ISSN 1028-7507 Акустичний вiсник. 2015. Том 17, N 2. С. 15 – 22

УДК 534.1

СРАВНЕНИЕ ДВУХ ПОДХОДОВ К РЕШЕНИЮ ВОЛНОВЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ЧАСТИЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ ПРИ НАЛИЧИИ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ОБЛАСТЕЙ

И. В. ВОВК[1], **В. Т. МАЦЫПУРА**[2*], **Я. П. ТРОЦЕНКО**[2]

[1]*Институт гидромеханики НАН Украины*
ул. Желябова, 8/4, 03680, ГСП, Киев-180, Украина

[2]*Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко*
ул. Владимирская, 64/13, 01601, ГСП, Киев, Украина
[*]*E-mail: mnivtt@gmail.com*

Получено 26.06.2015

В статье дано описание двух подходов, позволяющих применить метод частичных областей в тех случаях, когда смежные частичные области пересекаются. Сравнение эффективности подходов проведено на примере построения решения задачи о распространении плоской волны в круглом цилиндрическом волноводе со сферической полостью.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: цилиндрический волновод, сферическая полость, метод частичных областей, закон сохранения энергии

У статтi дано опис двох пiдходiв, якi дозволяють застосувати метод часткових областей у тих випадках, коли сумiжнi частковi областi перетинаються. Порiвняння ефективностi пiдходiв проведено на прикладi побудови розв'язку задачi про поширення плоскої хвилi у круглому цилiндричному хвилеводi зi сферичною порожниною.

КЛЮЧОВI СЛОВА: цилiндричний хвилевiд, сферична порожнина, метод часткових областей, закон збереження енергiї

The paper deals with describing of two approaches allowing the application of a method of partial domains in the cases of intersecting adjacent subdomains. The efficiency of two approaches is compared on an example of construction of a solution for the problem on propagation of a plane wave in a circular cylindrical waveguide with a spherical cavity.

KEY WORDS: cylindrical waveguide, spherical cavity, method of partial domains, law of energy conservation

ВВЕДЕНИЕ

Как известно [1, 2], метод частичных областе широко и эффективно используется при изучени проблем, связанных с излучением и рассеивани ем волн различной природы. Основные результа ты, достигнутые с помощью этого метода, отн сятся к тем случаям, когда смежные частичнь области не пересекаются (т. е. имеют некую общу границу). В случае же пересечения смежных обла стей (см., например, рис. 1) традиционные спос бы применения указанного метода могут оказа ться неэффективными [3, 4].

Целью данной работы является описание дву подходов, позволяющих применить метод част. чных областей в тех случаях, когда смежные области пересекаются. Сравнение эффективности предложенных походов проводится на примере построения решения задачи о распространении плоской волны в круглом цилиндрическом волноводе со сферической полостью.

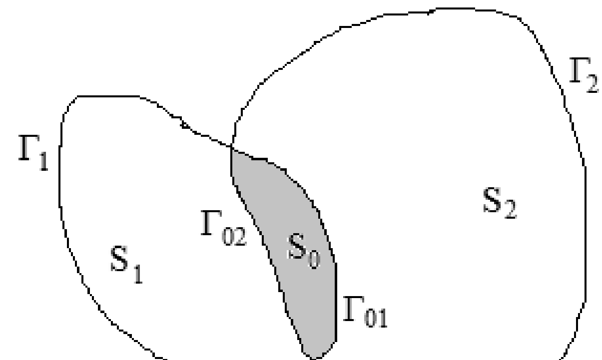

Рис. 1. Пример области S, состоящей из двух пересекающихся областей S_1 и S_2:
S_0 – общая подобласть для S_1 и S_2;
Γ_1 – граница области S_1;
Γ_2 – граница области S_2

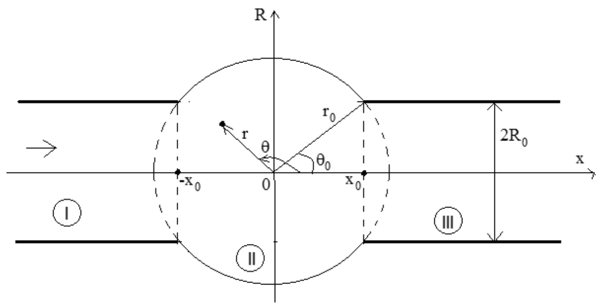

Рис. 2. Геометрия волновода

1. ПОСТАНОВКА И ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Рассмотрим волновод, который состоит из двух полубесконечных цилиндрических труб с круговым сечением, соединенных посредством сферической полости. На рис. 2 показано сечение волновода, причем ось симметрии последнего лежит в плоскости сечения. Радиус трубы обозначим как R_0, а радиус сферической полости – r_0. Все поверхности волновода считаем акустически жесткими. Внутренность волновода заполнена идеальной сжимаемой жидкостью с плотностью ρ и скоростью звука c.

Введем две системы координат: цилиндрическую (x, R, ψ) и сферическую (r, θ, ψ) с общим началом в точке O. Направим ось x цилиндрической системы координат вдоль оси трубы.

Пусть слева на сферическую полость набегает плоская гармоническая волна, соответствующая нулевой моде цилиндрического волновода, с частотой ω. В таком случае звуковое поле будет обладать радиальной симметрией, т. е. не будет зависеть от угловой координаты ψ. Задача состоит в определении поля в волноводе.

Решение задачи будем проводить на основе метода частичных областей [1]. В соответствии с ним вся область существования звукового поля делится на три частичные области (см. рис. 2). Область I – полубесконечная труба $-\infty < x \le -x_0$, $0 \le R \le R_0$; область II – сферическая полость радиуса r_0; область III – полубесконечная труба $x_0 \le x < \infty$, $0 \le R \le R_0$. Такое выделение подобластей представляется вполне естественным, однако имеет одну особенность, не присущую традиционным случаям применения метода – частичные области на рис. 2 пересекаются. Такая ситуация требует нестандартного подхода к построению решения задачи. Здесь возможны два варианта, которые будут рассмотрены ниже.

Вариант 1. Поле давления в области I запишем в виде суперпозиции мод цилиндрического волновода:

$$p_{\mathrm{I}} = \exp(ik(x + x_0)) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_0(\beta_n R) \exp(-i\gamma_n (x + x_0)), \tag{1}$$

где β_n – корни уравнения $J_0'(\beta R_0) = 0$ (штрих означает производную по полному аргументу от функции Бесселя нулевого порядка); $\gamma_n = \sqrt{k^2 - \beta_n^2}$ – постоянные распространения; $k = \omega/c$ – волновое число. Здесь и далее временной множитель $\exp(-i\omega t)$ в решении опущен.

Первое слагаемое в формуле (1) соответствует набегающей плоской волне с единичной амплитудой. Второе слагаемое определяет волну, отраженную от сферической полости.

Поле в области III определяет волну, прошедшую через сферическую полость:

$$p_{\mathrm{III}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n J_0(\beta_n R) \exp(i\gamma_n (x - x_0))\,. \tag{2}$$

Поле давления в области II представим в виде суперпозиции мод сферической полости:

$$p_{\mathrm{II}} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n P_n(\cos\theta) \frac{j_n(kr)}{j_n'(kr_0)}\,. \tag{3}$$

Здесь $P_n(\cos\theta)$ – полиномы Лежандра; $j_n(kr)$ – сферические функции Бесселя.

Идея состоит в том, чтобы при построении решения в полной мере использовать поля p_{I} и p_{II} в зоне пересечения областей I, II и, соответственно, p_{II} и p_{III} – в зоне пересечения областей II, III. Для этого, как показано в работе [3], условия сопряжения следует записать следующим образом:

- при $R \in [0, R_0]$

$$\frac{\partial p_{\mathrm{I}}}{\partial x} + \alpha p_{\mathrm{I}} = \frac{\partial p_{\mathrm{II}}}{\partial x} + \alpha p_{\mathrm{II}}, \qquad x = -x_0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial p_{\mathrm{II}}}{\partial x} + \alpha p_{\mathrm{II}} = \frac{\partial p_{\mathrm{III}}}{\partial x} + \alpha p_{\mathrm{III}}, \qquad x = x_0; \tag{5}$$

- при $r = r_0$

$$\frac{\partial p_{\mathrm{II}}}{\partial r} = \begin{cases} \dfrac{\partial p_{\mathrm{III}}}{\partial r}, & \theta = [0, \theta_0], \\ 0, & \theta = [\theta_0, \pi - \theta_0], \\ \dfrac{\partial p_{\mathrm{I}}}{\partial r}, & \theta = [\pi - \theta_0, \pi]. \end{cases} \tag{6}$$

Условия сопряжения полей на плоских поверхностях границы частичных областей I, II и II, III (условия (4), (5)) представляют собой линейную комбинацию давления и производной от давления по координате x, т. е. по нормали к указанным поверхностям. Здесь константа α должна быть невещественной – $\mathbf{Im}\,\alpha \neq 0$ [3]. Условие (6) задает сопряжение производных давления по радиальной координате на сферической поверхности границы частичных областей.

Вариант 2. Во втором варианте изменим геометрию частичных областей. Пусть область I – полубесконечная труба $-\infty < x \leq -x_0$, $0 \leq R \leq R_0$; область III – полубесконечная труба $x_0 \leq x < \infty$, $0 \leq R \leq R_0$; а область II – сферическая полость радиуса r_0 за вычетом двух шаровых сегментов, которые располагаются внутри областей I и III. Поля в областях I и III, как и в первом варианте, определяются выражениями (1) и (2).

Для данного разбиения поле в области II запишем в виде двух слагаемых:

$$p_{\mathrm{II}} = p_{\mathrm{II}}^{(1)} + p_{\mathrm{II}}^{(2)}, \qquad (7)$$

где

$$p_{\mathrm{II}}^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n J_0(\beta_n R) \exp(i\gamma_n(x + x_0)) + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} D_n J_0(\beta_n R) \exp(-i\gamma_n(x - x_0)), \qquad (8)$$

$$p_{\mathrm{II}}^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n P_n(\cos\theta) \frac{j_n(kr)}{j_n'(kr_0)} \,. \qquad (9)$$

Слагаемое $p_{\mathrm{II}}^{(1)}$ в формуле (7) представляет собой совокупность мод круглого цилиндрического волновода, которая позволяет удовлетворить условия сопряжения полей на границах $x = \mp x_0$, $0 \leq R \leq R_0$. Второе слагаемое ($p_{\mathrm{II}}^{(2)}$) призвано обеспечить выполнение граничного условия на жесткой поверхности сферической полости.

Поскольку центр сферической системы координат находится внутри области II, то угловые функции в виде полиномов Лежандра должны иметь целочисленные индексы – $n = 0, 1, 2, \ldots$ Следует, однако, отметить, что физическая граница сферической полости представляет собой только часть сферы, задаваемую диапазоном углов $\theta_0 \leq \theta \leq \pi! - \theta_0$, $r = r_0$. Для того, чтобы реализовать свойства полноты и ортогональности набора функций $P_n(\cos\theta)$, следует продлить граничные условия на "нефизические" участки границы сферы – $0 \leq \theta \leq \theta_0$ и $\pi - \theta_0 \leq \theta \leq \pi$, $r = r_0$ [2]. Принципиально, что при этом граничные условия мы продолжаем только для второго слагаемого $p_{\mathrm{II}}^{(2)}$ в формуле (7). Вообще говоря, функция, задающая граничное условие для решения $p_{\mathrm{II}}^{(2)}$ на "нефизических" участках границы ($0 \leq \theta \leq \theta_0$ и $\pi - \theta_0 \leq \theta \leq \pi$, $r = r_0$), может быть выбрана произвольно [2]. Поскольку поверхность сферической полости акустически жесткая, то целесообразно выбрать продолжение граничного условия на участках $0 \leq \theta \leq \theta_0$ и $\pi - \theta_0 \leq \theta \leq \pi$, $r = r_0$ в виде равенства нулю производной функции $p_{\mathrm{II}}^{(2)}$ по радиальной координате.

Таким образом, условия сопряжения звуковых полей на границах частичных областей и граничное условие на поверхности жесткой сферической полости следует записать так:

- при $R \in [0, R_0]$

$$p_{\mathrm{I}} = p_{\mathrm{II}}, \qquad x = -x_0, \qquad (10)$$

$$\frac{\partial p_{\mathrm{I}}}{\partial x} = \frac{\partial p_{\mathrm{II}}}{\partial x}, \qquad x = -x_0, \qquad (11)$$

$$p_{\mathrm{II}} = p_{\mathrm{III}}, \qquad x = x_0, \qquad (12)$$

$$\frac{\partial p_{\mathrm{II}}}{\partial x} = \frac{\partial p_{\mathrm{III}}}{\partial x}, \qquad x = x_0, \qquad (13)$$

- при $r = r_0$

$$\frac{\partial p_{\mathrm{II}}}{\partial r} = 0, \qquad \theta = [\theta_0, \pi - \theta_0], \\ \frac{\partial p_{\mathrm{II}}^{(2)}}{\partial r} = 0, \qquad \theta = [0, \theta_0] \cup [\pi - \theta_0, \pi]. \qquad (14)$$

Далее следует применить стандартную процедуру перехода от функциональной системы уравнений (4) – (6) или (10) – (14) к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода, многочисленные описания которой можно найти в монографии [1]. При этом для условий (4), (5) и (10) – (13) используется ортогональность набора функций $J_0(\beta_n R)$ на отрезке $R \in [0, R_0]$, а для условий (6) и (14) – ортогональность набора функций $P_n(\cos\theta)$, $\theta = [0, \pi]$. Для получения количественных оценок системы линейных алгебраических уравнений решаются методом редукции.

В качестве критерия сравнительной оценки эффективности предложенных выше подходов к решению задачи естественно выбрать выполнение закона сохранения энергии. Таким образом, следует проверять насколько точно выполняется равенство $V + W = 1$. Здесь V и W – энергетические коэффициенты отражения и прохождения плоской волны при ее падении на сферическую полость, т. е. отношения среднего потока мощности в отраженной и прошедшей волне соответственно к среднему потоку мощности в падающей плоской волне. В результате несложных преобразований легко показать, что

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} |A_n|^2 (J_0(\beta_n R_0))^2 \mathbf{Re}\,(\gamma_n),$$
$$W = \sum_{n=0}^{\infty} |B_n|^2 (J_0(\beta_n R_0))^2 \mathbf{Re}\,(\gamma_n). \qquad (15)$$

Понятно, что в формулах (15) присутствуют только однородные моды, для которых $\mathbf{Re}\,(\gamma_n) > 0$. Каждое слагаемое в этих суммах характеризует энергию отдельной моды.

2. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Следует подчеркнуть, что в данной статье исследуется только вопрос эффективности для двух вариантов построения решения задачи без рассмотрения особенностей процесса распространения волны в волноводе со сферическим расширением. Авторы надеются посвятить такому анализу отдельную публикацию.

Для начала рассмотрим результаты расчетов, проведенных согласно первому варианту решения задачи. Невещественную константу положим $\alpha = ia$, где a – вещественная неотрицательная величина.

Выясним влияние параметра a на работу первого вычислительного алгоритма, контролируя выполнение закона сохранения энергии. Рис. 3 иллюстрирует степень отличия суммы $V+W$ от единицы при изменении a в широких пределах – от 10^{-1} до 10^8. Кривые *1*, *2* и *3* соответствуют волновым радиусам трубы $R_0/\lambda = 0.17$, 0.7 и 1.7. Здесь λ – длина волны; количество удерживаемых мод в цилиндрической трубе равно $N_1 = 20$, а в сферической полости – $N_2 = 50$. Для кривой *4* R_0/λ составляет 1.7, а количество мод увеличено до $N_1 = 33$ и $N_2 = 70$ соответственно.

На рис. 3 отношение радиуса сферической полости к радиусу трубы намеренно выбрано достаточно большим – $r_0/R_0 = 3$. Как видно из графика, уже при $a > 5 \cdot 10^3$ значение суммы энергетических коэффициентов $V+W$ стабилизируется. Для кривых *1*, *2*, *3* оно равно 1.000000, 1.000036, 1.002838 соответственно, что является весьма хорошим результатом. Рост погрешности с увеличением волновых размеров волновода представляется вполне закономерным. Если при $R_0/\lambda = 1.7$ (кривая *4*)

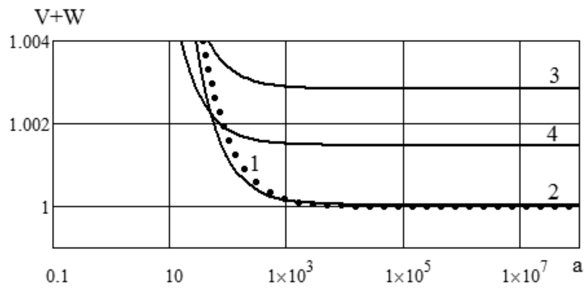

Рис. 3. Зависимость $V+W$ от величины константы a $(r_0/R_0 = 3)$:
1 – $R_0/\lambda = 0.17$; $N_1 = 20$, $N_2 = 50$;
2 – $R_0/\lambda = 0.7$; $N_1 = 20$, $N_2 = 50$;
3 – $R_0/\lambda = 1.7$; $N_1 = 20$, $N_2 = 50$;
4 – $R_0/\lambda = 1.7$; $N_1 = 33$, $N_2 = 70$

увеличить число мод до $N_1 = 33$, $N_2 = 70$, то значение суммы энергетических коэффициентов стабилизируется при величине $V+W = 1.001476$. Это свидетельствует о хорошей сходимости решения при редукции бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.

Теперь посмотрим, как зависит точность выполнения условия $V+W = 1$ от изменения частоты. На рис. 4 показаны величины $V+W$ как функции волнового радиуса трубы R_0/λ для трех вариантов отношения радиусов сферической полости и трубы – $r_0/R_0 = 1.2$, 2 и 3. Диапазон исследуемого изменения волнового радиуса составил $0.01 \le R_0/\lambda \le 1.6$ с шагом 0.028. Число удерживаемых мод $N_1 = 20$, $N_2 = 50$, при величине константы $a = 4 \cdot 10^4$.

Как видно из графика, даже при относительно большом $r_0/R_0 = 3$ и значительном волновом радиусе трубы R_0/λ наблюдается достаточно высокое качество выполнения закона сохранения энергии. Однако здесь можно говорить о двух интервалах изменения величины R_0/λ. На первом из них $(R_0/\lambda < 0.61)$ точность выполнения закона сохранения энергии очень высока, а на втором $R_0/\lambda \ge 0.61)$ – несколько снижается. Это поведение имеет достаточно естественное объяснение. Как известно, волновые размеры первых резонансных радиусов жесткой трубы составляют $(R_0/\lambda)_{\text{рез}} = 0.61$, 1.117 и 1.619. Данные величины определяют критические частоты для первой, второй и третьей мод в трубе соответственно. Для нулевой моды, которая является плоской волной, критическая частота в жесткой трубе равна нулю. Таким образом, при возрастании R_0/λ свыше 0.61, помимо нулевой моды, последовательно становятся однородными следующие высшие моды цилиндрического волновода. Таким образом, не-

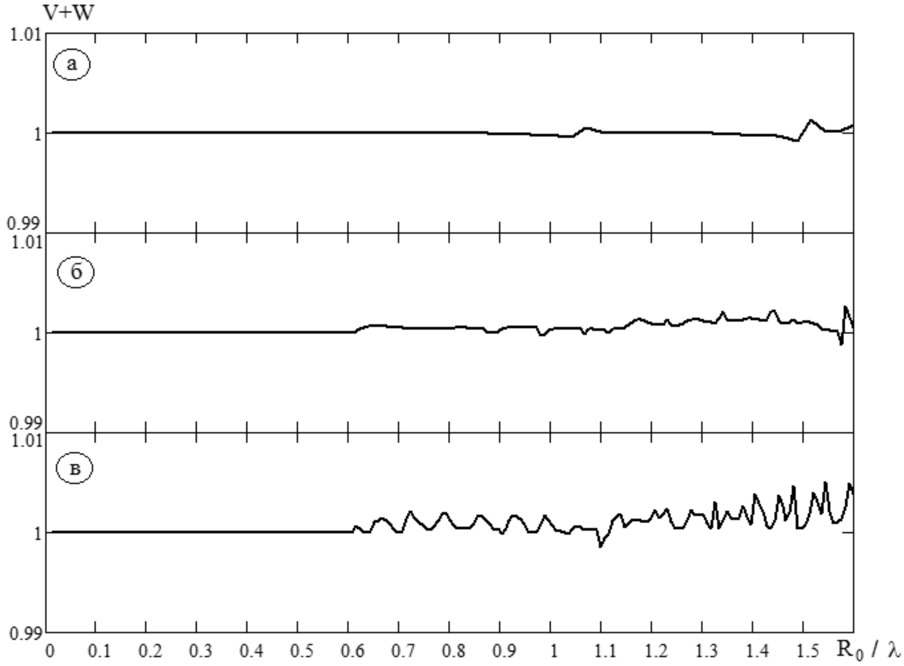

Рис. 4. Частотные зависимости суммы коэффициентов $V+W$ (вариант 1):
а – $r_0/R_0 = 1.2$, *б* – $r_0/R_0 = 2$, *в* – $r_0/R_0 = 3$

сколько худшее качество выполнения закона сохранения энергии в соответствующем диапазоне частот объясняется более сложной структурой поля в волноводе.

Теперь обратимся к результатам аналогичных расчетов, проведенных согласно второму варианту решения задачи. На рис. 5 показаны частотные зависимости суммы энергетических коэффициентов $V+W$ при тех же параметрах, что и на рис. 4. Как видно, качество выполнения закона сохранения энергии в области $R_0/\lambda > 0.61$ значительно снизилось, особенно следует отметить наличие сильных выбросов на некоторых частотах.

Можно предположить, что ухудшение качества выполнения закона сохранения энергии связано с особенностями задания граничных условий на "нефизических" участках границы ($0 \le \theta \le \theta_0$ и $\pi - \theta_0 \le \theta \le \pi$, $r = r_0$). Для их анализа вернемся к системе уравнений (10) – (14).

Напомним, что во втором варианте решения задачи область II – это сферическая полость радиуса r_0 за вычетом двух шаровых сегментов, которые располагаются внутри областей I и III. На сферических поверхностях упомянутых сегментов ($0 \le \theta \le \theta_0$ и $\pi - \theta_0 \le \theta \le \pi$, $r = r_0$) продолжение граничных условий было выбрано в виде равенства нулю производной по радиальной координате от функции $p_{\mathrm{II}}^{(2)}$, являющейся частью общего решения $p_{\mathrm{II}} = p_{\mathrm{II}}^{(1)} + p_{\mathrm{II}}^{(2)}$ для области II. Поскольку на жесткой поверхности сферической полости обнуляется именно производная $\partial p_{\mathrm{II}}/\partial r$, то $\partial p_{\mathrm{II}}^{(2)}/\partial r$ здесь не может быть равна нулю. Таким образом, продолжение граничного условия на поверхности $0 \le \theta \le \theta_0$ и $\pi - \theta_0 \le \theta \le \pi$, $r = r_0$, навязываемое уравнением (14), приводит к скачку производной $\partial p_{\mathrm{II}}^{(2)}/\partial r$. По-видимому, это и является причиной существенного ухудшения качества выполнения закона сохранения энергии в данном случае.

Попробуем в какой-то степени уменьшить вносимый скачок производной, опираясь на следующие рассуждения. Давление p и радиальная колебательная скорость в гармонической волне v_r связаны между собой посредством удельного акустического сопротивления среды ζ:

$$v_r \equiv \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{p}{\zeta} .$$

Учитывая появление при дифференцировании множителя $ik = i\omega/c$, имеем

$$\frac{1}{i\rho c} \frac{\partial p}{\partial (kr)} = \frac{p}{\zeta} .$$

Конечно, величина ζ в звуковом поле волновода априори неизвестна, однако можно положить, что она пропорциональна величине ρc с некоторым коэффициентом – $\zeta = \rho c/\beta$. Принимая во внимание

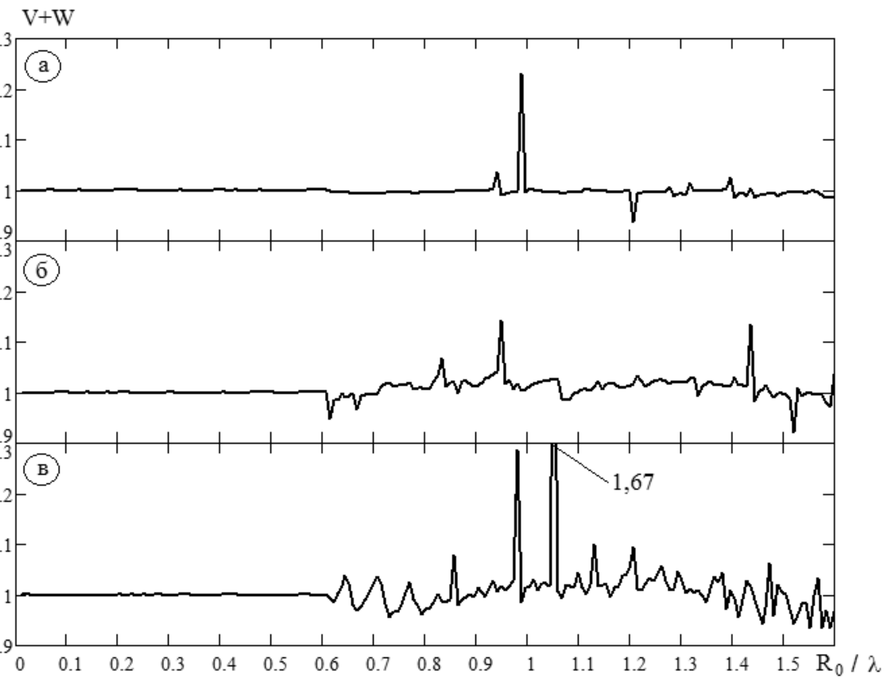

Рис. 5. Частотные зависимости суммы коэффициентов $V+W$ (вариант 2):
а – $r_0/R_0=1.2$, б – $r_0/R_0=2$, в – $r_0/R_0=3$

сказанное, изменим уравнение (14) функциональной системы (10) – (14) следующим образом:

$$\frac{\partial p_{\rm II}}{\partial r}=0, \qquad r=r_0, \quad \theta=[\theta_0,\pi-\theta_0],$$

$$\frac{\partial p_{\rm II}^{(2)}}{\partial(kr)}=i\beta p_{\rm II}^{(2)}, \quad r=r_0, \quad \theta=[0,\theta_0]\cup[\pi-\theta_0,\pi]. \qquad (16)$$

Теперь в новой системе уравнений (10) – (13), (16) для второго варианта решения задачи присутствует дополнительный параметр β. Чтобы сориентироваться в выборе его значения, будем исследовать качество выполнения закона сохранения энергии при заведомо неудовлетворительных ситуациях. Для этого выберем волновые размеры трубы и сферической полости, при которых наблюдаются сильные выбросы в частотной характеристике (см. рис. 5). На рис. 6 показаны графики зависимости $V+W$ от коэффициента β для трех таких ситуаций. Можно заметить, что оптимальная величина β находится в окрестности 0.1. Оптимизируя значение β при наиболее неблагоприятных ситуациях, можно надеяться, что и при других волновых размерах данный его выбор не ухудшит ситуацию.

Соответствующие расчеты для суммы $V+W$ при $\beta=0.1$ представлены на рис. 7. Заметим, что здесь пределы изменения величины $V+W$ выбраны между 0.9 и 1.1 (на рис. 5 верхняя граница равна 1.3). Сравнивая графики на рис. 5 и 7, можно отметить, что:

1) сильные выбросы, которые присутствуют в характеристиках рис. 5, исчезли;

2) во всем частотном диапазоне качество выполнения закона сохранения энергии не ухудшилось.

Анализируя проведенные расчеты, можно сказать, что при использовании метода частичных областей в волновых задачах, для которых имеет место пересечение частичных областей, более перспективен первый вариант решения задачи. В то же время, второй вариант (с продолжением граничных условий на "нефизические" участки границы) незаменим в тех волновых задачах, где частичные области не пересекаются, однако продолжение условий на "нефизические" участки границы необходимо для того, чтобы обеспечить возможность воспользоваться полнотой и ортогональностью соответствующего набора функций.

Таким примером может служить задача об излучении звука системой пересекающихся цилиндров [2]. Граница области, вне которой рассматривается звуковое поле, показана на рис. 8 (по-

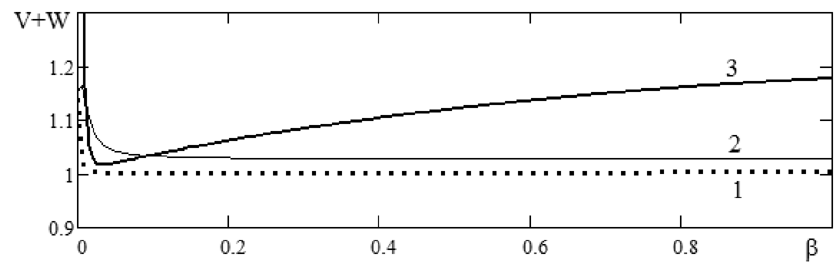

Рис. 6. Зависимость суммы $V+W$ (вариант 2) от величины коэффициента β:
1 – $r_0/R_0=1.2$, $R_0/\lambda=0.989$; *2* – $r_0/R_0=2$, $R_0/\lambda=0.95$; *3* – $r_0/R_0=3$, $R_0/\lambda=1.0517$

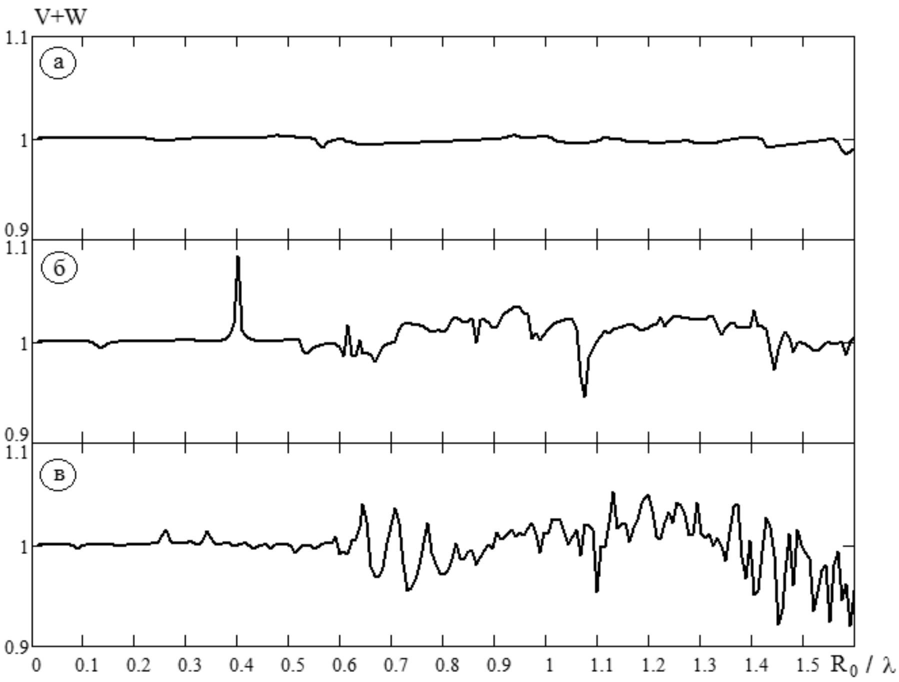

Рис. 7. Частотные зависимости суммы коэффициентов $V+W$ (вариант 2, $\beta=0.1$):
а – $r_0/R_0=1.2$, *б* – $r_0/R_0=2$, *в* – $r_0/R_0=3$

ле рассматривается во внешности системы цилиндров). Для описания геометрии излучателя и построения решения введены две полярные системы координат – (r_1,θ_1) с центром в точке O_1 и (r_2,θ_2) с центром в точке O_2. Излучающая поверхность образована частями окружностей $r_1=a_1$, $\theta_0^{(1)}\le\theta_1\le 2\pi-\theta_0^{(1)}$ и $r_2=a_2$, $-\theta_0^{(2)}\le\theta_2\le\theta_0^{(2)}$. На них задана нормальная составляющая колебательной скорости частиц $v_r(a_1,\theta_1)=F_1(\theta_1)$ и $v_r(a_2,\theta_2)=F_2(\theta_2)$.

Звуковое поле в точке наблюдения состоит из полей, излучаемых каждым цилиндром, причем излучение каждого из них должно быть определено с учетом многократного рассеяния звука на общей поверхности. Поэтому поле давления пары цилиндров можно определить как сумму давлений p_1 и p_2:

$$p=p_1+p_2=\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{(1)}H_n^{(1)}(kr_1)\cos(n\theta_1)+ \\ +\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{(2)}H_n^{(1)}(kr_2)\cos(n\theta_2), \qquad (17)$$

где коэффициенты $A_n^{(1)}$ и $A_n^{(2)}$ выбираются так, чтобы одновременно удовлетворить граничные условия на поверхностях обоих цилиндров.

Для классического случая разнесенных цилиндров, когда граничные условия задаются на полных окружностях, процедура выполнения грани-

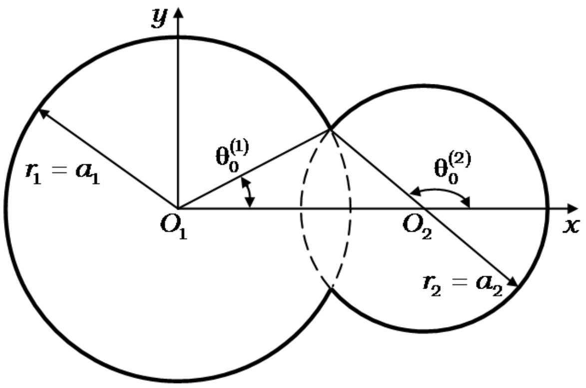

Рис. 8. Система пересекающихся круговых цилиндров

чных условий проста и приводит к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода [5]. Использование же выражения (17) в задаче о паре пересекающихся цилиндров не позволяет напрямую воспользоваться соответствующим набором функций $\cos(n\theta)$, поскольку на штриховых участках окружностей, показанных на рис. 8, граничные условия не определены, а сами эти участки вообще не являются физическими границами области и находятся вне области существования звукового поля. В задаче об излучении звука парой пересекающихся цилиндров продолжение граничных условий на "нефизические" участки границы – единственно возможный вариант решения задачи в рамках метода частичных областей.

ВЫВОДЫ

1. В рамках метода частичных областей проведен сравнительный анализ двух подходов к решению задачи о распространении плоской волны в круглом волноводе со сферической полостью. Для данной задачи характерно наличие области пересечения частичных областей, на которые разбивается вся область существования звукового поля.
2. Установлено, что при решении волновых задач методом частичных областей в тех случаях, когда частичные области пересекаются, более перспективен первый подход решения задачи с заданием части условий сопряжения для линейных комбинаций давления и его нормальной производной по координате x.
3. Второй подход решения задачи с приравниванием нулю нормальной производной от части решения на границе одной из подобластей незаменим, когда граничные условия продолжаются на "нефизические" участки границы, расположенные вне области существования звукового поля.
4. Показано, что рациональный выбор условий на "нефизических" границах может существенно улучшить качество выполнения закона сохранения энергии, особенно при использовании второго подхода.

1. *Гринченко В. Т., Вовк И. В., Мацыпура В. Т.* Волновые задачи акустики.– К.: Интерсервис, 2013.– 572 с.
2. *Гринченко В. Т.* Развитие метода решения задач излучения и рассеяния звука в неканонических областях // Гидромеханика.– 1996.– **70**.– С. 27-–40.
3. *Вовк И. В., Гомилко А. М., Городецкая Н. С.* Об особенностях применения метода частичных областей в волновых задачах // Акуст. ж.– 1995.– **41**, № 3.– С. 399–404.
4. *Вычислительные* методы в электродинамике / Под ред. Р. Миттры.– М.: Мир, 1977.– 486 с.
5. *Шендеров Е. Л.* Волновые задачи гидроакустики.– Л.: Судостроение, 1972.– 348 с.