t, \tilde{t}) - y(t)]\vec{i} - [x_0(t, \tilde{t}) - x(t)]\vec{j}}{[x_0(t, \tilde{t}) - x(t)]^2 + [y_0(t, \tilde{t}) - y(t)]^2} dr - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{S \cup s^{\circ}} \gamma(\vec{r}(t), t) \frac{[y_0(t, \tilde{t}) + y(t)]\vec{i} - [x_0(t, \tilde{t}) - x(t)]\vec{j}}{[x_0(t, \tilde{t}) - x(t)]^2 + [y_0(t, \tilde{t}) + y(t)]^2} dr + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \gamma(\vec{r}(t, \tilde{t})) \frac{[y_0(t, \tilde{t}) - y(t, \tilde{t})]\vec{i} - [x_0(t, \tilde{t}) - x(t, \tilde{t})]\vec{j}}{[x_0(t, \tilde{t}) - x(t, \tilde{t})]^2 + [y_0(t, \tilde{t}) - y(t, \tilde{t})]^2} \times \\ & \times \left[ 1 - \exp \left\{ -\frac{[x_0(t, \tilde{t}) - x(t, \tilde{t})]^2 + [y_0(t, \tilde{t}) - y(t, \tilde{t})]^2}{4\nu(t - \tilde{t})} \right\} \right] dr - \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma^{\circ}} \gamma(\vec{r}(t, \tilde{t})) \frac{[y_0(t, \tilde{t}) + y(t, \tilde{t})]i - [x_0(t, \tilde{t}) - x(t, \tilde{t})]j}{[x_0(t, \tilde{t}) - x(t, \tilde{t})]^2 + [y_0(t, \tilde{t}) + y(t, \tilde{t})]^2} \times$$

$$\times \left[ 1 - \exp \left\{ - \frac{[x_0(t, \tilde{t}) - x(t, \tilde{t})]^2 + [y_0(t, \tilde{t}) + y(t, \tilde{t})]^2}{4\nu(t - \tilde{t})} \right\} \right] dr \mp$$

$$\mp \frac{1}{2} \vec{m}(\vec{r}_0(t, \tilde{t})) \gamma(\vec{r}_0(t, \tilde{t})), \quad \vec{r}_0 \in S \cup s, \quad (4.3)$$

где  $\vec{m}$  – вектор касательной.

Применяя метод зеркальных отражений относительно линии симметрии  $L$ , из (4.2), с учетом (3.2), легко получить выражение для скорости в присоединенном вихревом слое крыла  $S$  и перемычки  $s$ . Подстановка его в условие непроницаемости крыла (2.1) даст следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{S \cup s} \gamma(\vec{r}(t), t) \times$$

$$\times \frac{[y_0(t) - y(t)]n_x(\vec{r}_0(t)) - [x_0(t) - x(t)]n_y(\vec{r}_0(t))}{[x_0(t) - x(t)]^2 + [y_0(t) - y(t)]^2} dr -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{S^{\circ} \cup s^{\circ}} \gamma(\vec{r}(t), t) \times$$

$$\times \frac{[y_0(t) + y(t)]n_x(\vec{r}_0(t)) - [x_0(t) - x(t)]n_y(\vec{r}_0(t))}{[x_0(t) - x(t)]^2 + [y_0(t) + y(t)]^2} dr =$$

$$= - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \gamma(\vec{r}(t, \tilde{t})) \times$$

$$\times \frac{[y_0(t) - y(t, \tilde{t})]n_x(\vec{r}_0(t)) - [x_0(t) - x(t, \tilde{t})]n_y(\vec{r}_0(t))}{[x_0(t) - x(t, \tilde{t})]^2 + [y_0(t) - y(t, \tilde{t})]^2} \times$$

$$\times \left[ 1 - \exp \left\{ - \frac{[x_0(t) - x(t, \tilde{t})]^2 + [y_0(t) - y(t, \tilde{t})]^2}{4\nu(t - \tilde{t})} \right\} \right] dr +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma^{\circ}} \gamma(\vec{r}(t, \tilde{t})) \times$$

$$\times \frac{[y_0(t) + y(t, \tilde{t})]n_x(\vec{r}_0(t)) - [x_0(t) - x(t, \tilde{t})]n_y(\vec{r}_0(t))}{[x_0(t) - x(t, \tilde{t})]^2 + [y_0(t) + y(t, \tilde{t})]^2} \times$$

$$\times \left[ 1 - \exp \left\{ - \frac{[x_0(t) - x(t, \tilde{t})]^2 + [y_0(t) + y(t, \tilde{t})]^2}{4\nu(t - \tilde{t})} \right\} \right] dr +$$

$$+ \vec{W}^*(\vec{r}_0(t)) \cdot \vec{n}(\vec{r}_0(t)), \quad \vec{r}_0 \in S \cup s \setminus (\vec{r}_1 \cup \vec{r}_2). \quad (4.4)$$

Сингулярные интегралы в (4.4) понимаются в смысле главного значения Коши. Положительный обход циркуляции принят по часовой стрелке.

Получив из (4.3) и (3.2) выражения для скоростей в свободном вихревом слое  $\sigma$ , запишем задачу Коши (2.5)–(2.6) в интегро-дифференциальном виде:

$$\left\{ \begin{aligned} & \vec{r}_0(t, \tilde{t}) = \vec{r}_1(\tilde{t}), \quad t = \tilde{t}, \quad \vec{r}_0 \in \sigma, \\ & \frac{d\vec{r}_0(t, \tilde{t})}{dt} = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{S \cup s} \gamma(\vec{r}(t), t) \frac{[y_0(t, \tilde{t}) - y(t)]i - [x_0(t, \tilde{t}) - x(t)]j}{[x_0(t, \tilde{t}) - x(t)]^2 + [y_0(t, \tilde{t}) - y(t)]^2} dr - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{S^{\circ} \cup s^{\circ}} \gamma(\vec{r}(t), t) \frac{[y_0(t, \tilde{t}) + y(t)]i - [x_0(t, \tilde{t}) - x(t)]j}{[x_0(t, \tilde{t}) - x(t)]^2 + [y_0(t, \tilde{t}) + y(t)]^2} dr + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \gamma(\vec{r}(t, \tilde{t})) \frac{[y_0(t, \tilde{t}) - y(t, \tilde{t})]i - [x_0(t, \tilde{t}) - x(t, \tilde{t})]j}{[x_0(t, \tilde{t}) - x(t, \tilde{t})]^2 + [y_0(t, \tilde{t}) - y(t, \tilde{t})]^2} \times \\ & \times \left[ 1 - \exp \left\{ - \frac{[x_0(t, \tilde{t}) - x(t, \tilde{t})]^2 + [y_0(t, \tilde{t}) - y(t, \tilde{t})]^2}{4\nu(t - \tilde{t})} \right\} \right] dr - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma^{\circ}} \gamma(\vec{r}(t, \tilde{t})) \frac{[y_0(t, \tilde{t}) + y(t, \tilde{t})]i - [x_0(t, \tilde{t}) - x(t, \tilde{t})]j}{[x_0(t, \tilde{t}) - x(t, \tilde{t})]^2 + [y_0(t, \tilde{t}) + y(t, \tilde{t})]^2} \times \\ & \times \left[ 1 - \exp \left\{ - \frac{[x_0(t, \tilde{t}) - x(t, \tilde{t})]^2 + [y_0(t, \tilde{t}) + y(t, \tilde{t})]^2}{4\nu(t - \tilde{t})} \right\} \right] dr, \\ & t > \tilde{t}, \quad \vec{r}_0 \in \sigma. \end{aligned} \right. \quad (4.5)$$

Решая совместно систему сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (4.4)–(4.5) с начальными данными (2.6) в классе функций, ограниченных на концах интервала, можно найти распределение плотности вихревого слоя, заменяющего крыло  $S$  и перемычку  $s$ , а также плотности вихревого слоя, заменяющего свободную вихревую пелену  $\sigma$ , для каждого момента времени, что даст возможность найти поле течения во всей области  $D$ .

Решение будем осуществлять лагранжевым усовершенствованным методом дискретных вихрей [3].

## 5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Для того, чтобы изучить влияние закона раскрытия крыльев насекомых, рассмотрим два закона движения крыльев, которые принципиально отличаются друг от друга по характеру старта.

Первый – это мгновенный старт с постоянной



единичной угловой скоростью вращения:

$$\begin{cases} \omega = 0, & \tau = 0, \\ \omega = 1, & \tau > 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Второй – плавный старт с угловой скоростью, меняющейся по линейному закону:

$$\omega = \frac{\tau}{\pi}, \quad (5.2)$$

где  $\tau$  – время, обезразмеренное по хорде крыла  $b$  и линейной скорости передней кромки крыла  $U^*$  при его развороте на угол  $\beta = \pi/2$ . При этом изучался вклад инерционной (3.5), циркуляционной (3.6) и вихревой (3.7) компонент в формирование нормальной силы на каждом крыле в процессе их разворота от угла  $\beta = 0^\circ$  до  $\beta = 60^\circ$ , отсчитываемого от плоскости симметрии. Число Рейнольдса определялось как  $Re^* = U^*b/\nu$ , где  $\nu$  – кинематическая вязкость среды.

Угол  $\beta = 60^\circ$  оказывается наиболее типичным для насекомых, которые используют механизм Вейс–Фо перед совершением морфологического маха вниз в процессе трепещущего полета (к примеру, оса–наездница *Encarsia formosa*). Мы остановимся здесь только на процессе броска, так как моделирование последующего процесса раздвижения необходимо осуществлять в трехмерной постановке из-за возникновения вихревого течения вдоль размахов крыльев по направлению от основания к концам крыльев. Впервые на механической модели механизма Вейс–Фо для трепещущего полета такое течение было получено в 1979 году Макссуорси [20], а в 1996 году Эллингтон и др. [21] при визуализации полета привязанной ночной моли *Manduca sexta* обнаружили, что на передних кромках ее крыльев возникают и удерживаются с подветренной стороны на протяжении полупериода махов конические вихри.

На рис. 1–5 представлены поля скоростей (более темные векторы соответствуют безразмерной скорости, большей 1), вихревые картины (дискретные вихри, вращающиеся по часовой стрелки показаны темными кружками; против – светлыми), изобары (вектором изображен главный вектор внешних сил, приложенный к крылу в мгновенном центре давления, уменьшенный в 20 раз), изотакси, линии тока и линии равной завихренности для  $\beta = 60^\circ$ . Рисунки *a, в* соответствуют мгновенному закону раскрытия крыльев; *б, г* – плавному. Для рисунков *a, б* число Рейнольдса  $Re^* = 10^6$ ; для рисунков *в, г* –  $Re^* = 10^2$ , что соответствует числам Рейнольдса при полете насекомых.

На рисунке 6 кривые 1, 2 и 3 означают соответственно инерционную  $C_{N_I}/C_N$ , циркуляционную  $C_{N_C}$  и вихревую  $C_{N_V}$  приведенные компоненты нормальной силы. На рис. 7 показано поведение коэффициента нормальной силы на каждом крыле в процессе броска. Кривые 1 и 3 соответствуют мгновенному старту крыла; 2 и 4 – плавному. При этом кривым 1 и 2 соответствует число Рейнольдса  $Re^* = 10^6$ ; кривым 3 и 4 –  $Re^* = 10^2$ .

Из рисунков видно, что уменьшение числа Рейнольдса до  $Re^* = 10^2$  приводит к ламинаризации течения, при котором вихревая пелена сворачивается в регулярный спиралевидный жгут независимо от закона углового старта крыльев (см. рис. 1, в, г). Однако при мгновенном старте крыла, в отличие от плавного, в полости между крыльями возникает гораздо более интенсивное вихревое течение. Сравнительный анализ полей течений показывает, что наибольшие значения величин и их градиентов наблюдаются при мгновенном старте (при  $Re^* = 10^6$  большие, чем при  $Re^* = 10^2$ ), меньшие – при плавном старте и  $Re^* = 10^6$ , и наименьшие – при плавном старте и  $Re^* = 10^2$ .

Так, отрицательный коэффициент давления в конце броска с подветренной стороны крыла при мгновенном старте в 3 раза больше по абсолютной величине, чем при плавном старте. В ядре вихревого жгута это соотношение достигает восьми при  $Re^* = 10^6$  и пяти при  $Re^* = 10^2$ .

Отметим также, что максимум завихренности в конце броска при мгновенном старте крыльев в два раза превосходит максимум завихренности при плавном старте крыльев.

Интересно, что при мгновенном старте и  $Re^* = 10^6$  дискретные вихри вначале равномерно заполняют овальную область вокруг стартового дискретного вихря, а затем постепенно начинают группироваться в регулярный спиралевидный жгут, число витков которого в конце броска достигает двух.

Доминирование инерционных сил при плавном угловом старте (до 80% в конце броска) объясняется гораздо меньшей интенсивностью стартового вихря, что приводит к большему порционному вкладу сил, обусловленных скоростью изменения импульса среды при торможении крыла, по сравнению с вкладом сил вихревой и циркуляционной природы.

Напротив, в случае мгновенного старта интенсивность этого вихря настолько велика, что его индуктивное влияние начинает быстро преобладать. При этом максимальный вклад вихревой компоненты при  $Re^* = 10^6$  достигается уже при угле поворота крыла  $\beta = 24^\circ$ , а при  $Re^* = 10^2$  – при  $\beta = 36^\circ$ .

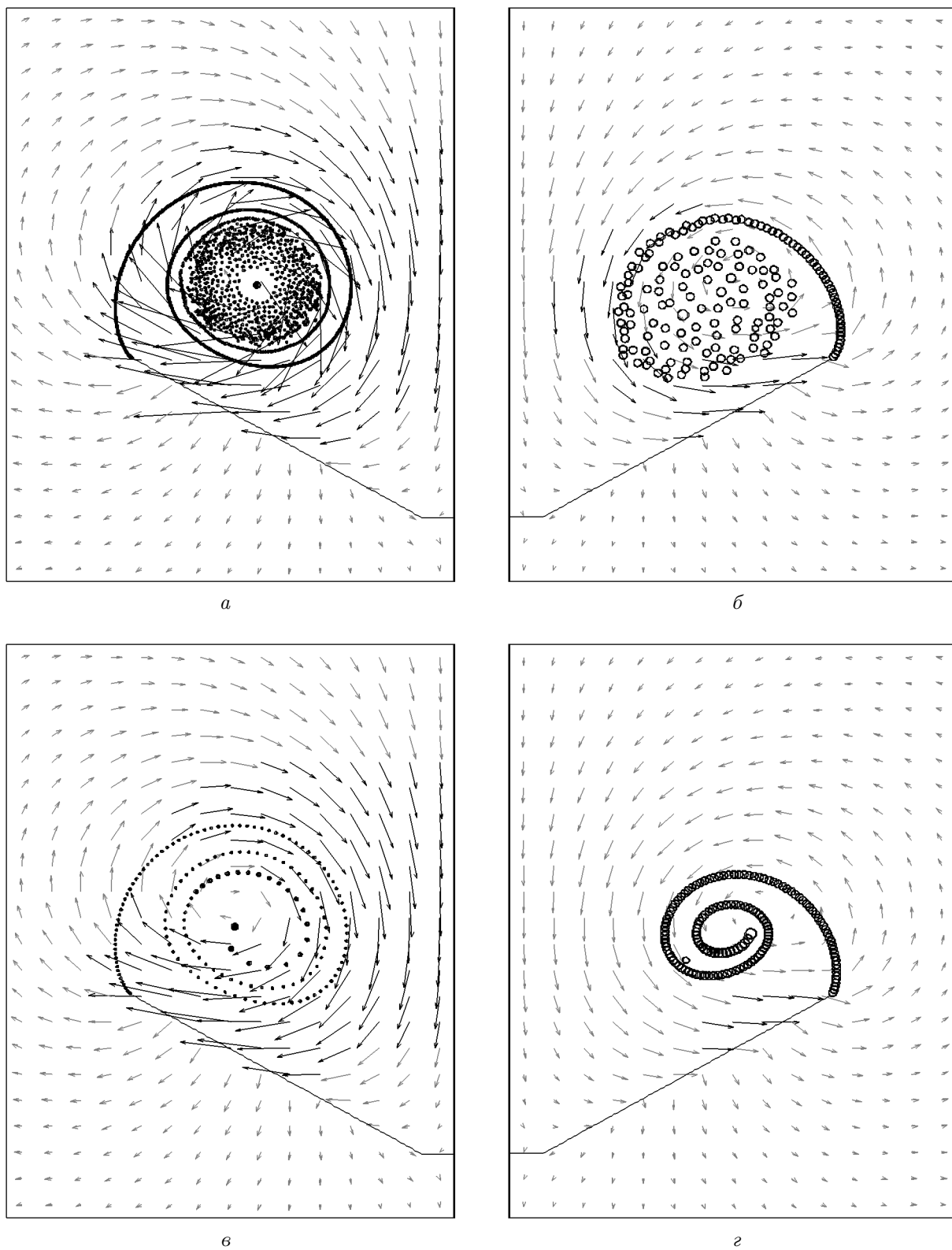


Рис. 1. Визуализация течения:  
а, в – мгновенный старт; б, г – плавный старт; а, б –  $Re^* = 10^6$ ; в, г –  $Re^* = 10^2$

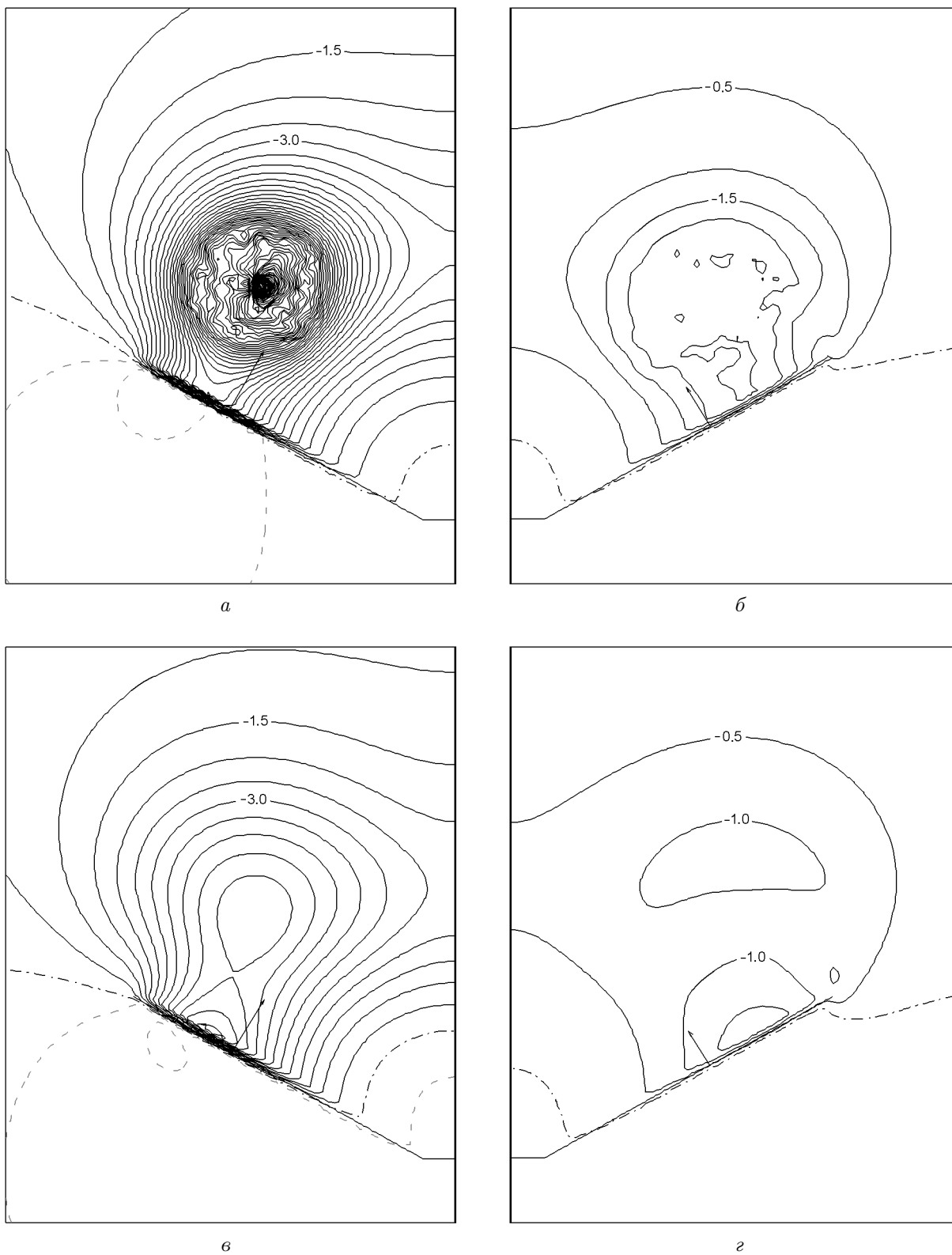


Рис. 2. Изобары:  
*a, в* – мгновенный старт; *б, г* – плавный старт; *a, б* –  $Re^* = 10^6$ ; *в, г* –  $Re^* = 10^2$

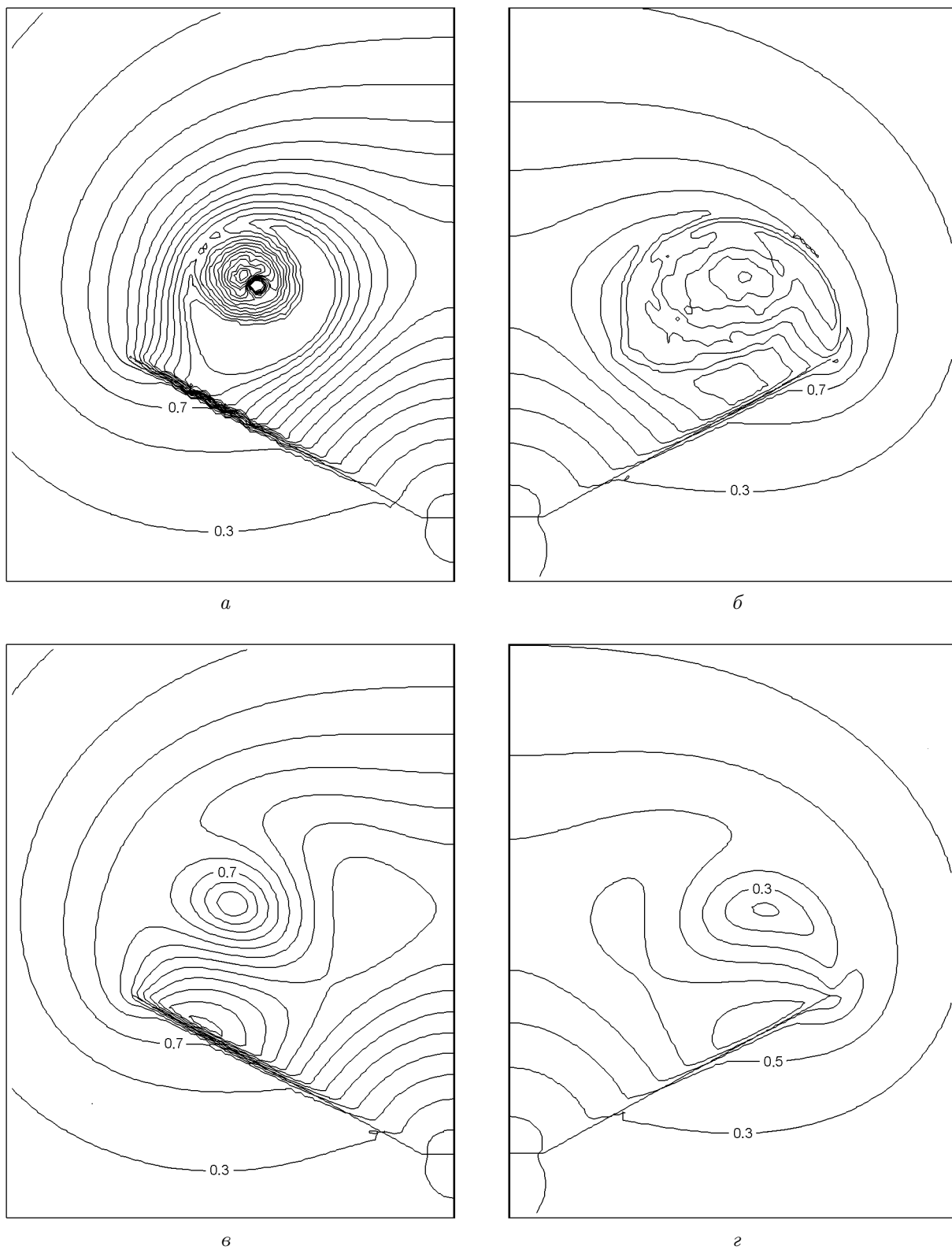


Рис. 3. Изоахи:  
*a, в* – мгновоный старт; *б, г* – плавоный старт; *a, б* –  $Re^* = 10^6$ ; *в, г* –  $Re^* = 10^2$

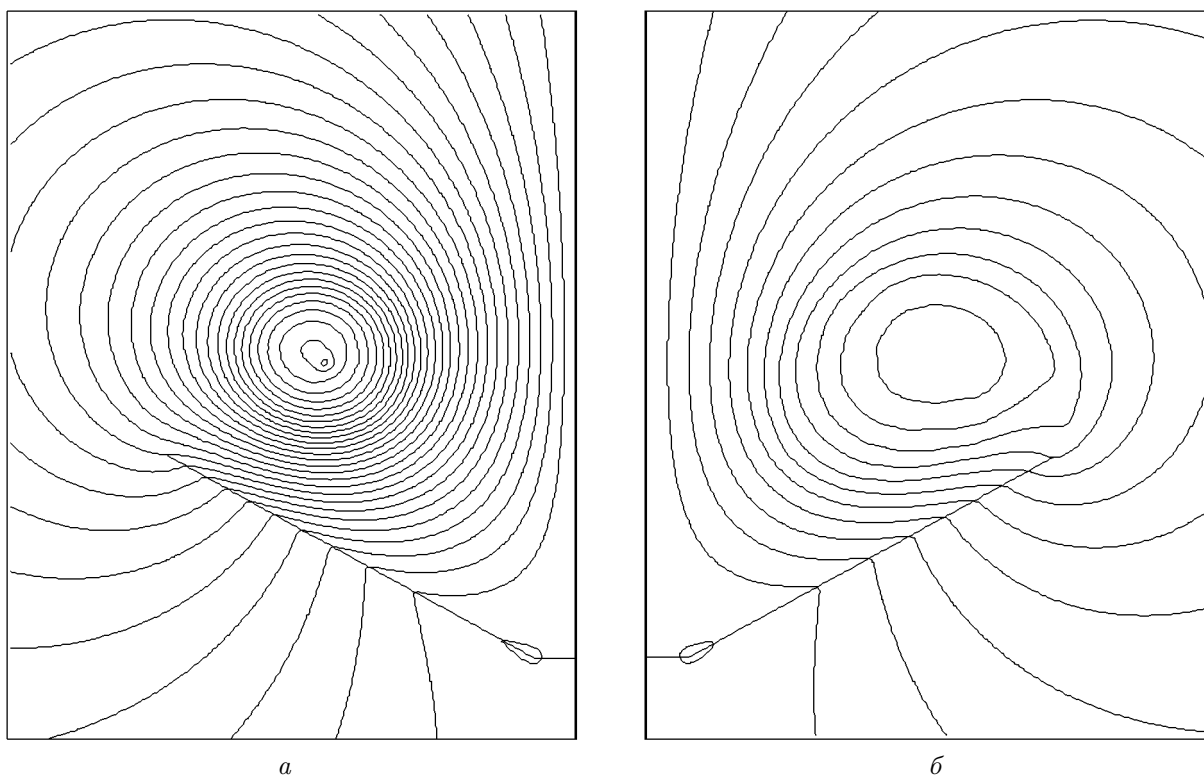


Рис. 4. Линии тока при  $Re^* = 10^6$ :  
а – мгновенный старт; б – плавный старт

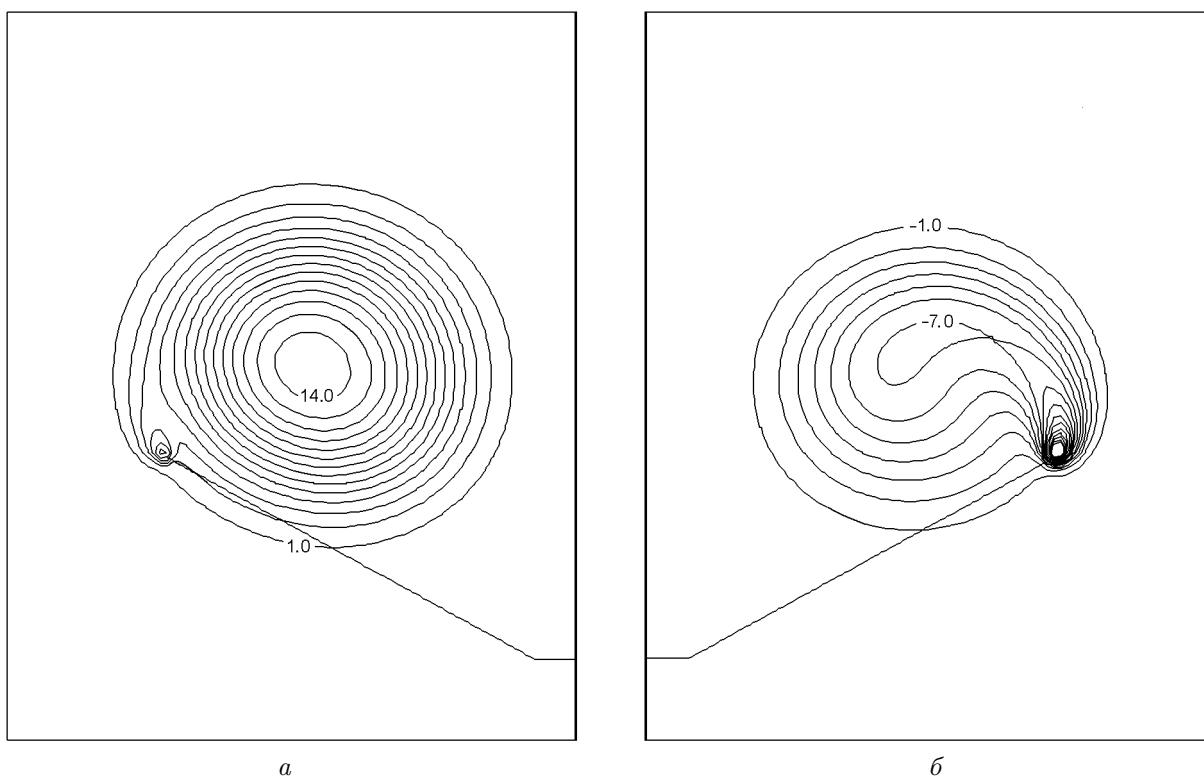


Рис. 5. Изолинии завихренности при  $Re^* = 10^2$ :  
а – мгновенный старт; б – плавный старт

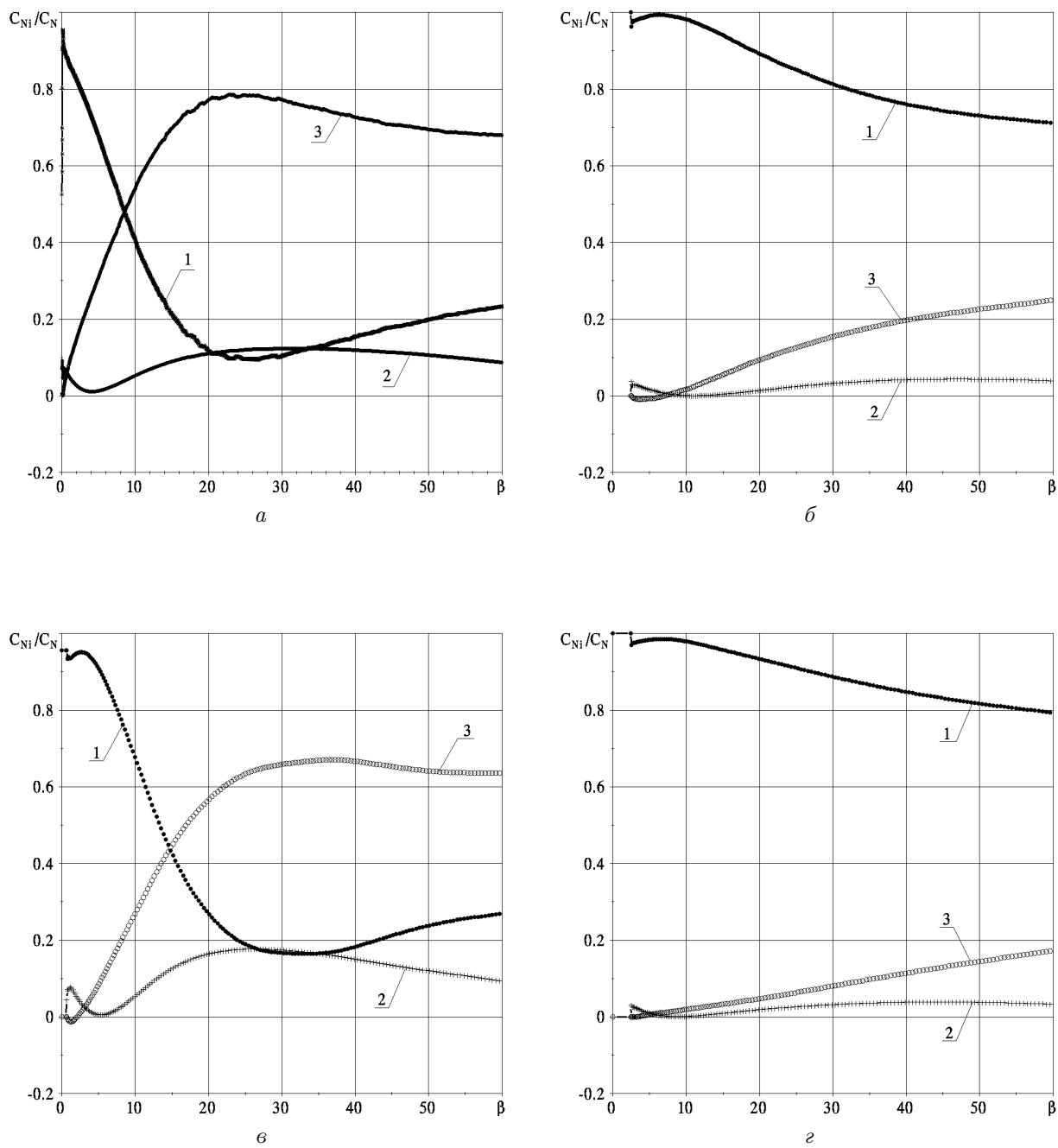


Рис. 6. Вклад сил инерционной (1), циркуляционной (2) и вихревой (3) природы в нормальную силу:  $a, в$  – мгновенный старт;  $б, г$  – плавный старт;  $a, б$  –  $Re^* = 10^6$ ;  $в, г$  –  $Re^* = 10^2$

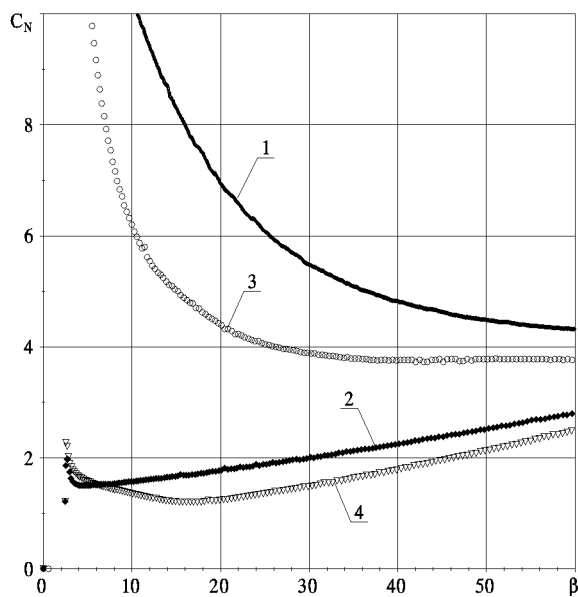


Рис. 7. Поведение коэффициента нормальной силы на каждом крыле: кривые 1 и 3 – мгновенный старт; 2 и 4 – плавный; для кривых 1 и 2 –  $Re^* = 10^6$ ; для 3 и 4 –  $Re^* = 10^2$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что при уменьшении числа Рейнольдса от  $Re^* = 10^6$  до  $Re^* = 10^2$  вклад сил инерционной природы несколько возрастает, вклад сил вихревой природы несколько уменьшается, однако в случае мгновенного старта крыльев он все же составляет две трети от всей нормальной силы в конце броска. При плавном законе раскрытия крыльев, наоборот, инерционные силы доминируют независимо от числа Рейнольдса. Вклад сил циркуляционной природы мал во всех случаях, что подтверждает то, что установленный ранее инерционно-вихревой принцип полета насекомых [3] справедлив для любых чисел Рейнольдса, в отличие от инерционно-циркуляционного принципа, установленного для полета птиц и плавания рыб и дельфинов при больших числах Рейнольдса [19].

Учитывая, что в трехмерном случае вместо цилиндрических вихревых жгутов возникают конические вихревые жгуты, течение в которых направлено вдоль размахов крыльев в сторону их концов, а сами вихревые жгуты при последующем морфологическом махе крыльев вниз остаются долгое время вблизи передних кромок, что не наблюдается при двумерном движении, для уто-

чнения сделанных выводов построению двумерную модель вязкого вихревого течения между вращающимися крыльями в дальнейшем необходимо обобщить на трехмерный случай и смоделировать полный цикл махов крыльев.

1. Sane S.P. The Aerodynamics of Insect Flight // J. Exp. Biol.– 2003.– **206**.– P. 4191–4208.
2. Shyy W., Lian Y., Tang J., Liu H., Trizila P., Stanford B., Bernal L., Cesnik C., Friedmann P., Ifju P. Computational Aerodynamics of Low Reynolds Number Plunging, Pitching and Flexible Wings for MAV Applications // 46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit.– 7–10 January 2008.– Reno, Nevada.– P. 1–33.
3. Shekhovtsov A.V. Inertial-Vortical Principle of Animal Flight // BIONA-report 12.– 1998.– Stuttgart, Jena, Lubeck: G. Fischer, Akad. Wiss. u. Lit., Mainz.– P. 307–316.
4. Довгий С.А., Шеховцов А.В. Усовершенствованный метод дискретных вихрей для нестационарных задач // Обчислювальна та прикладна математика.– 1997.– **2(82)**.– С. 30–44.
5. Довгий С.А., Шеховцов А.В. Апробация УМДВ для класса задач о колебаниях крыла в вязкой среде с ограниченным решением на кромках // Вісник Харк. нац. ун-ту. Сер. "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління вип. 12.– 2009.– № 863.– С. 111–128.
6. Шеховцов А.В. Метод расчета нестационарного поля давления в области завихренности при наличии подвижных границ.– Деп. в ГНТБ Украины 06.07.95. – № 1693. – Ук95.: (Анот. в РЖ МЖГ. – № 2, – 1996).– 22 с. (То же: Шеховцов А.В. Метод расчета нестационарного поля давления в смешанной потенциально-вихревой области, прилегающей к вращающемуся крылу // Прикладная гидромеханика.– 2000.– **2(74)**, № 1.– С. 79–87. То же: Shekhovtsov A.V. A Method for Evaluation of an Unsteady Pressure Field in a Mixed Potential-Vortical Domain Adjacent to the Rotating Wing International // International Journal of Fluid Mechanics Research.– 2002.– **29**, N 1.– P. 111–123.)
7. Дынникова Г.Я. Аналог интеграла Коши-Лагранжа для нестационарного вихревого течения идеальной несжимаемой жидкости.– М.: Изд-во ЦАГИ. Препринт № 117, 1998.– 20 с. (То же: Дынникова Г.Я. Аналог интегралов Бернулли и Коши-Лагранжа для нестационарного вихревого течения идеальной несжимаемой жидкости // Изв. РАН МЖГ.– 2000.– № 1.– С. 31–41.)
8. Weis-Fogh T. Quick Estimates of Flight Fitness in Hovering Animals, Including Novel Mechanisms for Lift Production // J. Exp. Biol.– 1973.– **59**.– P. 169–230.
9. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика, ч 2.– М.: Физматлит, 1963.– 728 с.
10. Schaefer J.W., Eskinazi S. An analysis of the vortex street generated in a viscous fluid // J. Fluid Mech.– 1959.– **6**.– P. 241–260.
11. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью.– М.: Наука, 1978.– 352 с.
12. Leonard A. Review: Vortex Methods for Flow Simulation // J. Comput. Phys.– 1980.– **37**.– P. 289–335.

13. Greengard C. The Core Spreading Vortex Method Approximates the Wrong Equation // *J. Comput. Phys.*– 1985.– **61**.– P. 345–348.
14. Kida T., Nakajima T., Suemitsu H. Second-order core spreading vortex method in two-dimensional viscous flows // *JSME Intl. J., Series B.*– 1998.– **41**, N 2.– P. 441–446.
15. Шеховцов А.В. Решение некорректных задач гидроаэродинамики усовершенствованным методом дискретных вихрей // Комп'ютерна гідромеханіка.– ІГМ НАНУ, Київ.– 2008.– С. 50–51.
16. Дынникова Г.Я. Движение вихрей в двумерных течениях вязкой жидкости // *Изв. РАН МЖГ.*– 2003.– № 5.– С. 11–19.
17. Wang Z.J., Birch J.M., Dickinson M.H. Unsteady Forces and Flows in Low Reynolds Number Hovering Flight: Two-Dimensional Computations vs Robotic Wing Experiments // *J. Exp. Biol.*– 2004.– **207**.– P. 449–460.
18. Ellington C.P. Aerodynamics and the Origin of Flight // *Adv. Insect Physiol.*– 1991.– **23**.– P. 171–210.
19. Шеховцов А.В. Инерционно-циркуляционный принцип полета и плавания // *Вісник Харк. Нац. ун-ту. Сер. "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління* вип. 4.– 2005.– № 661.– С. 249–258.
20. Maxworthy T.J. Experiments on the Weis-Fogh Mechanism of Lift Generation by Insects in Hovering Flight. Part 1. Dynamics of the 'Fling' // *J. Fluid Mech.*– 1979.– **93**.– P. 47–63.
21. Ellington C.P., Van den Berg C., Willmott A.P. and Thomas A.L.R. Leading-Edge Vortices in Insect Flight // *Nature.*– 1996.– **384**.– P. 626–630.