

УДК 534.3; 616.12-008

## ФУНКЦІЯ ГРІНА ТРИВИМІРНОГО КОНВЕКТИВНОГО РІВНЯННЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ ПРЯМОГО КАНАЛУ

А. О. БОРИСЮК

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ  
вул. Желябова, 8/4, 03680, МСП, Київ-180, Україна  
E-mail: andriy\_borysyuk@yahoo.com

Отримано 10.09.2015

Розробленим у роботі методом побудовано функцію Гріна тривимірного конвективного рівняння Гельмгольца для нескінченного прямого каналу довільної (але незмінної по його довжині) форми й площі поперечного перерізу з акустично жорсткими і акустично м'якими стінками, а також зі стінками змішаного типу. Вона допускає представлення у формі ряду за акустичними модами каналу. У побудованій функції Гріна в явному вигляді відображено ефекти рівномірної осередненої течії в каналі. Вони стають вагомішими зі збільшенням числа Маха течії, зумовлюючи, зокрема, появу і подальше наростання асиметрії функції відносно поперечного перерізу, в якому розташоване акустичне джерело. У випадку ж відсутності течії функція Гріна зберігає симетрію відносно вказаного перерізу. На основі запропонованого методу одержано функції Гріна тривимірного конвективного рівняння Гельмгольца для нескінчених прямих каналів з круговим і прямокутним поперечним перерізом і різними типами стінок.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** течія в каналі, функція Гріна, число Маха, конвективне хвильове рівняння, акустичні моди

Разработанным в работе методом построена функция Грина трехмерного конвективного уравнения Гельмгольца для бесконечного прямого канала произвольной (но неизменной по его длине) формы и площади поперечного сечения с акустически жесткими и акустически мягкими стенками, а также со стенками смешанного типа. Она допускает представление в форме ряда по акустическим модам канала. В построенной функции Грина в явном виде отражены эффекты равномерного осредненного течения в канале. Они становятся более существенными с увеличением числа Маха течения, приводя, в частности, к появлению и дальнейшему нарастанию асимметрии функции относительно поперечного сечения, в котором находится акустический источник. В случае же отсутствия течения полученная функция Грина сохраняет симметрию относительно этого сечения. На основании упомянутого метода получены функции Грина трехмерного конвективного уравнения Гельмгольца для бесконечных прямых каналов с круговым и прямоугольным поперечным сечением и различными типами стенок.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** течение в канале, функция Грина, число Маха, конвективное волновое уравнение, акустические моды

This paper deals with developing of method for obtaining the Green's function of a three-dimensional convective Helmholtz equation for an infinite straight channel of arbitrary (but constant along its length) cross-sectional shape and area, having either acoustically rigid or acoustically soft walls, or the walls of a mixed type. This function admits a representation by the series of the channel acoustic modes. In the obtained Green's function, the effects of a uniform mean flow in the channel are explicitly reflected. They become more significant with the increase of the flow Mach number causing, in particular, the appearance and further growth of the function asymmetry about the cross-section where the acoustic source is located. In the case of flow absence, the obtained Green's function is symmetric about this cross-section. On the based of the above mentioned method, the Green's functions of a three-dimensional convective Helmholtz equation are obtained for the infinite straight channels of circular and rectangular cross-section and various wall types.

**KEY WORDS:** flow in the channel, the Green's function, the Mach number, the convective wave equation, acoustic modes

### ВСТУП

Вивчення закономірностей генерації та поширення звуку в каналах актуальне для архітектури, медицини, нафтогазової промисловості, комунального господарства, автомобіле- й літакобудування, тощо [1–5]. Незалежно від геометрії каналів і типу акустичних джерел, звукові поля у них у принципі можна описати за допомогою методу функцій Гріна. Варто зауважити, що його застосовувати доцільно лише за умови існування принципової можливості побудови відповідної функції Гріна. Така

можливість, окрім професійної кваліфікації й мистецтва дослідника, визначається рядом об'єктивних факторів. До них слід віднести геометрію досліджуваного каналу та форму його поперечного перерізу, фізичні властивості стінок і умови закріплення, фізичні властивості зовнішнього й внутрішнього середовищ, акустичні умови на кінцях каналу, наявність або відсутність течії в ньому тощо.

Як засвідчує аналіз наукової літератури, зпоміж циліндричних конструкцій, геометрія й фізичні властивості яких у цілому визначаються різними комбінаціями зазначених факторів, донеда-

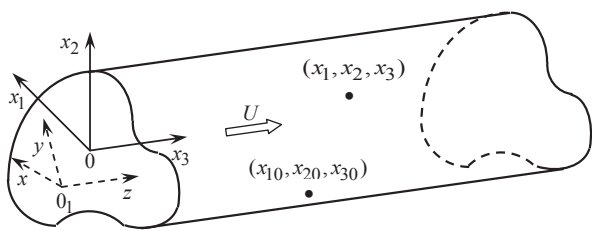


Рис. 1. Геометрія задачі (нескінченний прямий канал довільного поперечного перерізу)

на найбільш дослідженими були нескінченні прямі жорсткостінні канали кругового чи прямокутного поперечного перерізу (див., наприклад, [1, 2, 6–18]). Для них побудовані відповідні функції Гріна хвильового рівняння й рівняння Гельмгольца. З їхньою допомогою на основі теореми Гріна, одержані вирази для різних характеристик згенерованих акустичних полів. Однак усі ці результати зазвичай обмежувалися випадком відсутності течії в каналі. Якщо ж наявність течії і бралася до уваги, то її вплив у відповідних функціях Гріна та/або кінцевих результатах проявлявся лише у неявному вигляді [1, 2, 6–8, 10, 12–18]. У явному вигляді (тобто у формі явних математичних залежностей характеристик акустичних полів від параметрів течії) ці ефекти були відображені лише у відповідних масштабних законах та кількісних оцінках.

Зазначений недолік було частково виправлено у нещодавніх роботах [19–23]. У результаті цих досліджень побудовані функції Гріна тривимірного хвильового рівняння для прямих каналів довільного поперечного перерізу з різноманітними типами стінок та внутрішньою рівномірною осередненою течією [19–22], а також функції Гріна тривимірного рівняння Гельмгольца для прямого жорсткостінного каналу кругового й прямокутного поперечного перерізу із внутрішньою течією [19, 23]. Окрім іншого, в одержаних функціях уже в явному вигляді відображені ефекти, спричинені течією.

Дане дослідження присвячене подальшому розвитку й узагальненню результатів робіт [19–23] для тривимірного конвективного рівняння Гельмгольца, яке описує звукове поле в нескінченному прямому каналі довільної, але незмінної по його довжині форми та площі поперечного перерізу з акустично жорсткими (акустично м'якими) стінками, або ж зі стінками змішаного типу. Одержані при цьому результати демонструють явну залежність від параметрів течії в каналі, а у разі конкретизації форми його поперечного перерізу (кру-

гової чи прямокутної) співпадають з відповідними результатами, викладеними в [19, 23].

Стаття складається із вступу, трьох розділів, висновків, списку літератури і двох додатків. У першому розділі сформульовано задачу. Другий розділ присвячено побудові функції Гріна тривимірного конвективного рівняння Гельмгольца для каналу довільної, але незмінної по його довжині форми з різними типами стінок. У третьому розділі розглянуто канали найтипівіших кругового і прямокутного поперечних перерізів. Для них розробленим у другому розділі методом побудовано функції Гріна тривимірного конвективного рівняння Гельмгольца. Наприкінці сформульовано висновки, наведено списки цитованої літератури і прийнятих позначень (додаток А). Додаток Б присвячено виведенню в операторному вигляді та представленню в довільній ортогональній криволінійній системі координат тривимірного конвективного рівняння Гельмгольца.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

На рис. 1 зображено нерухомий нескінченний прямий канал довільної незмінної по довжині форми та сталої площі поперечного перерізу. Його стінки (у будь-якій комбінації) можуть бути акустично жорсткими чи акустично м'якими. Тут мають на увазі такі форма поперечного перерізу каналу і тип його стінок, для яких можна знайти аналітично або чисельно його акустичні моди.

У каналі задано рівномірну осереднену по його поперечному перерізу течію рідини<sup>1</sup> зі швидкістю  $U$  в напрямку твірної його стінки<sup>2</sup>. У каналі довільним чином розташовані нерухомі акустичні джерела, які й генерують у ньому акустичне поле. Одночастотна компонента останнього описується тривимірним конвективним рівнянням Гельмгольца (див. рівняння (40) додатку Б):

$$\nabla^2 \check{p}_a + k_0^2 \check{p}_a + i2k_0 M \frac{\partial \check{p}_a}{\partial x_3} - M^2 \frac{\partial^2 \check{p}_a}{\partial x_3^2} = \check{\gamma}, \quad (1)$$

$$(x_1, x_2) \in A, \quad |x_3| < \infty.$$

У цьому співвідношенні  $\check{p}_a$  – частотний образ Фур'є акустичного тиску  $p_a$ ;  $k_0 = \omega/c_0$  – акустичне хвильове число;  $i = \sqrt{-1}$  – уявна одиниця;

<sup>1</sup>Тут не вводиться в'язкість рідини, оскільки вважається, що згенерований звук поширюється в ідеальному стисливому середовищі [1, 2, 10–23]. При цьому густина рідини вводиться лише через наперед задану швидкість звуку в незбуреному середовищі.

<sup>2</sup>Ми розглядаємо такі швидкості руху рідини, при яких коливання стінок каналу в разі їх існування залишаються малими, щоб зберегти лінійність задачі.

$M = U/c_0$  – число Маха течії в каналі;  $\gamma$  – частотний образ Фур'є функції  $\gamma$ , яка описує сумарний розподіл наявних акустичних джерел;  $\omega$  – циклічна частота;  $c_0$  – швидкість звуку в незбуреній рідині;  $x_1, x_2, x_3$  – вибрані на рис. 1 ортогональні (у загальному випадку криволінійні) координати з віссю  $x_3$  уздовж течії;  $A$  – поперечний переріз каналу (з площею  $|A|$ );  $\nabla^2$  – оператор Лапласа, який у системі координат  $(x_1, x_2, x_3)$  записується наступним чином (див. співвідношення (38) додатку Б):

$$\nabla^2 = \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + h_1 h_2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right]. \quad (2)$$

Тут  $h_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – коефіцієнти Ляме [9, 22, 24, 25]:

$$h_i = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial x_i} \right)^2}; \quad (3)$$

$$h_1 = h_1(x_1, x_2), \quad h_2 = h_2(x_1, x_2), \quad h_3 = 1;$$

$x, y, z$  – прямокутні декартові координати, вибрані таким чином, що їхній початок лежить у тому ж поперечному перерізі каналу, що й початок системи координат  $(x_1, x_2, x_3)$ , а вісь  $z$  співнаправлена з віссю  $x_3$  [22].

Окрім того, згідно з умовою задачі,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial x_3} = 0, \quad |A| = \text{const.}$$

Завдання полягає у побудові функції Гріна рівняння (1) для розглянутого каналу.

## 2. ФУНКЦІЯ ГРІНА

### 2.1. Рівняння та умови, яким задовольняє функція Гріна

Шукана функція Гріна  $\tilde{G}$  задовольняє рівняння<sup>3</sup> (див. формулу (41) додатку Б):

$$\nabla^2 \tilde{G} + k_0^2 \tilde{G} + i2k_0 M \frac{\partial \tilde{G}}{\partial x_3} - M^2 \frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial x_3^2} = -\frac{1}{2\pi} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad (4)$$

<sup>3</sup>У науковій літературі можна зустріти різні константи у правих частинах рівнянь для відповідних функцій Гріна (наприклад,  $\pm 1, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 1/(2\pi)$ ). Це зумовлене, головним чином, формами запису вибраних авторами перетворень Фур'є, проте не має принципового значення для кінцевого результату: відповідні функції Гріна відрізнятимуться між собою лише сталими множниками, а розв'язки задач, одержані за їхньою допомогою, співпадатимуть.

$$(x_1, x_2) \in A, \quad |x_3| < \infty,$$

$$(x_{10}, x_{20}) \in A, \quad |x_{30}| < \infty,$$

в якому (див. співвідношення (38) додатку Б) через

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{h_1 h_2} \delta(x_1 - x_{10}) \delta(x_2 - x_{20}) \delta(x_3 - x_{30})$$

позначено тривимірну просторову, а через  $\delta(x_i - x_{i0})$ ,  $i = 1, 2, 3$  – одновимірні просторові дельта-функції Дірака. Окрім того,  $\vec{r} = x_i \vec{e}_i$  і  $\vec{r}_0 = x_{i0} \vec{e}_i$  – радіус-вектори точки поля і акустичного джерела відповідно;  $\vec{e}_i$  – орти координатних осей  $x_i$ ; оператор  $\nabla^2$  дається виразом (2). Тут і надалі передбачається підсумовування по індексах, які повторюються.

Співвідношення (4) описує акустичний тиск у довільній точці каналу  $(x_1, x_2, x_3)$ , згенерований на частоті  $\omega$  точковим акустичним джерелом, розташованим у точці  $(x_{10}, x_{20}, x_{30})$ , див. рис. 1.

Граничні умови для функції  $\tilde{G}$  сформулюємо наступним чином:

- рівність нулеві нормальної компоненти акустичної швидкості для акустично жорсткої стінки каналу  $S$ :

$$\left. \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \vec{n}} \right|_S = 0, \quad (5)$$

- рівність нулеві акустичного тиску на  $S$  для акустично м'якої стінки:

$$\tilde{G}|_S = 0, \quad (6)$$

- для стінки з мішаними властивостями (частина поверхні  $S_1$  стінки акустично жорстка, а її решта  $S_2 = S \setminus S_1$  акустично м'яка)

$$\left. \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \vec{n}} \right|_{S_1} = 0, \quad \tilde{G}|_{S_2} = 0, \quad S_1 + S_2 = S. \quad (7)$$

Тут  $\vec{n}$  – зовнішня нормаль до стінки  $S$ , а поверхні  $S_1$  та  $S_2$  можуть складатися з кількох однозв'язних областей.

Окрім цього, постулюємо відсутність джерел звуку на нескінченності, а також виконання принципу взаємності [9–18, 22]:

$$\tilde{G}(\vec{r}, \vec{r}_0; \omega) = \tilde{G}(\vec{r}_0, \vec{r}; \omega). \quad (8)$$

У разі кругової форми поперечного перерізу каналу (див. підрозділ 3.1) слід додати ще умови періодичності по азимутальній координаті та симетрії шуканої функції Гріна відносно осевого перерізу каналу, в якому розташоване акустичне джерело.

## 2.2. Побудова функції Гріна та її аналіз

Перш ніж переходити до розв'язування сформульованої у попередньому підрозділі задачі, звернімо увагу на те, що вона є частотним образом Фур'є задачі для функції Гріна  $G$  відповідного конвективного хвильового рівняння, розв'язаної в роботі [22]. Відтак, у принципі шукаючи функцію Гріна  $\tilde{G}$  формально можна одержати з функції  $G$ , застосувавши до неї відповідне пряме часове перетворення Фур'є. Однак такий формальний підхід може призвести до того, що певні важливі фізичні особливості процесу генерації та поширення звуку в досліджуваному каналі залишаться поза увагою. Таким чином, доцільнішим видається безпосереднє розв'язання задачі (4)–(8).

Виходячи зі сказаного, розв'язок зазначеної граничної задачі шукатимемо у вигляді ряду за акустичними модами каналу  $\Psi_{nm}$ , які, згідно з постановкою задачі, можуть бути знайдені аналітично або чисельно:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(x_1, x_2, x_3, x_{10}, x_{20}, x_{30}; \omega) = \\ = \sum_n \sum_m \tilde{G}_{nm}(x_3, x_{10}, x_{20}, x_{30}; \omega) \times \\ \times \Psi_{nm}(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (9)$$

Таке представлення функції  $\tilde{G}$  задовольняє (в залежності від типу стінок каналу) одну з граничних умов (5)–(7), а його невідомі коефіцієнти  $\tilde{G}_{nm}$  – одновимірне конвективне рівняння Гельмгольца:

$$\begin{aligned} (1 - M^2) \frac{\partial^2 \tilde{G}_{nm}}{\partial x_3^2} + k_{f_{nm}}^2 \tilde{G}_{nm} + i2k_0 M \times \\ \times \frac{\partial \tilde{G}_{nm}}{\partial x_3} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\Psi_{nm}(x_{10}, x_{20})}{\|\Psi_{nm}\|^2} \delta(x_3 - x_{30}), \end{aligned} \quad (10)$$

$$k_{f_{nm}} = \sqrt{k_0^2 - k_{nm}^2}, \quad (x_{10}, x_{20}) \in A,$$

$$|x_3| < \infty, \quad |x_{30}| < \infty.$$

Рівняння (10) одержується з рівняння (4) після підстановки туди ряду (9) з подальшим скалярним множенням на моди  $\Psi_{nm}$  при врахуванні ортогональності останніх:

$$\begin{aligned} \iint_A \Psi_{nm}(x_1, x_2) \Psi_{sq}(x_1, x_2) dA = \\ = \begin{cases} \|\Psi_{nm}\|^2, & (s, q) = (n, m), \\ 0, & (s, q) \neq (n, m); \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\|\Psi_{nm}\|^2 = \iint_A \Psi_{nm}^2(x_1, x_2) dA,$$

$$dA = h_1 h_2 dx_1 dx_2$$

і співвідношення

$$\nabla_{(x_1, x_2)}^2 \Psi_{nm}(x_1, x_2) = -k_{nm}^2 \Psi_{nm}(x_1, x_2), \quad (12)$$

яке функції  $\Psi_{nm}$  мають задовольняти.

У виразах (9)–(12) оператор Лапласа у координатах  $x_1, x_2$  (див. вираз (39) додатку Б) має такий вигляд:

$$\nabla_{(x_1, x_2)}^2 = \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right].$$

Також тут  $k_{nm}$  – модальні хвильові числа у поперечному перерізі каналу;  $k_{f_{nm}}$  – модальні осьові хвильові числа;  $\|\Psi_{nm}\|^2$  – квадрати норм мод  $\Psi_{nm}$ . Кількість мод  $\Psi_{nm}$  і межі сум у представленні (9) залежать від форми поперечного перерізу каналу й типу його стінок. У наступному розділі буде наведено вирази для акустичних мод  $\Psi_{nm}$ , хвильових чисел  $k_{nm}$ , квадратів норм мод  $\|\Psi_{nm}\|^2$ , а також відповідні межі зміни індексів  $n$  та  $m$  для деяких конкретних конфігурацій каналів.

Розв'язок одновимірного конвективного рівняння Гельмгольца (10) можна одержати з розв'язку його класичного одновимірного аналогу, перехід до якого можна здійснити, виконавши математичні операції, використані в роботі [19]. Для цього перепишемо невідомі функції  $\tilde{G}_{nm}$  у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{nm}(x_3, x_{10}, x_{20}, x_{30}; \omega) = \\ = \frac{\lambda l}{c_0} e^{-i\lambda^2 M k_0 (x_3 - x_{30})} \times \end{aligned} \quad (13)$$

$$\times \hat{G}_{nm}(X_3, x_{10}, x_{20}, X_{30}; \Omega),$$

після чого підставимо вираз (13) у співвідношення (10). Ця процедура приводить до рівняння відносно функцій  $\hat{G}_{nm}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{G}_{nm}}{\partial X_3^2} + K_{f_{nm}}^2 \hat{G}_{nm} = \\ = -\frac{1}{2\pi} \frac{c_0 l}{\lambda} \frac{\Psi_{nm}(x_{10}, x_{20})}{\|\Psi_{nm}\|^2} \delta\left(\frac{l}{\lambda}(X_3 - X_{30})\right) \end{aligned} \quad (14)$$

в області

$$|X_3| < \infty, \quad |X_{30}| < \infty.$$

Рівняння (14) є класичним одновимірним рівнянням Гельмгольца, в якому введені:

безрозмірні осьові координати

$$X_3 = \frac{\lambda x_3}{l}, \quad X_{30} = \frac{\lambda x_{30}}{l};$$

безрозмірна частота

$$\Omega = \lambda \frac{\omega l}{c_0} = \lambda k_0 l;$$

безрозмірний параметр

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - M^2}};$$

безрозмірні модальні осьові хвильові числа

$$K_{fnm} = \sqrt{\Omega^2 - k_{nm}^2} l = \sqrt{\lambda^2 k_0^2 - k_{nm}^2} l;$$

масштаб довжини  $l$ , який можна вибирати довільним чином [22].

З урахуванням умови випромінювання на нескінченність, яку повинна задовольняти функція  $\hat{G}$  (а, як наслідок співвідношень (9), (13), і коефіцієнти  $\hat{G}_{nm}$ ), розв'язок рівняння (14) для нескінченної області набуває такого вигляду [19]:

$$\hat{G}_{nm} = \frac{ic_0}{4\pi K_{fnm}} \frac{\Psi_{nm}(x_{10}, x_{20})}{\|\Psi_{nm}\|^2} \times e^{iK_{fnm}|X_3 - X_{30}|} \quad (15)$$

Його можна переписати в еквівалентній формі

$$\hat{G}_{nm} = \frac{ic_0}{4\pi K_{fnm}} \frac{\Psi_{nm}(x_{10}, x_{20})}{\|\Psi_{nm}\|^2} \times \left[ H(X_{30} - X_3) e^{-iK_{fnm}(X_3 - X_{30})} + H(X_3 - X_{30}) e^{iK_{fnm}(X_3 - X_{30})} \right],$$

де через

$$H(x) = \int_{-\infty}^x \delta(\eta) d\eta = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

позначено функцію Хевісайда [9, 10, 12–23].

Тоді з виразів (13) для функцій  $\tilde{G}_{nm}$  і (15) для коефіцієнтів  $\hat{G}_{nm}$  одержуємо розв'язок рівняння (10):

$$\tilde{G}_{nm} = \frac{i\lambda}{4\pi \sqrt{\lambda^2 k_0^2 - k_{nm}^2}} \frac{\Psi_{nm}(x_{10}, x_{20})}{\|\Psi_{nm}\|^2} \times e^{i(\lambda \sqrt{\lambda^2 k_0^2 - k_{nm}^2} |x_3 - x_{30}| - \lambda^2 M k_0 (x_3 - x_{30}))}. \quad (16)$$

Підстановка співвідношення (16) у ряд (9) дає остаточний вираз для шуканої функції Гріна  $\tilde{G}$  тривимірного конвективного рівняння Гельмгольца (1):

$$\tilde{G} = \frac{i\lambda}{4\pi} e^{-i\lambda^2 M k_0 (x_3 - x_{30})} \times \sum_n \sum_m \frac{\Psi_{nm}(x_{10}, x_{20})}{\|\Psi_{nm}\|^2} \Psi_{nm}(x_1, x_2) \times e^{i\lambda \sqrt{\lambda^2 k_0^2 - k_{nm}^2} |x_3 - x_{30}|} \times \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 k_0^2 - k_{nm}^2}}. \quad (17)$$

Зазначимо, що межі зміни координат точки поля  $(x_1, x_2, x_3)$  й акустичного джерела  $(x_{10}, x_{20}, x_{30})$  у функції  $\tilde{G}$  наведені після рівняння (4).

Аналіз співвідношення (17) показує, що побудована функція Гріна  $\tilde{G}$  записується у вигляді ряду за акустичними модами  $\Psi_{nm}$  зображеного на рис. 1 каналу. Вона також задовольняє принцип взаємності (8), умову випромінювання на нескінченність, а також, залежно від типу стінок каналу, одну з граничних умов (5)–(7). Окрім цього, залежність виразу в правій частині формули (17) від чисел  $M$  і  $\lambda$  у явному вигляді відображає вплив рівномірної осередненої течії в каналі на функцію  $\tilde{G}$ . Очевидно, що він посилюється зі зростанням числа Маха  $M$ , викликаючи, зокрема, появу й подальше збільшення асиметрії функції  $\tilde{G}$  відносно поперечного перерізу каналу  $x_3 = x_{30}$ , в якому розташоване точкове акустичне джерело (див. рис. 1). Натомість, зменшення числа  $M$  призводить до послаблення впливу течії на функцію  $\tilde{G}$  і зменшення асиметрії останньої. При відсутності течії в каналі ( $M=0$ ,  $\lambda=1$ ) функція (17) стає симетричною відносно перерізу  $x_3 = x_{30}$ :

$$\tilde{G} \Big|_{M=0} = \frac{i}{4\pi} \sum_n \sum_m \frac{\Psi_{nm}(x_{10}, x_{20})}{\|\Psi_{nm}\|^2} \times \Psi_{nm}(x_1, x_2) \frac{e^{ik_{fnm}|x_3 - x_{30}|}}{k_{fnm}}.$$

Ще раз зауважимо, що функція Гріна (17) і сам метод її побудови підходять лише для прямих каналів з такими формами поперечного перерізу й типами стінок, для яких можна знайти (аналітично або чисельно) їхні акустичні моди  $\Psi_{nm}$ . Надалі розглянемо прямі канали, всередині яких задані розподіл акустичних джерел і течія, ідеальні стінки відповідають міркуванням, викладеним у підрозділі 2.1, а поперечний переріз має одну з найтипівіших форм – кругову чи прямокутну. На цих

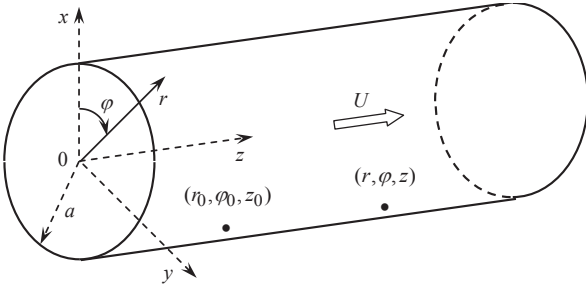


Рис. 2. Нескінченний прямий канал кругового поперечного перерізу

прикладі продемонструємо можливість застосування розробленого методу побудови функції Гріна на тривимірному конвективного рівняння Гельмгольца.

### 3. ЧАСТИННІ ВИПАДКИ

#### 3.1. Канал кругового поперечного перерізу

Якщо поперечний переріз розглянутого у попередніх розділах каналу – круговий з радіусом  $a$  (рис. 2), то за систему координат  $(x_1, x_2, x_3)$  для нього логічно обрати циліндричну систему координат  $(r, \varphi, z)$ :

$$x_1 \equiv r, \quad x_2 \equiv \varphi, \quad x_3 \equiv z.$$

При цьому вісь  $x_3$  слід направити уздовж осі каналу в напрямку течії так, щоб вона співпадала з віссю  $z$  прямокутної декартової системи координат  $x, y, z$ . На додачу мають співпадати початки координатних систем  $(x, y, z)$  і  $(x_1, x_2, x_3) = (r, \varphi, z)$ . Виходячи з цього, зв'язок між координатами  $x, y, z$  і  $x_1, x_2, x_3$  довільної точки каналу буде таким:

$$x = r \cos \varphi \equiv x_1 \cos x_2,$$

$$y = r \sin \varphi \equiv x_1 \sin x_2,$$

$$z = x_3,$$

причому коефіцієнти Ляме (3) матимуть вигляд

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1.$$

Відповідно, рівняння (4) для функції Гріна  $\tilde{G}$  переписеться наступним чином:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \tilde{G} + k_0^2 \tilde{G} + i2k_0 M \frac{\partial \tilde{G}}{\partial z} - M^2 \frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial z^2} = \\ = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r - r_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(z - z_0), \end{aligned}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$0 \leq r, \quad r_0 \leq a, \quad 0 \leq \varphi, \quad \varphi_0 \leq 2\pi,$$

$$|z| < \infty, \quad |z_0| < \infty,$$

де  $r_0 = x_{10}$ ,  $\varphi_0 = x_{20}$ ,  $z_0 = x_{30}$  – координати акустичного джерела.

Умови (5)–(8), в яких  $n$  замінимо на  $r$ , а  $S$  – на  $r = a$ , слід доповнити умовами періодичності функції  $\tilde{G}$  по азимутальній координаті  $\varphi$ :

$$\tilde{G}|_{\varphi=\varphi_*+2s\pi} = \tilde{G}|_{\varphi=\varphi_*}, \quad s = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (18)$$

та її симетрії відносно осевого перерізу каналу  $\varphi = \varphi_0$ , в якому розташоване зазначене джерело:

$$\tilde{G}|_{\varphi=\varphi_0+\Delta\varphi} = \tilde{G}|_{\varphi=\varphi_0-\Delta\varphi}, \quad \Delta\varphi > 0. \quad (19)$$

Сама ж функція Гріна  $\tilde{G}$  рівняння (1) для даного каналу, одержана зі співвідношення (17), матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(r, \varphi, z, r_0, \varphi_0, z_0; \omega) = \frac{i\lambda}{4\pi} e^{-i\lambda^2 M k_0 (z - z_0)} \times \\ \times \sum_{j=1}^2 \sum_n \sum_m \frac{\Psi_{nm}^{(j)}(r_0, \varphi_0)}{\|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2} \Psi_{nm}^{(j)}(r, \varphi) \times \\ \times \frac{e^{i\lambda \sqrt{\lambda^2 k_0^2 - k_{nm}^2} |z - z_0|}}{\sqrt{\lambda^2 k_0^2 - k_{nm}^2}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Поява у виразі (20) додаткової суми пояснюється тим, що акустичні моди каналу кругового поперечного перерізу  $\Psi_{nm}$  можна розділити на набори парних  $\Psi_{nm}^{(1)}$  і непарних  $\Psi_{nm}^{(2)}$  по азимутальній координаті  $\varphi$  мод, для яких усі математичні викладки робляться окремо:

$$\Psi_{nm} = \{\Psi_{nm}^{(1)}, \Psi_{nm}^{(2)}\}.$$

Щоб мати можливість застосовувати цю функцію для знаходження на основі теореми Гріна [1, 9–23] різних характеристик акустичних полів у каналі кругового поперечного перерізу, співвідношення (20) треба доповнити виразами для акустичних мод каналу  $\Psi_{nm}$ , квадратів їхніх норм  $\|\Psi_{nm}\|^2$  і модальних хвильових чисел  $k_{nm}$ . Окрім того, слід також вказати кількість як самих мод  $\Psi_{nm}$ , так і чисел  $k_{nm}$ . Усі ці дані можна одержати з рівняння (12) після конкретизації граничних умов на стінках каналу. Розглянемо деякі з них.

**3.1.1. Канал кругового поперечного перерізу з акустично жорсткими стінками**

Нехай зображений на рис. 2 канал має акустично жорсткі стінки. У такій ситуації його акустичні моди  $\Psi_{nm}$  і відповідні радіальні модальні хвильові числа  $k_{nm}$  мають задовольняти записане в координатах  $r, \varphi$  рівняння (12):

$$\nabla_{(r,\varphi)}^2 \Psi_{nm}(r, \varphi) = -k_{nm}^2 \Psi_{nm}(r, \varphi),$$

$$\nabla_{(r,\varphi)}^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

граничну умову (5):

$$\left. \frac{\partial \Psi_{nm}}{\partial r} \right|_{r=a} = 0,$$

а також умови періодичності (18) та симетрії (19).

Таким чином,  $\Psi_{nm}$  і  $k_{nm}$  матимуть наступний вигляд:

$$\Psi_{nm} = \{ \Psi_{nm}^{(1)}, \Psi_{nm}^{(2)} \},$$

$$Psi_{nm}^{(1)}(r, \varphi) = J_n(k_{nm}r) \cos(n\varphi), \quad (21)$$

$$\Psi_{nm}^{(2)}(r, \varphi) = J_n(k_{nm}r) \sin(n\varphi),$$

$$k_{nm} = \frac{\zeta_{nm}}{a}; \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots$$

Тут  $J_n$  – циліндричні функції Бесселя першого роду порядку  $n$ ,  $\zeta_{nm}$  – корені рівняння

$$J'_n(\zeta_{nm}) = 0,$$

а  $\Psi_{0m}^{(2)} \equiv 0$ .

Функції  $\Psi_{nm}$  ортогональні у поперечному перерізі каналу (див. формулу (11)):

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} \Psi_{nm}^{(j)}(r, \varphi) \Psi_{sq}^{(l)}(r, \varphi) r dr d\varphi = \begin{cases} \|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2, & (s, q, l) = (n, m, j), \\ 0, & (s, q, l) \neq (n, m, j). \end{cases}$$

При цьому квадрати їхніх норм задаються такими

співвідношеннями:

$$\|\Psi_{nm}^{(1)}\|^2 = \begin{cases} \pi a^2 J_0^2(k_{0m}a), & n=0, \\ \frac{\pi a^2}{2} J_n^2(k_{nm}a) \left[ 1 - \frac{n^2}{k_{nm}^2 a^2} \right], & n \geq 1, \end{cases} \quad (22)$$

$$\|\Psi_{nm}^{(2)}\|^2 = \begin{cases} 0, & n=0, \\ \|\Psi_{nm}^{(1)}\|^2, & n \geq 1. \end{cases}$$

Підстановка виразів (21) і (22) у співвідношення (20) дає функцію Гріна тривимірного конвективного рівняння Гельмгольца (1) для розглянутого у даному підрозділі каналу. Вона збігається з відповідною функцією Гріна, одержаною в роботі [19].

**3.1.2. Канал кругового поперечного перерізу з акустично м'якими стінками**

Якщо стінки зображеного на рис. 2 каналу акустично м'які, то його акустичні моди  $\Psi_{nm}$ , квадрати їхніх норм  $\|\Psi_{nm}\|^2$  і модальні хвильові числа  $k_{nm}$  відрізнятимуться від наведених у попередньому підрозділі лише значеннями параметрів  $\zeta_{nm}$  – вони тепер будуть коренями рівняння

$$J_n(\zeta_{nm}) = 0,$$

яке впливає з граничної умови (6) для мод  $\Psi_{nm}$ :

$$\Psi_{nm}|_{r=a} = 0.$$

Кількість мод  $\Psi_{nm}$  і чисел  $k_{nm}$  буде такою ж, як і для каналу з жорсткими стінками. Отже і функція Гріна рівняння (1) відрізнятиметься від попередньої лише значеннями  $\zeta_{nm}$ .

**3.2. Канал прямокутного поперечного перерізу**

Якщо канал має прямокутний поперечний переріз висоти й ширини  $l_x$  і  $l_y$  (рис. 3), то система координат  $(x_1, x_2, x_3)$  стає прямокутною декартовою. Окрім цього, вона має співпадати з координатною системою  $(x, y, z)$ , причому її осі слід направити так, як показано на рис. 3. Тоді зв'язок між координатами  $x, y, z$  і  $x_1, x_2, x_3$  для довільної точки каналу буде тривіальним:

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3,$$

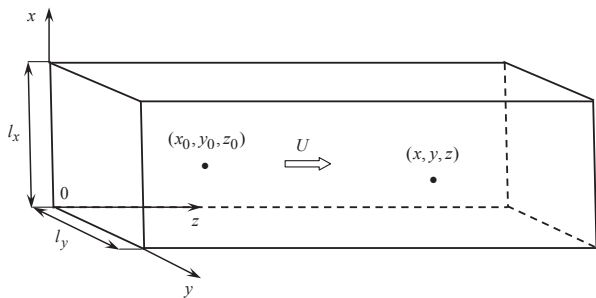


Рис. 3. Нескінченний прямий канал прямокутного поперечного перерізу

а всі коефіцієнти Ляме (3) дорівнюватимуть одиниці:

$$h_1 = h_2 = h_3 = 1.$$

У цьому випадку рівняння (4) для функції Гріна  $\tilde{G}$  набуває вигляду

$$\begin{aligned} \nabla^2 \tilde{G} + k_0^2 \tilde{G} + i2k_0 M \frac{\partial \tilde{G}}{\partial z} - M^2 \frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial z^2} = \\ = -\frac{1}{2\pi} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0), \end{aligned}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$0 \leq x, \quad x_0 \leq l_x, \quad 0 \leq y, \quad y_0 \leq l_y,$$

$$|z| < \infty, \quad |z_0| < \infty,$$

а сама функція  $\tilde{G}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{G} = \frac{i\lambda}{4\pi} e^{-i\lambda^2 M k_0 (z - z_0)} \times \\ \times \sum_n \sum_m \frac{\Psi_{nm}(x_0, y_0)}{\|\Psi_{nm}\|^2} \Psi_{nm}(x, y) \times \\ \times \frac{e^{i\lambda \sqrt{\lambda^2 k_0^2 - k_{nm}^2} |z - z_0|}}{\sqrt{\lambda^2 k_0^2 - k_{nm}^2}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Тут  $x_0 = x_{10}$ ,  $y_0 = x_{20}$ ,  $z_0 = x_{30}$  – координати точкового акустичного джерела.

Щоб мати можливість використовувати функцію Гріна (23) для визначення шуканих характеристик акустичних полів у зображеному на рис. 3 каналі, до цього співвідношення необхідно додати вирази для акустичних мод каналу  $\Psi_{nm}$ , квадратів їхніх норм  $\|\Psi_{nm}\|^2$  і модальних хвильових чисел  $k_{nm}$ , а також вказати межі сум у правій частині виразу (23). Усе це можна одержати з рівняння (12) після відповідного вибору типу стінок каналу.

### 3.2.1. Канал прямокутного поперечного перерізу з акустично жорсткими стінками

Нехай зображений на рис. 3 канал має акустично жорсткі стінки. Тоді його акустичні моди  $\Psi_{nm}$  й відповідні модальні хвильові числа  $k_{nm}$  задовольняють записане в координатах  $x, y$  рівняння (12):

$$\nabla_{(x,y)}^2 \Psi_{nm}(x, y) = -k_{nm}^2 \Psi_{nm}(x, y), \quad (24)$$

$$\nabla_{(x,y)}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

граничну умову (5):

$$\left. \frac{\partial \Psi_{nm}}{\partial x} \right|_{x=0, l_x} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Psi_{nm}}{\partial y} \right|_{y=0, l_y} = 0,$$

і мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \Psi_{nm}(x, y) = \cos(k_{xn}x) \cos(k_{ym}y), \\ k_{nm} = \sqrt{k_{xn}^2 + k_{ym}^2}, \quad k_{xn} = \frac{n\pi}{l_x}, \\ k_{ym} = \frac{m\pi}{l_y}, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (25)$$

Тут  $k_{xn}$  і  $k_{ym}$  – модальні хвильові числа у напрямках  $x$  та  $y$  відповідно.

Квадрати норм функцій  $\Psi_{nm}$  даються співвідношеннями

$$\begin{aligned} \|\Psi_{nm}\|^2 = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \Psi_{nm}^2(x, y) dx dy = \\ = \begin{cases} l_x l_y, & n = 0, \quad m = 0; \\ \frac{l_x l_y}{2}, & n = 0, \quad m \geq 1; \\ \frac{l_x l_y}{2}, & n \geq 1, \quad m = 0; \\ \frac{l_x l_y}{4}, & n \geq 1, \quad m \geq 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (26)$$

Підстановка формул (25) і (26) у співвідношення (23) дає вираз для функції Гріна  $\tilde{G}$  тривимірного конвективного рівняння Гельмгольца (1) для вибраного каналу, який збігається з виразом для відповідної функції Гріна, одержаним у роботах [20, 21].



**3.2.2. Канал прямокутного поперечного перерізу з акустично м'якими стінками**

Розглянемо випадок, коли стінки прямокутного каналу – акустично м'які. Його акустичні моди  $\Psi_{nm}$  і модальні хвильові числа  $k_{nm}$  задовольняють рівняння (24) і граничну умову (6):

$$\Psi_{nm}|_{x=0,l_x} = 0, \quad \Psi_{nm}|_{y=0,l_y} = 0,$$

і даються наступними виразами:

$$\begin{aligned} \Psi_{nm}(x, y) &= \sin(k_{xn}x) \sin(k_{ym}y), \\ k_{nm} &= \sqrt{k_{xn}^2 + k_{ym}^2}, \quad k_{xn} = \frac{n\pi}{l_x}, \\ k_{ym} &= \frac{m\pi}{l_y}, \quad n, m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (27)$$

Підстановка виразу (27) разом з квадратами норм мод

$$\|\Psi_{nm}\|^2 = \frac{l_x l_y}{4}$$

у співвідношення (23) дозволяє одержати функцію Гріна  $\tilde{G}$  рівняння (1) для розглянутого каналу. Він збігається з виразом для відповідної функції Гріна, одержаним у [23].

**3.2.3. Канал прямокутного поперечного перерізу зі стінками змішаного типу**

*Одна стінка каналу акустично жорстка, а три – акустично м'які*

Нехай стінка при  $x=0$  зображеного на рис. 3 каналу – акустично жорстка, а три інші – акустично м'які. У такій ситуації гранична умова (7) для його мод  $\Psi_{nm}$  переписеться наступним чином:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_{nm}}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0, \\ \Psi_{nm}|_{x=l_x} &= 0, \quad \Psi_{nm}|_{y=0,l_y} = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Рівняння ж для функцій  $\Psi_{nm}$  і відповідних модальних хвильових чисел  $k_{nm}$ , як і раніше, матиме вигляд (24). Його розв'язком, який задовольняє умови (28), будуть такі функції  $\Psi_{nm}$  і числа  $k_{nm}$ :

$$\begin{aligned} \Psi_{nm}(x, y) &= \cos(k_{xn}x) \sin(k_{ym}y), \\ k_{nm} &= \sqrt{k_{xn}^2 + k_{ym}^2}, \quad k_{xn} = \frac{(2n+1)\pi}{2l_x}, \\ k_{ym} &= \frac{m\pi}{l_y}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (29)$$

а квадрати норм функцій  $\Psi_{nm}$  даватимуться співвідношенням

$$\|\Psi_{nm}\|^2 = \frac{l_x l_y}{4}. \quad (30)$$

Підстановка виразів (29) і (30) у співвідношення (23) дає функцію Гріна  $\tilde{G}$  рівняння Гельмгольца (1) для розглянутого тут каналу. Вона співпадає з відповідною функцією Гріна, одержаною в роботі [23].

*Дві стінки каналу акустично жорсткі, а дві – акустично м'які*

Розглянемо ситуацію, коли стінки зображеного на рис. 3 каналу при  $x=0$  та  $x=l_x$  – жорсткі, а стінки при  $y=0$  та  $y=l_y$  – акустично м'які. У цьому випадку гранична умова (7) для акустичних мод  $\Psi_{nm}$  каналу має вигляд

$$\frac{\partial \Psi_{nm}}{\partial x} \Big|_{x=0,l_x} = 0, \quad \Psi_{nm} \Big|_{y=0,l_y} = 0. \quad (31)$$

На додаток моди  $\Psi_{nm}$  й відповідні хвильові числа  $k_{nm}$  мають задовольняти рівняння (24).

Розв'язком задачі (24), (31) будуть такі функції  $\Psi_{nm}$  і числа  $k_{nm}$ :

$$\begin{aligned} \Psi_{nm}(x, y) &= \cos(k_{xn}x) \sin(k_{ym}y), \\ k_{nm} &= \sqrt{k_{xn}^2 + k_{ym}^2}, \quad k_{xn} = \frac{n\pi}{l_x}, \quad k_{ym} = \frac{m\pi}{l_y}, \\ n &= 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (32)$$

а квадрати норм функцій  $\Psi_{nm}$  даються виразами

$$\|\Psi_{nm}\|^2 = \begin{cases} \frac{l_x l_y}{2}, & n = 0, \quad m \geq 1, \\ \frac{l_x l_y}{4}, & n \geq 1, \quad m \geq 1. \end{cases} \quad (33)$$

Вираз для функції Гріна  $\tilde{G}$  рівняння (1) для даного каналу одержується після підстановки в нього виразів (32) і (33) у співвідношення (23). Він збігається з виразом для відповідної функції Гріна, одержаним у [23].

*Три стінки каналу акустично жорсткі, а одна – акустично м'яка*

Наостанок розглянемо прямокутний канал з однією акустично м'якою і трьома акустично жорсткими стінками. Вважатимемо, що акустично м'якою буде стінка при  $y=0$ . Тоді акустичні моди

$\Psi_{nm}$  і хвильові числа  $k_{nm}$ , як і раніше, мають задовольняти рівняння (24), а гранична умова (7) для функцій  $\Psi_{nm}$  матиме вигляд:

$$\left. \frac{\partial \Psi_{nm}}{\partial x} \right|_{x=0, l_x} = 0, \quad \Psi_{nm} \Big|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Psi_{nm}}{\partial y} \right|_{y=l_y} = 0.$$

Це справедливо для таких функцій  $\Psi_{nm}$  і чисел  $k_{nm}$ :

$$\Psi_{nm}(x, y) = \cos(k_{xn}x) \cos(k_{ym}y),$$

$$k_{nm} = \sqrt{k_{xn}^2 + k_{ym}^2}, \quad k_{xn} = \frac{n\pi}{l_x}, \quad (34)$$

$$k_{ym} = \frac{(2m+1)\pi}{2l_y}, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots$$

Квадрати норм функцій  $\Psi_{nm}$  даються виразами

$$\|\Psi_{nm}\|^2 = \begin{cases} \frac{l_x l_y}{2}, & n = 0, \quad m = 0, \\ \frac{l_x l_y}{2}, & n = 0, \quad m \geq 1, \\ \frac{l_x l_y}{4}, & n \geq 1, \quad m = 0, \\ \frac{l_x l_y}{4}, & n \geq 1, \quad m \geq 1. \end{cases} \quad (35)$$

Підстановка співвідношень (34) і (35) у ряд (23) дозволяє одержати вираз для функції Гріна  $\tilde{G}$  рівняння (1) розглянутого тут каналу. Він збігається з виразом для функції Гріна, одержаним у роботі [23].

## ВИСНОВКИ

1. За допомогою розробленого в даній роботі методу побудовано функцію Гріна  $\tilde{G}$  тривимірного конвективного рівняння Гельмгольца для нескінченного прямого каналу довільної, але незмінної по його довжині форми з акустично жорсткими і акустично м'якими стінками, а також зі стінками змішаного типу. Одержана функція представляється рядом за акустичними модами каналу.
2. У побудованій функції Гріна в явному вигляді відображено вплив рівномірної осередненої течії в каналі. Ці ефекти стають вагомими зі збільшенням числа Маха течії, зумовлюючи, зокрема, появу й подальше наростання асиметрії функції  $\tilde{G}$  відносно поперечного
3. На основі зазначеного методу одержано також функції Гріна тривимірного конвективного рівняння Гельмгольца для нескінчених прямих каналів кругової та прямокутної форм поперечного перерізу із вказаними вище типами стінок.
4. При можливості аналітичного або чисельного знаходження акустичних мод каналу, а також за умови збереження лінійності задачі метод може бути розширений на випадок прямих каналів, що мають поперечний переріз довільної форми і стінки довільного типу.
5. Запропонований підхід створює основи для подальшої розробки аналітичних методів для кількісного знаходження характеристик акустичних полів, які генеруються в каналах з нерегулярною геометрією та внутрішньою течією.

1. Борисюк А. О. Генерація звуку обмеженою областю збуреної течії в жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу. Частина 1. Загальна теорія // Акуст. вісн.– 2003.– 6, № 3.– С. 3–9.
2. Борисюк А. О. Генерація звуку обмеженою областю збуреної течії в жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу. Частина 2. Частинні випадки // Акуст. вісн.– 2004.– 7, № 4.– С. 10–20.
3. Berger S. A., Jou L.-D. Flows in stenotic vessels // Ann. Rev. Fluid Mech.– 2000.– 32.– P. 347–382.
4. Вовк И. В., Гринченко В. Т., Малюга В. С. Особенности движения среды в каналах со стенозами // Прикл. гидромех.– 2009.– 11, № 4.– С. 17–30.
5. Young D. F. Fluid mechanics of arterial stenosis // J. Biomech. Eng.– 1979.– 101.– P. 157–175.
6. Davies H. G., Ffowcs Williams J. E. Aerodynamic sound generation in a pipe // J. Fluid Mech.– 1968.– 32, № 4.– P. 765–778.
7. Doak P. E. Excitation, transmission and radiation of sound from source distributions in hard-walled ducts of finite length. (1): The effects of duct cross-section geometry and source distribution space-time pattern // J. Sound Vib.– 1973.– 31, № 1.– P. 1–72.
8. Blake W. K. Mechanics of flow-induced sound and vibration: in 2 vols.– New York: Acad. Press, 1986.– 974 p.
9. Morse P. M., Feshbach H. Methods of theoretical physics: vol. 1.– New York: McGraw-Hill, 1953.– 997 p.
10. Morse P. M., Ingard K. U. Theoretical acoustics.– New York: McGraw-Hill, 1968.– 927 p.
11. Junger M. C., Feit D. Sound, structures and their interaction.– Cambridge, MA: MIT Press, 1972.– 477 p.

12. Howe M. S. Acoustics of fluid-structure interactions.– Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998.– 560 p.
13. Howe M. S. Hydrodynamics and sound.– Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007.– 463 p.
14. Howe M. S. Theory of vortex sound.– Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003.– 216 p.
15. Crighton D. G., Dowling A. P., Ffowcs Williams J. E., Heckl M., Leppington F. G. Modern methods in analytical acoustics. Lecture Notes.– London: Springer-Verlag, 1992.– 738 p.
16. Исакович М. А. Общая акустика.– М.: Наука, 1973.– 495 с.
17. Грінченко В. Т., Вовк І. В., Мадипура В. Т. Основи акустики.– К.: Наукова думка, 2007.– 640 с.
18. Голдштейн М. Е. Аэроакустика.– М.: Машиностроение, 1981.– 294 с.
19. Борисюк А. О. Функції Гріна хвильового рівняння й рівняння Гельмгольца для нескінченного прямого жорсткостінного каналу кругового поперечного перерізу з осередненою течією // Акуст. вісн.– 2011.– 14, № 4.– С. 9–17.
20. Borisyuk A. O. Green's function of the convective wave equation for a rigid rectangular pipe // Sci.-Bas. Technol.– 2014.– 3(23)– Р. 374–378.
21. Борисюк А. О. Функція Гріна конвективного хвильового рівняння для нескінченної прямої жорсткостінної труби прямокутного поперечного перерізу // Доп. НАН Укр.– 2015.– № 3.– С. 40–44.
22. Борисюк А. О. Функція Гріна тривимірного конвективного хвильового рівняння для прямого каналу // Акуст. вісн.– 2015.– 17, № 1.– С. 3–16.
23. Borisyuk A. O. Green's function of the convective Helmholtz equation for a rectangular pipe // Sci.-Bas. Technol. [заплановано до друку в 2016].
24. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.– М.: Наука, 1987.– 840 с.
25. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: том 2.– М.: Физматгиз, 1962.– 807 с.
- $t$  – час;  
 $t_0$  – пов'язаний з акустичним джерелом час;  
 $X_3, X_{30}$  – безрозмірні осьові координати;  
 $\delta(\cdot)$  – дельта-функція Дірака;  
 $p_a$  – акустичний тиск;  
 $\check{p}_a$  – частотний образ Фур'є акустичного тиску;  
 $\gamma$  – функція, яка описує сумарний розподіл акустичних джерел у каналі;  
 $\check{\gamma}$  – частотний образ Фур'є функції  $\gamma$ ;  
 $\Psi_{nm}$  – акустичні моди каналу довільного та прямокутного поперечного перерізів;  
 $\Psi_{nm}^{(j)}$  – акустичні моди каналу кругового поперечного перерізу;  
 $k_{nm}$  – модальні хвильові числа у поперечному перерізі каналу;  
 $k_{fnm}$  – модальні осьові хвильові числа;  
 $K_{fnm}$  – безрозмірні модальні осьові хвильові числа;  
 $\omega$  – циклічна частота;  
 $\Omega$  – безрозмірна циклічна частота;  
 $k_{xn}, k_{yn}$  – модальні хвильові числа у напрямках  $x$  і  $y$  відповідно;  
 $\tilde{G}$  – функція Гріна;  
 $h_i$  – коефіцієнти Ляме ( $i = 1, 2, 3$ ).

## ДОДАТОК Б. ТРИВИМІРНЕ КОНВЕКТИВНЕ РІВНЯННЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Акустичне поле, згенероване довільним чином розташованими акустичними джерелами в зображеному на рис. 1 каналі при наявності в ньому рівномірної осередненої по поперечному перерізу течії рідини зі швидкістю  $U = \text{const}$  в напрямку твірної його стінки, описується тривимірним конвективним хвильовим рівнянням [22]:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{d^2 p_a}{dt^2} - \nabla^2 p_a = \gamma. \quad (36)$$

Якщо існує лише одиничне точкове імпульсне джерело, яке знаходиться в точці з радіус-вектором  $\vec{r}_0$  і діє в момент часу  $t_0$ , то замість співвідношення (36) маємо:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{d^2 p_a}{dt^2} - \nabla^2 p_a = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \delta(t - t_0). \quad (37)$$

У рівняннях (36) і (37)  $c_0$  – швидкість звуку в незбуреній рідині;  $p_a$  – акустичний тиск;  $t$  – час;  $\gamma$  – функція, яка задає сумарний розподіл джерел;

## ДОДАТОК А. УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

- $l$  – характерний геометричний розмір поперечного перерізу каналу;  
 $a$  – радіус кругового поперечного перерізу каналу;  
 $l_x, l_y$  – розміри прямокутного поперечного перерізу каналу;  
 $U$  – осереднена осьова швидкість рівномірної течії в каналі;  
 $c_0$  – швидкість звуку в незбуреній рідині;  
 $M$  – число Маха течії в каналі;  
 $\lambda$  – безрозмірний параметр, який залежить від числа  $M$ ;  
 $x_1, x_2, x_3$  – довільні ортогональні (у загальному випадку, криволінійні) координати;  
 $x, y, z$  – прямокутні декартові координати;  
 $r, \varphi, z$  – циліндричні координати;  
 $\vec{r}$  – радіус-вектор точки поля;  
 $\vec{r}_0$  – радіус-вектор акустичного джерела;

$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$  і  $\delta(t-t_0)$  – тривимірні просторова і одновимірні часові дельта-функції Дірака відповідно;  $\vec{r}$  – радіус-вектор точки поля.

Повна друга похідна за часом  $d^2/dt^2$ , оператор Лапласа  $\nabla^2$  і функція  $\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$  у вибраній ортогональній криволінійній системі координат  $(x_1, x_2, x_3)$  записуються наступним чином [22]:

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_3} + U^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 = & \frac{1}{h_1 h_2} \times \\ & \times \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \right. \\ & \left. + h_1 h_2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right] = \nabla_{(x_1, x_2)}^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = & \frac{1}{h_1 h_2} \times \\ & \times \delta(x_1 - x_{10}) \delta(x_2 - x_{20}) \delta(x_3 - x_{30}), \end{aligned}$$

$$\vec{r} = x_i \vec{e}_i, \quad \vec{r}_0 = x_{i0} \vec{e}_i.$$

Тут  $h_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) – коефіцієнти Ляме [9, 22, 24, 25]:

$$h_i = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial x_i} \right)^2},$$

$$h_1 = h_1(x_1, x_2), \quad h_2 = h_2(x_1, x_2), \quad h_3 = 1;$$

$\nabla_{(x_1, x_2)}^2$  – оператор Лапласа у координатах  $x_1, x_2$ :

$$\begin{aligned} \nabla_{(x_1, x_2)}^2 = & \frac{1}{h_1 h_2} \times \\ & \times \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right]; \end{aligned} \quad (39)$$

$\vec{e}_i$  – орти координатних осей  $x_i$ ;  $x, y, z$  – прямокутні декартові координати, вибрані так, що їхній

початок знаходиться у тому ж поперечному перерізі каналу, що й початок системи  $(x_1, x_2, x_3)$ , а вісь  $z$  співнаправлена з віссю  $x_3$ , направленою вздовж течії (див. рис. 1). Тут передбачається підсумовування по індексах, що повторюються.

Довільна частотна компонента поля описується рівнянням

$$\nabla^2 \check{p}_a + k_0^2 \check{p}_a + i2k_0 M \frac{\partial \check{p}_a}{\partial x_3} - M^2 \frac{\partial^2 \check{p}_a}{\partial x_3^2} = \check{\gamma}, \quad (40)$$

одержаним з рівняння (36) після застосування часового перетворення Фур'є

$$\begin{aligned} \check{f}(\vec{r}, \omega) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt, \\ f(\vec{r}, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Тут  $M=U/c_0$  – число Маха течії в каналі;  $\omega$  – колова частота. Рівняння (40) – тривимірне конвективне рівняння Гельмгольца (наявність у його назві терміну “конвективне” пояснюється тим, що воно містить залежні від числа Маха доданки [19]).

У разі наявності в каналі лише точкового джерела, замість співвідношення (40) маємо рівняння

$$\begin{aligned} \nabla^2 \tilde{p}_a + k_0^2 \tilde{p}_a + i2k_0 M \frac{\partial \tilde{p}_a}{\partial x_3} - M^2 \frac{\partial^2 \tilde{p}_a}{\partial x_3^2} = \\ = -\frac{1}{2\pi} \delta(\vec{r}-\vec{r}_0), \end{aligned} \quad (41)$$

яке є наслідком застосування до рівняння (37) іншого часового перетворення Фур'є:

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\vec{r}, \vec{r}_0; \omega) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) e^{i\omega(t-t_0)} d(t-t_0), \\ g(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) = & \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(\vec{r}, \vec{r}_0; \omega) e^{-i\omega(t-t_0)} d\omega. \end{aligned}$$