

УДК 532.595

# СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ С ПОДВЕСНЫМ РЕЗЕРВУАРОМ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННЫМ ЖИДКОСТЬЮ

Ю. В. ТРОЦЕНКО

Институт математики НАН Украины  
ул. Терещенковская, 3, 01601, Киев-4, Украина  
E-mail: imath@ukr.net

Получено 05.06.2012

На основе положений линейной теории движения твердых тел с полостями, частично заполненными идеальной жидкостью, и линейной теории тонкостенных стержней построена общая математическая модель динамики упругого стержня с присоединенным резервуаром, содержащим жидкость. Сформулированная спектральная задача о собственных колебаниях данной механической системы решена методом декомпозиции. С помощью метода Ритца исходная задача сведена к анализу обобщенной алгебраической проблемы на собственные значения. Приведенные результаты расчетов частот и форм колебаний продемонстрировали эффективность предложенного подхода.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** тонкостенный стержень, резервуар с жидкостью, парциальная система, свободные колебания, метод Ритца

На базі положень лінійної теорії руху твердих тіл з порожнинами, частково заповненими ідеальною рідиною, й лінійної теорії тонкостінних стержнів побудовано загальну математичну модель динаміки пружного стержня з приєднаним резервуаром, який містить рідину. Сформульовану спектральну задачу про власні коливання даної механічної системи розв'язано методом декомпозиції. За допомогою методу Рітца вихідну задачу зведено до аналізу узагальненої алгебраїчної проблеми на власні значення. Наведені результати розрахунків частот і форм коливань продемонстрували ефективність запропонованого підходу.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** тонкостінний стержень, резервуар з рідиною, парціальна система, вільні коливання, метод Рітца

A general mathematical model of the dynamics of an elastic rod with an attached reservoir containing the liquid is developed on the basis of the provisions of the linear theory of motion of solids with cavities partially filled with an ideal fluid and the linear theory of thin-walled rods. Formulated spectral problem for free oscillations of the mechanical system is solved by the method of decomposition. With the help of the Ritz method, the original problem is reduced to the analysis of generalized algebraic eigenvalue problem. The presented calculations results for the frequencies and mode shapes have demonstrated the effectiveness of the proposed approach.

**KEY WORDS:** a thin-walled rod, reservoir with a liquid, the partial system, free oscillation, the Ritz method

## ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим осесимметричную конструкцию, состоящую из вертикально расположенной тонкостенной оболочки вращения, к одной из параллелей которой с помощью жесткого шпангоута прикреплен осесимметричный резервуар, частично заполненный идеальной и несжимаемой жидкостью (рис. 1). Исследованию колебаний таких объектов посвящены работы [1, 2].

Стенки резервуара считаем абсолютно жесткими. К типичным конструкциям этого рода относятся корпус жидкостной ракеты или фюзеляж самолета, а также некоторые промышленные резервуары [1]. Динамику подобных систем будем рассматривать в рамках линейной теории упругости и гидродинамики, что позволяет независимо рассматривать их поперечные, продольные и крутильные колебания.

При определенных соотношениях геометриче-

ских параметров тонкостенную оболочку в некотором смысле можно отождествить с эквивалентным

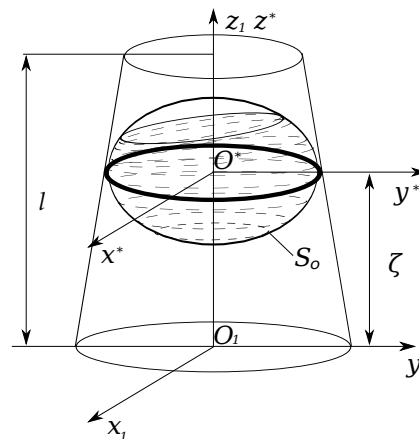


Рис. 1. Общий вид механической системы

упругим стержнем [1]. Для цилиндрической оболочки возможность подобной замены обсуждалась в работах [3–5]. Продемонстрированная в них эффективность указанного подхода стимулировала продолжение исследований в этом направлении. В частности, полученные результаты отражены в данной публикации.

Ниже в качестве расчетной модели будет использован упругий стержень с подвешенным в некотором его сечении жестким резервуаром с жидкостью. Поперечные колебания такой конструкции рассматриваются на основе уравнений изгиба стержней без учета поперечных сдвигов и инерции поворота сечений.

## 1. ОСНОВНЫЕ ДОПУЩЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для определенности будем считать, что нижний край стержня закреплен, а верхний – свободен. Движение резервуара и жидкости в нем будем рассматривать в поле сил тяжести с вектором ускорения  $\vec{g}$  ( $g = |\vec{g}|$ ). Введем неподвижную прямоугольную систему координат  $O^*x^*y^*z^*$ , ось  $O^*z^*$  которой совпадает с осью симметрии конструкции, и направлена противоположно вектору  $\vec{g}$ . Начало системы координат  $O^*$  поместим в плоскости крепления резервуара к стержню. Связанную с резервуаром систему координат  $Oxyz$  расположим так, чтобы в начальный момент времени  $t$  она совпадала с системой координат  $O^*x^*y^*z^*$ . Для описания колебаний стержня введем в рассмотрение еще одну систему координат  $O_1x_1y_1z_1$  с началом, связанным с его закрепленным краем. Ось  $O_1z_1$  совместим с осью симметрии системы, а оси  $O_1x_1$  и  $O_1y_1$  расположим параллельно осям  $O^*x^*$  и  $O^*y^*$  соответственно.

Предположим, что к резервуару приложена внешняя суммарная сила  $P_{O^*y^*}$ , действующая в направлении оси  $O^*y^*$  и суммарный момент  $M_{Ox}$  системы внешних сил относительно оси  $Ox$ . Будем также считать, что на стержень действует распределенная поперечная нагрузка  $q(z_1, t)$  в направлении оси  $O_1y_1$  и он подвержен действию сжимающей силы, обусловленной весом резервуара с жидкостью и своим собственным весом.

Составим уравнения связанных колебаний стержня и резервуара с жидкостью, прикрепленного к нему в сечении  $z_1 = \zeta$ . Обозначим через  $w(z_1, t)$  прогиб нейтральной линии стержня в направлении оси  $O_1y_1$  под воздействием приложенных к нему внешних сил, а через  $l$  – длину стержня. При выводе уравнений движения стержня в плоскости  $O_1y_1z_1$  применим принцип возможных перемеще-

ний, который в сочетании с принципом Даламбера можно использовать и в динамических задачах.

В общем случае будем рассматривать стержень с меняющимися по длине площадью поперечного сечения  $S$ , экваториальным моментом инерции  $J$ , модулем упругости при изгибе  $E$  и плотностью материала  $\rho_1$ .

Разобьем область  $G = [0, l]$  изменения координаты  $z_1$  на две подобласти:  $G^{(1)} = [0, \zeta]$  и  $G^{(2)} = [\zeta, l]$ , обозначив прогибы стержня в них через  $w^{(1)}(z_1, t)$  и  $w^{(2)}(z_1, t)$  соответственно. Везде в дальнейшем верхний индекс будет обозначать область, в которой определена рассматриваемая функция.

Для обеспечения гладкого сопряжения перемещений стержня в смежной точке  $z = \zeta$  подобластей  $G^{(1)}$  и  $G^{(2)}$  должны выполняться кинематические граничные условия

$$\begin{aligned} w^{(1)} &= w^{(2)} = w & \text{при } z_1 = \zeta, \\ \frac{dw^{(1)}}{dz_1} &= \frac{dw^{(2)}}{dz_1} = \frac{dw}{dz_1} & \text{при } z_1 = \zeta. \end{aligned} \quad (1)$$

Введем следующие обозначения для перерезывающих сил и изгибающих моментов стержня в сечении  $z_1$ :

$$\begin{aligned} Q^{(i)} &= \frac{\partial}{\partial z_1} \left( E^{(i)} J^{(i)} \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial z_1^2} \right), \\ M^{(i)} &= E^{(i)} J^{(i)} \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial z_1^2} \end{aligned} \quad (2)$$

( $i = 1, 2$ ).

В силу принятых условий закрепления, на краях стержня справедливы граничные условия

$$w^{(1)}|_{z_1=0} = 0, \quad \left. \frac{dw^{(1)}}{dz_1} \right|_{z_1=0} = 0, \quad (3)$$

$$Q^{(2)}|_{z_1=l} = 0, \quad M^{(2)}|_{z_1=l} = 0. \quad (4)$$

Если исходная форма стержня – равновесная, то согласно принципу возможных перемещений должно выполняться равенство

$$\delta W = \delta A, \quad (5)$$

где

$$\delta W = \sum_{i=1}^2 \int_{G^{(i)}} E^{(i)} J^{(i)} \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial z_1^2} \frac{\partial^2 \delta w^{(i)}}{\partial z_1^2} dz_1 -$$

вариация потенциальной энергии деформации изгиба стержня;  $\delta A$  – работа всех внешних сил,

приложенных к стержню и резервуару на их возможных перемещениях.

Следуя статье [6], выпишем проекции главного вектора сил и моментов, действующих со стороны жидкости на резервуар при его возмущенном движении, на оси  $O^*y^*$  и  $Ox$  соответственно. Если стержень поперечно колеблется в плоскости  $O_1y_1z_1$ , то резервуар будет совершать поступательные перемещения  $u$  в направлении оси  $O_1y_1$  и угловые повороты  $\vartheta$  относительно оси  $Ox$ :

$$u = w(\zeta, t), \quad \vartheta = -\left. \frac{\partial w}{\partial z_1} \right|_{z_1=\zeta}. \quad (6)$$

Тогда потенциал смещений жидкости в связанной с резервуаром системе координат  $Oxyz$  можно представить в следующем виде [6]:

$$\begin{aligned} \chi(x, y, z, t) = & yw(\zeta, t) - \left. \frac{\partial w}{\partial z_1} \right|_{z_1=\zeta} \Psi(x, y, z) + \\ & + \sum_{n=1}^{n_0} \beta_n(t) \varphi_n(x, y, z). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь потенциал Стокса–Жуковского  $\Psi$  определяется из решения неоднородной краевой задачи Неймана вида

$$\begin{aligned} \Delta \Psi(x, y, z) &= 0, \quad (x, y, z) \in Q, \\ \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} \right|_{\Sigma \cup S_0} &= y \cos(\nu, z) - z \cos(\nu, y), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $Q$  – фиксированная область, ограниченная смачиваемой поверхностью резервуара  $S_0$  и свободной поверхностью жидкости  $\Sigma$  в ее невозмущенном состоянии;  $\vec{\nu}$  – орт внешней нормали к поверхности  $S_0$  или  $\Sigma$ ;  $\Delta$  – оператор Лапласа.

В представлении (7) обобщенные координаты  $\beta_n(t)$  характеризуют волновые движения жидкости в резервуаре, а функции  $\varphi_n$  – собственные функции спектральной задачи с параметром  $\varkappa_n$  в граничном условии:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_n(x, y, z) &= 0, \quad (x, y, z) \in Q, \\ \left. \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} \right|_{S_0} &= 0, \quad \left( \left. \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} - \varkappa \varphi_n \right) \right|_{\Sigma} = 0, \\ \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} dS &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Краевая задача (9) описывает свободные колебания жидкости в неподвижном резервуаре. При этом квадрат частоты  $\sigma_n^2$   $n$ -ой формы собственных

колебаний жидкости связан с частотным параметром  $\varkappa_n$  соотношением

$$\sigma_n^2 = g \varkappa_n. \quad (10)$$

Гидродинамические составляющие  $P_{O^*y^*}$  и  $M_{Ox}$  главных векторов сил и моментов, действующих на резервуар со стороны жидкости при его возмущенном движении, можно определить на основе теорем об изменении количества движения и момента количества движения жидкости в области  $Q$ . После ряда преобразований получаем [6]:

$$\begin{aligned} P_{O^*y^*} &= -m_w \left( \ddot{w} + z_{c_w} \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z_1} \right)_{z_1=\zeta} - \\ & - \sum_{n=1}^{n_0} \ddot{\beta}_n \lambda_n, \\ M_{Ox} &= \left( m_w z_{c_w} \ddot{w} + I^{(w)} \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z_1} - \right. \\ & - g m_w z_{c_w} \left. \frac{\partial w}{\partial z_1} \right)_{z_1=\zeta} - \\ & - \sum_{n=1}^{n_0} (\ddot{\beta}_n \lambda_{0n} + g \beta_n \lambda_n), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $z_{c_w}$  и  $m_w$  – координата центра масс относительно точки  $O$  на оси  $Oz$  и масса “затвердевшей” жидкости.

Гидродинамические коэффициенты в формулах (11) имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \rho \int_{\Sigma} y \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} dS, \quad \lambda_{0n} = \rho \int_{\Sigma} \Psi \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} dS, \\ I^{(w)} &= \rho \int_{\Sigma \cup S_0} \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} dS. \end{aligned}$$

Здесь  $\rho$  – плотность жидкости.

Вычислим работу инерционных, массовых, внешних и гидродинамических сил, действующих на корпус резервуара на его возможных перемещениях, а также работу сил инерции, распределенной нагрузки  $q^{(i)}(z_1, t)$  и сжимающей силы  $N^{(i)}(z_1)$  ( $i=1, 2$ ) на возможных перемещениях стержня с учетом граничных условий (1). Тогда вариацион-

ное уравнение (5) запишется как

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \int_{G^{(i)}} \left[ E^{(i)} J^{(i)} \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial z_1^2} \frac{\partial^2 \delta w^{(i)}}{\partial z_1^2} - \right. \\ & \quad \left. - N^{(i)}(z_1) \frac{\partial w^{(i)}}{\partial z_1} \frac{\partial \delta w^{(i)}}{\partial z_1} + \right. \\ & \quad \left. + \rho_1^{(i)} S^{(i)} \ddot{w}^{(i)} \delta w^{(i)} - q^{(i)}(z_1, t) \delta w^{(i)} \right] dz_1 + \\ & + \left[ I \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z_1} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} + m z_c \left( \ddot{w} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} + \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z_1} \delta w \right) + \right. \\ & + m \ddot{w} \delta w + \sum_{n=1}^{n_0} \ddot{\beta}_n \left( \lambda_n \delta w - \lambda_{0n} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} \right) - \\ & - g m z_c \frac{\partial w}{\partial z_1} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} - g \sum_{n=1}^{n_0} \beta_n \lambda_n \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} - \\ & \left. - P_{O^*y^*} \delta w + M_{Ox} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} \right]_{z_1=\zeta} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь  $I = I^{(0)} + I^{(w)}$  – момент инерции корпуса резервуара и подвижной жидкости относительно оси  $Ox$ ;  $m = m^{(0)} + m_w$  – общая масса резервуара и жидкости;

$$z_c = \frac{m^{(0)} z_{c0} + m_w z_{cw}}{m^{(0)} + m_w} -$$

координата центра масс на оси  $Oz$  системы “резервуар – жидкость”.

С помощью интегрирования по частям преобразуем интегралы, входящие в уравнение (12) и содержащие производные от вариации прогиба стержня. При этом упомянутое вариационное уравнение примет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \int_{G^{(i)}} [L^{(i)}(w^{(i)}) - q^{(i)}(z_1, t)] \delta w^{(i)} dz_1 + \\ & + \left[ M^{(2)} \frac{\partial \delta w^{(2)}}{\partial z_1} - Q_*^{(2)} \delta w^{(2)} \right]_{z_1=l} + \\ & + \left[ (M^{(1)} - M^{(2)}) \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} + (Q_*^{(2)} - Q_*^{(1)}) \delta w + \right. \\ & + \left( m \ddot{w} + m z_c \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z_1} + \sum_{n=1}^{n_0} \ddot{\beta}_n \lambda_n - P_{O^*y^*} \right) \delta w + \\ & + \left( I \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z_1} + m z_c \ddot{w} - \sum_{n=1}^{n_0} \ddot{\beta}_n \lambda_{0n} - g m z_c \frac{\partial w}{\partial z_1} - \right. \\ & \left. - g \sum_{n=1}^{n_0} \beta_n \lambda_n + M_{Ox} \right) \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} \Big]_{z_1=\zeta} = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} L^{(i)}(w^{(i)}) &= \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \left( E^{(i)} J^{(i)} \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial z_1^2} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z_1} \left( N^{(i)} \frac{\partial w^{(i)}}{\partial z_1} \right) + \rho_1^{(i)} S^{(i)} \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

$$Q_*^{(i)} = Q^{(i)} + N^{(i)} \frac{\partial w^{(i)}}{\partial z_1}.$$

Учитывая произвольность вариаций  $\delta w^{(i)}$  в областях  $G^{(i)}$ , а также произвольность вариаций  $\delta w$  и  $\partial \delta w / \partial z_1$  при  $z_1 = l$  и  $z_1 = \zeta$ , получим следующую краевую задачу относительно прогиба стержня:

$$L^{(i)}(w^{(i)}) = q^{(i)}(z_1, t) \quad \text{при } z_1 \in G^{(i)},$$

$$M^{(2)}|_{z_1=l} = 0, \quad Q^{(2)}|_{z_1=l} = 0,$$

$$\begin{aligned} [Q_*^{(2)} - Q_*^{(1)}]_{z_1=\zeta} &= - \left[ m \ddot{w} + m z_c \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z_1} + \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{n_0} \ddot{\beta}_n \lambda_n - P_{O^*y^*} \right]_{z_1=\zeta}, \end{aligned}$$

$$[M^{(1)} - M^{(2)}]_{z_1=\zeta} =$$

$$= - \left[ I \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z_1} + m z_c \ddot{w} - \sum_{n=1}^{n_0} \ddot{\beta}_n \lambda_{0n} - \right. \quad (14)$$

$$\left. - g m z_c \frac{\partial w}{\partial z_1} - g \sum_{n=1}^{n_0} \beta_n \lambda_n + M_{Ox} \right]_{z_1=\zeta},$$

$$[w^{(1)} = w^{(2)} = w]_{z_1=\zeta},$$

$$\left[ \frac{\partial w^{(1)}}{\partial z_1} = \frac{\partial w^{(2)}}{\partial z_1} = \frac{\partial w}{\partial z_1} \right]_{z_1=\zeta},$$

$$w^{(1)}|_{z_1=0} = \frac{\partial w^{(1)}}{\partial z_1} \Big|_{z_1=0} = 0.$$

Соотношения (14) в областях  $G^{(i)}$  относительно функций  $w^{(i)}(z_1, t)$  представляют собой известные уравнения изгибных колебаний сжатого осевой силой  $N^{(i)}(z_1)$  стержня, к которому приложена распределенная нагрузка  $q^{(i)}(z_1, t)$ .

Система (14) незамкнута, поскольку она включает в себя неизвестные заранее обобщенные ко-

ординаты  $\beta_n(t)$ . Для потенциала смещений жидкости  $\chi(x, y, z, t)$  осталось невыполненным динамическое граничное условие на свободной поверхности жидкости. Подставив в него выражение (7), после применения к полученному уравнению процедуры Бубнова–Галеркина, получаем систему дифференциальных уравнений, связывающую обобщенные координаты  $\beta_n(t)$  с прогибом стержня и его углом поворота в сечении  $z_1 = \zeta$  [6]:

$$\mu_n(\ddot{\beta}_n + \sigma_n^2 \beta_n) + \left[ \lambda_n \ddot{w} - \lambda_{0n} \frac{\partial \dot{w}}{\partial z_1} - g \lambda_n \frac{\partial w}{\partial z_1} \right]_{z_1=\zeta} = 0 \quad (15)$$

$$(n = 1, 2, \dots, n_0),$$

где

$$\mu_n = \rho \int_{\Sigma} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} dS.$$

Совокупность уравнений (14) и (15) вместе с дополнительно заданными начальными условиями, заключающимися в распределении перемещений и скоростей жидкости на ее свободной поверхности и по длине стержня при  $t=0$ , полностью определяют взаимосвязанные колебания системы “стержень – резервуар – жидкость” под воздействием приложенных к ней внешних сил.

Введем следующие безразмерные величины (они обозначены черточкой сверху):

$$\varphi_n = R_0 \bar{\varphi}_n, \quad \Psi = R_0^2 \bar{\Psi}, \quad t^2 = \frac{R_0}{g} \bar{t}^2,$$

$$\lambda_n = \rho R_0^3 \bar{\lambda}_n, \quad \lambda_{0n} = \rho R_0^4 \bar{\lambda}_{0n},$$

$$\sigma_n^2 = \frac{g}{R_0} \bar{\sigma}_n^2, \quad \mu_n = \rho R_0^3 \bar{\mu}_n,$$

$$I = \rho R_0^5 \bar{I}, \quad w = R_0 \bar{w},$$

$$\beta_n = R_0 \bar{\beta}_n, \quad E^{(i)} J^{(i)} = E_0 J_0 \bar{E}^{(i)} \bar{J}^{(i)}, \quad (16)$$

$$\bar{D} = \frac{\rho R_0^5 g}{E_0 J_0}, \quad m = \rho R_0^3 \bar{m}, \quad N = \frac{E_0 J_0}{R_0^2} \bar{N},$$

$$q = \frac{E_0 J_0}{R_0^3} \bar{q}, \quad P_{O^*y^*} = \frac{E_0 J_0}{R_0^2} \bar{P}_{O^*y^*},$$

$$M_{Ox} = \frac{E_0 J_0}{R_0} \bar{M}_{Ox}.$$

Здесь  $E_0 J_0$  – изгибная жесткость стержня в его характерном сечении;  $R_0$  – характерный линейный размер рассматриваемой механической системы.

Тогда безразмерное вариационное уравнение (12) и система (15) примут вид (черточки над безразмерными величинами в дальнейшем опускаем):

$$\sum_{i=1}^2 \int_{G^{(i)}} \left[ E^{(i)} J^{(i)} \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial z_1^2} \frac{\partial^2 \delta w^{(i)}}{\partial z_1^2} - N^{(i)} \frac{\partial w^{(i)}}{\partial z_1} \frac{\partial \delta w^{(i)}}{\partial z_1} + \frac{\rho_1^{(i)}}{\rho} D S^{(i)} \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial t^2} \delta w^{(i)} - q^{(i)} \delta w^{(i)} \right] dz_1 + \left\{ D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial z_1 \partial t^2} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} + m z_c \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} + \frac{\partial^3 w}{\partial z_1 \partial t^2} \delta w \right) + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w + \sum_{n=1}^{n_0} \frac{\partial^2 \beta_n}{\partial t^2} \left( \lambda_n \delta w - \lambda_{0n} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} \right) - m z_c \frac{\partial w}{\partial z_1} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} - \sum_{n=1}^{n_0} \beta_n \lambda_n \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} \right] - P_{O^*y^*} \delta w + M_{Ox} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} \right\}_{z_1=\zeta} = 0, \quad (17)$$

$$\mu_n \left( \frac{\partial^2 \beta_n}{\partial t^2} + \sigma_n^2 \beta_n \right) + \left( \lambda_n \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \lambda_{0n} \frac{\partial^3 w}{\partial z_1 \partial t^2} - \lambda_n \frac{\partial w}{\partial z_1} \right)_{z_1=\zeta} = 0. \quad (18)$$

Коэффициенты этих уравнений определяются с помощью квадратур, если известно решение однородной спектральной задачи с параметром в граничном условии (9) и неоднородной краевой задачи Неймана (8) для потенциала Стокса–Жуковского  $\Psi$ .

## 2. ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ СИСТЕМЫ

Полученные уравнения позволяют осуществить математическую постановку задачи, которая описывает свободные колебания рассматриваемой механической системы с частотой  $\omega$ . Для этого поло-

жим ( $i = \sqrt{-1}$ ):

$$\begin{aligned} q^{(k)}(z_1, t) &= P_{O^*y^*} = M_{Ox} = 0, \\ w^{(k)}(z_1, t) &= \exp^{i\omega t} \eta^{(k)}(z_1), \\ \beta_n(t) &= \exp^{i\omega t} c_n. \end{aligned} \quad (19)$$

После перехода к безразмерным величинам получим следующую краевую задачу относительно функций  $\eta^{(i)}(z_1)$ :

$$\begin{aligned} L_1^{(i)}(\eta^{(i)}) &= \frac{d^2}{dz_1^2} \left( E^{(i)} J^{(i)} \frac{d^2 \eta^{(i)}}{dz_1^2} \right) + \\ &+ \frac{d}{dz_1} \left( N^{(i)} \frac{d\eta^{(i)}}{dz_1} \right) - \omega^2 \frac{\rho_1^{(i)}}{\rho} DS^{(i)} \eta^{(i)} = 0, \\ z_1 \in G^{(i)}, \quad M^{(2)}|_{z_1=l} &= Q_*^{(2)}|_{z_1=l} = 0, \\ [Q_*^{(2)} - Q_*^{(1)}]_{z_1=\zeta} &= \\ &= \omega^2 D \left[ m\eta + mz_c \frac{d\eta}{dz_1} + \sum_{n=1}^{n_0} c_n \lambda_n \right]_{z_1=\zeta}, \\ [M^{(1)} - M^{(2)}]_{z_1=\zeta} &= \\ &= \omega^2 D \left[ I \frac{d\eta}{dz_1} + mz_c \eta - \sum_{n=1}^{n_0} c_n \lambda_{0n} \right]_{z_1=\zeta} + \\ &+ Dmz_c \frac{d\eta}{dz_1} \Big|_{z_1=\zeta} + D \sum_{n=1}^{n_0} c_n \lambda_n, \\ [\eta^{(1)} = \eta^{(2)} = \eta]_{z_1=\zeta}, \\ \left[ \frac{d\eta^{(1)}}{dz_1} = \frac{d\eta^{(2)}}{dz_1} = \frac{d\eta}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta}, \\ \eta^{(1)}|_{z_1=0} = \frac{d\eta^{(1)}}{dz_1} \Big|_{z_1=0} &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

После отделения временной координаты и перехода к безразмерным величинам из вариационного уравнения (12) можно получить эквивалентную

вариационную формулировку задачи (20):

$$\begin{aligned} \delta F_1 &= \sum_{i=1}^2 \int_{G^{(i)}} \left[ E^{(i)} J^{(i)} \frac{d^2 \eta^{(i)}}{dz_1^2} \frac{d^2 \delta \eta^{(i)}}{dz_1^2} - \right. \\ &- N^{(i)} \frac{d\eta^{(i)}}{dz_1} \frac{d\delta \eta^{(i)}}{dz_1} - \\ &- \omega^2 \frac{\rho_1^{(i)}}{\rho} DS^{(i)} \eta^{(i)} \delta \eta^{(i)} \Big] dz_1 + \\ &+ \left[ p(\eta) \delta \eta + q(\eta) \frac{d\delta \eta}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь

$$\begin{aligned} p(\eta) &= -\omega^2 D \left( m\eta + mz_c \frac{d\eta}{dz_1} + \sum_{n=1}^{n_0} c_n \lambda_n \right), \\ q(\eta) &= -\omega^2 D \left( I \frac{d\eta}{dz_1} + mz_c \eta - \sum_{n=1}^{n_0} c_n \lambda_{0n} \right) - \\ &- D \left( mz_c \frac{d\eta}{dz_1} + \sum_{n=1}^{n_0} c_n \lambda_n \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Вариационное уравнение (21) должно решаться на классе функций, удовлетворяющих граничным условиям

$$\eta^{(1)}|_{z_1=0} = \frac{d\eta^{(1)}}{dz_1} \Big|_{z_1=0} = 0, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} [\eta^{(1)} = \eta^{(2)} = \eta]_{z_1=\zeta}, \\ \left[ \frac{d\eta^{(1)}}{dz_1} = \frac{d\eta^{(2)}}{dz_1} = \frac{d\eta}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta}. \end{aligned} \quad (24)$$

Остальные граничные условия, входящие в соотношения (20), являются естественными условиями для функционала  $F_1$ .

К уравнениям (20) и (21) следует добавить уравнения, вытекающие из динамического граничного условия на свободной поверхности жидкости (15):

$$\begin{aligned} \mu_n (\sigma_n^2 - \omega^2) c_n + \\ + \left[ \omega^2 \left( \lambda_{0n} \frac{d\eta}{dz_1} - \lambda_n \eta \right) - \lambda_n \frac{d\eta}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} = 0 \quad (25) \\ (n = 1, 2, \dots, n_0). \end{aligned}$$

Таким образом, определение частот и форм собственных колебаний упругой конструкции, несущей резервуар с жидкостью, сведено к решению спектральной задачи (20), (25), где частотный параметр  $\omega$  входит как в уравнения, так и в граничные условия. Для случая, когда массовые и жесткостные характеристики стержня кусочно постоянны, для решения подобной спектральной задачи широкое применение получил численный метод начальных параметров [1, 2], в соответствии с которым решения уравнения (21) для каждого из участков с постоянными упруго-массовыми характеристиками представляются в виде функций Крылова. При его использовании постоянные решения для каждого из участков последовательно выражают через решения для предыдущего участка. При этом удается построить матрицу перехода, которая связывает вектор решений, соответствующий сечению стержня  $z_1=l$ , с вектором решений, соответствующим сечению  $z_1=0$ . При удовлетворении краевым условиям на последнем участке получают уравнение для частот. Поскольку оно представляет собой довольно сложное трансцендентное уравнение относительно параметра  $\omega$ , то нахождение его решения возможно только при использовании численных методов типа метода последовательных приближений.

В данном исследовании для построения приближенного решения сформулированной спектральной задачи (20), (25) будем использовать ее эквивалентную вариационную формулировку. Из алгебраических уравнений (25) можно найти явные выражения для коэффициентов  $c_n$ , зависящих от прогиба стержня и его угла поворота в сечении  $z_1=\zeta$ . После их подстановки в вариационное уравнение (21) в него будет нелинейно входить параметр  $\omega$ , что усложняет алгоритм нахождения собственных частот системы. Поэтому уравнения (25) будем рассматривать как дополнительные соотношения для нахождения решения вариационного уравнения (21).

Таким образом, решение задачи о собственных колебаниях рассматриваемой механической системы сведено к решению вариационного уравнения (21) на классе функций, удовлетворяющих главным граничным условиям (23) и (24). При этом остальные граничные условия для вариационной задачи (21) оказываются естественными. При использовании метода Рунге основные трудности связаны с таким выбором аппроксимирующих выражений для перемещений стержня, которые обеспечивали бы непрерывность не только самих перемещений  $\eta^{(i)}$ , но и их первых производных. Данное требование приводит к достаточно

сложным вариантам реализации метода (см., например, [7]). В связи с этим возникает проблема построения такого вариационного уравнения, для которого условия сопряжения (24) выполнялись бы автоматически.

Если рассматривать граничные условия (24) как дополнительные ограничения на класс допустимых функций для вариационной задачи (21), можно воспользоваться подходом Лагранжа для построения нового функционала  $F$ , для которого соотношения (24) будут естественными граничными условиями. Исходя из этого, представим вариационное уравнение для функционала  $F$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta F(\eta^{(i)}, \alpha_1, \alpha_2) = & \sum_{i=1}^2 \int_{G^{(i)}} \left[ E^{(i)} J^{(i)} \times \right. \\ & \times \frac{d^2 \eta^{(i)}}{dz_1^2} \frac{d^2 \delta \eta^{(i)}}{dz_1^2} - N^{(i)} \frac{d\eta^{(i)}}{dz_1} \frac{d\delta \eta^{(i)}}{dz_1} - \\ & \left. - \omega^2 \frac{\rho_1^{(i)}}{\rho} DS^{(i)} \eta^{(i)} \delta \eta^{(i)} \right] dz_1 + \\ & + \frac{1}{2} \left[ p(\eta^{(1)}) \delta \eta^{(1)} + p(\eta^{(2)}) \delta \eta^{(2)} \right]_{z_1=\zeta} + \quad (26) \\ & + \frac{1}{2} \left[ q(\eta^{(1)}) \frac{d\delta \eta^{(1)}}{dz_1} + q(\eta^{(2)}) \frac{d\delta \eta^{(2)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} + \\ & + \delta \left[ \alpha_1 (\eta^{(2)} - \eta^{(1)}) + \right. \\ & \left. + \alpha_2 \left( \frac{d\eta^{(2)}}{dz_1} - \frac{d\eta^{(1)}}{dz_1} \right) \right]_{z_1=\zeta} = 0. \end{aligned}$$

Здесь  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – так называемые множители Лагранжа, подлежащие определению в дальнейшем. Если выполнены кинематические условия сопряжения (24), то вариационное уравнение (26) переходит в соответствующее ему уравнение (21). Теперь нахождение решения вариационной задачи (21) относительно функций  $\eta^{(i)}$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  должно осуществляться на классе функций, удовлетворяющих лишь главным граничным условиям (23).

Покажем, что множители  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  можно выразить через решения  $\eta^{(i)}$  ( $i=1, 2$ ) и их производные в точке  $z_1=\zeta$ . Это дает возможность получить обобщенное вариационное уравнение, когда  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  в формуле (26) заменяются тождественно равными им выражениями, и существенно упростить алгоритм решения исходной спектральной задачи.

Применив процедуру интегрирования по частям, выражение для  $\delta F$  представим в следующем

виде:

$$\begin{aligned}
 \delta F = & \sum_{i=1}^2 \int_{G^{(i)}} L_1^{(i)}(\eta^{(i)}) \delta \eta^{(i)} dz_1 + \\
 & + \delta \alpha_1 [\eta^{(2)} - \eta^{(1)}]_{z_1=\zeta} + \\
 & + \delta \alpha_2 \left[ \frac{d\eta^{(2)}}{dz_1} - \frac{d\eta^{(1)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} + \\
 & + \left\{ \left[ M^{(2)}(\eta^{(2)}) \frac{d\delta \eta^{(2)}}{dz_1} - Q_*^{(2)}(\eta^{(2)}) \delta \eta^{(2)} + \right. \right. \\
 & + \left( \frac{1}{2} p(\eta^{(1)}) - Q_*^{(1)}(\eta^{(1)}) - \alpha_1 \right) \delta \eta^{(1)} + \\
 & + \left( \frac{1}{2} p(\eta^{(2)}) + Q_*^{(2)}(\eta^{(2)}) + \alpha_1 \right) \delta \eta^{(2)} + \\
 & + \left( \frac{1}{2} q(\eta^{(1)}) + M^{(1)}(\eta^{(1)}) - \alpha_2 \right) \frac{d\delta \eta^{(1)}}{dz_1} + \\
 & \left. + \left( \frac{1}{2} q(\eta^{(2)}) - M^{(2)}(\eta^{(2)}) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \alpha_2 \right) \frac{d\delta \eta^{(2)}}{dz_1} \right\}_{z_1=\zeta} = 0.
 \end{aligned} \quad (27)$$

Вариационное уравнение (27) должно выполняться для любых вариаций  $\delta \eta^{(i)}$ ,  $\delta \alpha_1$  и  $\delta \alpha_2$ . Отсюда следует, что уравнениями Эйлера и естественными граничными условиями для функционала  $F$  будут уравнения и граничные условия спектральной задачи (20). Кроме того, из уравнения (27) следуют соотношения

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \left[ \frac{1}{2} p(\eta^{(1)}) - Q_*^{(1)}(\eta^{(1)}) \right]_{z_1=\zeta}, \\
 \alpha_1 &= - \left[ \frac{1}{2} p(\eta^{(2)}) + Q_*^{(2)}(\eta^{(2)}) \right]_{z_1=\zeta}, \\
 \alpha_2 &= \left[ \frac{1}{2} q(\eta^{(1)}) + M^{(1)}(\eta^{(1)}) \right]_{z_1=\zeta}, \\
 \alpha_2 &= - \left[ \frac{1}{2} q(\eta^{(2)}) - M^{(2)}(\eta^{(2)}) \right]_{z_1=\zeta}.
 \end{aligned} \quad (28)$$

Соотношения (28) позволяют определить соответ-

ствующие выражения для множителей Лагранжа:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{p(\eta^{(1)}) - p(\eta^{(2)})}{2} - \right. \\
 & \left. - Q_*^{(2)}(\eta^{(2)}) - Q_*^{(1)}(\eta^{(1)}) \right]_{z_1=\zeta}, \\
 \alpha_2 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{q(\eta^{(1)}) - q(\eta^{(2)})}{2} + \right. \\
 & \left. + M^{(2)}(\eta^{(2)}) + M^{(1)}(\eta^{(1)}) \right]_{z_1=\zeta}.
 \end{aligned} \quad (29)$$

Подстановка выражений (29) в вариационное уравнение (27) позволяет избежать искусственного повышения числа неизвестных задачи за счет введенных множителей Лагранжа.

Перейдем к построению приближенного решения рассматриваемой спектральной задачи, используя метод Ритца. В связи с этим представим искомые функции  $\eta^{(i)}(z_1)$  в виде следующих отрезков обобщенных рядов:

$$\begin{aligned}
 \eta^{(1)} &= \sum_{j=1}^{m_0} a_j V_j^{(1)}(z_1), \\
 \eta^{(2)} &= \sum_{j=1}^{m_0} b_j V_j^{(2)}(z_1).
 \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 V_j^{(1)}(z_1) &= z_1^2 P_j \left( \frac{2z}{\zeta} - 1 \right); \\
 V_j^{(2)}(z_1) &= P_j \left( \frac{2z}{l - \zeta} - \frac{l + \zeta}{l - \zeta} \right);
 \end{aligned}$$

$P_j$  – смещенные на единицу по индексу  $j$  многочлены Лежандра с аргументами, преобразованными на интервалы  $[0, \zeta]$  и  $[\zeta, l]$ . Система базисных функций  $\{V_j^{(i)}(z_1)\}$  подчинена кинематическим граничным условиям задачи (23).

Подставим разложения (30) в вариационное уравнение (26). Тогда функционал  $F(\eta)$  будет зависеть от  $2m_0 + n_0$  переменных  $a_1, a_2, \dots, a_{m_0}, b_1, b_2, \dots, b_{m_0}, c_1, c_2, \dots, c_{n_0}$ . Из условий (25) и (26) получаем систему алгебраических уравнений вида

$$(A - \omega^2 B) \vec{X} = 0, \quad (31)$$

где вектор столбец  $\vec{X}$  имеет компоненты  $a_1, a_2, \dots, a_{m_0}, b_1, b_2, \dots, b_{m_0}, c_1, c_2, \dots, c_{n_0}$ . При этом элементы  $\alpha_{ij}$  матрицы  $A$  определяются по следу-



ющим формулам:

$$\alpha_{ij} = \int_0^\zeta \left[ E^{(1)} J^{(1)} \frac{d^2 V_j^{(1)}}{dz_1^2} \frac{d^2 V_i^{(1)}}{dz_1^2} - N^{(1)} \frac{dV_i^{(1)}}{dz_1} \frac{dV_j^{(1)}}{dz_1} \right] dz_1 + \frac{1}{2} \left[ Q_i^{(1)} V_j^{(1)} + Q_j^{(1)} V_i^{(1)} - M_i^{(1)} \frac{dV_j^{(1)}}{dz_1} - M_j^{(1)} \frac{dV_i^{(1)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m_0),$$

$$\alpha_{i,j+m_0} = \frac{1}{2} \left[ Q_j^{(2)} V_i^{(1)} - Q_i^{(1)} V_j^{(2)} - Dmz_c \frac{dV_i^{(1)}}{dz_1} \frac{dV_j^{(2)}}{dz_1} + M_i^{(1)} \frac{dV_j^{(2)}}{dz_1} - M_j^{(2)} \frac{dV_i^{(1)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m_0),$$

$$\alpha_{i,j+2m_0} = -\frac{1}{2} D\lambda_j \frac{dV_i^{(1)}}{dz_1} \Big|_{z_1=\zeta} \quad (i = 1, 2, \dots, m_0, \quad j = 1, 2, \dots, n_0),$$

$$\alpha_{i+m_0,j} = \frac{1}{2} \left[ Q_i^{(2)} V_j^{(1)} - Q_j^{(1)} V_i^{(2)} - Dmz_c \frac{dV_i^{(2)}}{dz_1} \frac{dV_j^{(1)}}{dz_1} + M_j^{(1)} \frac{dV_i^{(2)}}{dz_1} - M_i^{(2)} \frac{dV_j^{(1)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m_0),$$

$$\alpha_{i+m_0,j+m_0} = \int_\zeta^l E^{(2)} J^{(2)} \frac{d^2 V_j^{(2)}}{dz_1^2} \frac{d^2 V_i^{(2)}}{dz_1^2} - N^{(2)} \frac{dV_i^{(2)}}{dz_1} \frac{dV_j^{(2)}}{dz_1} \Big] dz_1 + \frac{1}{2} \left[ M_i^{(2)} \frac{dV_j^{(2)}}{dz_1} + M_j^{(2)} \frac{dV_i^{(2)}}{dz_1} - Q_i^{(2)} V_j^{(2)} - Q_j^{(2)} V_i^{(2)} \right]_{z_1=\zeta}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, m_0),$$

$$\alpha_{i+m_0,j+2m_0} = -\frac{1}{2} D\lambda_j \frac{dV_i^{(2)}}{dz_1} \Big|_{z_1=\zeta} \quad (i = 1, 2, \dots, m_0, \quad j = 1, 2, \dots, n_0),$$

$$\alpha_{i+2m_0,j} = -\frac{1}{2} D\lambda_i \frac{dV_j^{(1)}}{dz_1} \Big|_{z_1=\zeta} \quad (i = 1, 2, \dots, n_0, \quad j = 1, 2, \dots, m_0),$$

$$\alpha_{i+2m_0,j+m_0} = -\frac{1}{2} D\lambda_i \frac{dV_j^{(2)}}{dz_1} \Big|_{z_1=\zeta} \quad (i = 1, 2, \dots, n_0, \quad j = 1, 2, \dots, m_0),$$

$$\alpha_{i+2m_0,j+2m_0} = \delta_{ij} D\mu_i \sigma_i^2 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n_0).$$

В свою очередь, элементы  $\beta_{ij}$  матрицы  $B$  вычисляются по формулам

$$\beta_{i,j} = D \int_0^\zeta \frac{\rho_1^{(1)}}{\rho} S^{(1)} V_i^{(1)} V_j^{(1)} dz_1 + \frac{1}{4} \left[ P_j^{(1)} V_i^{(1)} - P_i^{(1)} V_j^{(1)} + R_j^{(1)} \frac{dV_i^{(1)}}{dz_1} - R_i^{(1)} \frac{dV_j^{(1)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m_0),$$

$$\beta_{i,j+m_0} = \frac{1}{4} \left[ P_i^{(1)} V_j^{(2)} + P_j^{(2)} V_i^{(1)} + R_i^{(1)} \frac{dV_j^{(2)}}{dz_1} + R_j^{(2)} \frac{dV_i^{(1)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m_0),$$

$$\beta_{i,j+2m_0} = \frac{1}{2}D \left[ \lambda_j V_i^{(1)} - \lambda_{0j} \frac{dV_i^{(1)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta}$$

$$(i = 1, 2, \dots, m_0, \quad j = 1, 2, \dots, n_0),$$

$$\beta_{i+m_0,j} = \frac{1}{4} \left[ P_i^{(2)} V_j^{(1)} + P_j^{(1)} V_i^{(2)} + R_i^{(2)} \frac{dV_j^{(1)}}{dz_1} + R_j^{(1)} \frac{dV_i^{(2)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta}$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, m_0),$$

$$\beta_{i+m_0,j+m_0} = D \int_{\zeta}^l \frac{\rho_i^{(2)}}{\rho} S^{(2)} V_i^{(2)} V_j^{(2)} dz + \frac{1}{4} \left[ P_j^{(2)} V_i^{(2)} - P_i^{(2)} V_j^{(2)} + R_j^{(2)} \frac{dV_i^{(2)}}{dz_1} - R_i^{(2)} \frac{dV_j^{(2)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta}$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, m_0),$$

$$\beta_{i+m_0,j+2m_0} = \frac{1}{2}D \left[ \lambda_j V_i^{(2)} - \lambda_{0j} \frac{dV_i^{(2)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta},$$

$$(i = 1, 2, \dots, m_0, \quad j = 1, 2, \dots, n_0),$$

$$\beta_{i+2m_0,j} = \frac{1}{2}D \left[ \lambda_i V_j^{(1)} - \lambda_{0i} \frac{dV_j^{(1)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n_0, \quad j = 1, 2, \dots, m_0),$$

$$\beta_{i+2m_0,j+m_0} = \frac{1}{2}D \left[ \lambda_i V_j^{(2)} - \lambda_{0i} \frac{dV_j^{(2)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta},$$

$$(i = 1, 2, \dots, n_0, \quad j = 1, 2, \dots, m_0),$$

$$\beta_{i+2m_0,j+2m_0} = \delta_{ij} D \mu_i \quad (i, j = 1, 2, \dots, n_0).$$

В приведенных формулах для коэффициентов матриц  $A$  и  $B$   $\delta_{ij}$  – символ Кронекера, а остальные

обозначения имеют следующий смысл:

$$Q_i^{(k)} = Q_*^{(k)}(V_i^{(k)}); \quad M_i^{(k)} = M^{(k)}(V_i^{(k)});$$

$$P_i^{(k)} = Dm \left( V_i^{(k)} + z_c \frac{dV_i^{(k)}}{dz_1} \right);$$

$$R_i^{(k)} = D \left( mz_c V_i^{(k)} + I \frac{dV_i^{(k)}}{dz_1} \right)$$

$$(k = 1, 2, \quad i = 1, 2, \dots, m_0).$$

Первые  $2m_0$  уравнений алгебраической системы (31) получены из вариационного уравнения (26), а последние  $n_0$  – из уравнений (25), предварительно умноженных на коэффициент  $D$  (кроме того, мы положили в них  $\eta = (\eta^{(1)} + \eta^{(2)})/2$  при  $z_1 = \zeta$ ). Из приведенных выражений для  $\alpha_{ij}$  и  $\beta_{ij}$  легко видеть, что матрицы  $A$  и  $B$  симметричны. Это их свойство является математическим выражением консервативности рассматриваемой механической системы.

Таким образом, определение частот и форм собственных колебаний рассматриваемой механической системы свелось к решению обобщенной алгебраической задачи (31).

### 3. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Пусть тонкостенный стержень однороден и имеет цилиндрическую форму. Будем также полагать, что резервуар представляет собой прямой круговой цилиндр, прикрепленный к стержню с помощью абсолютно жесткого шпангоута у своего основания и заполнен жидкостью на высоту  $h$ . В этом случае для определения гидродинамических коэффициентов  $\lambda_i$ ,  $\lambda_{0i}$ ,  $\mu_i$ ,  $\sigma_i$  и  $I^{(w)}$ , входящих в систему алгебраических уравнений (31), можно воспользоваться формулами из работы [8].

Введем следующие обозначения:

- $r_0, \delta$  – радиус и толщина стержня;
- $a = r_0/R_0$  – радиус стержня, отнесенный к радиусу резервуара;
- $l_1 = l/r_0, \delta_1 = \delta/r_0$  – длина и толщина стержня, отнесенные к его радиусу;
- $\zeta_1 = \zeta/r_0$  – точка крепления резервуара к стержню.

Выберем в качестве характерного линейного размера рассматриваемой механической системы радиус резервуара  $R_0$ . Безразмерные площадь поперечного сечения, его экваториальный момент

Табл. 1. Значения частот  $\omega_i$  связанных колебаний рассматриваемой системы при  $l_1=28$  и  $\zeta_1=14$  в зависимости от числа членов  $m_0$  и  $n_0$  в разложениях (30) и (7) соответственно

$m_0$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_{n_0+1}$	$\omega_{n_0+2}$	$\omega_{n_0+3}$
$n_0 = 1$							
4	1.30227				3.58888	18.6539	75.6249
6	1.30227				3.58700	18.6321	73.3952
8	1.30227				3.58700	18.6320	73.2925
10	1.30227				3.58700	18.6320	73.2925
12	1.30227				3.58700	18.6320	73.2925
$n_0 = 2$							
4	1.30226	2.30465			3.60426	18.7504	75.6459
6	1.30226	2.30465			3.60235	18.7286	73.4908
8	1.30226	2.30465			3.60235	18.7286	73.3882
10	1.30226	2.30465			3.60235	18.7286	73.3882
12	1.30226	2.30465			3.60235	18.7286	73.3882
$n_0 = 3$							
4	1.30226	2.30465	2.91837		3.61036	18.7743	75.6544
6	1.30226	2.30465	2.91836		3.60845	18.7525	73.5192
8	1.30226	2.30465	2.91836		3.60845	18.7525	73.4167
10	1.30226	2.30464	2.91836		3.60844	18.7525	73.4166
12	1.30226	2.30464	2.91836		3.60844	18.7525	73.4166
$n_0 = 4$							
4	1.30226	2.30466	2.91836	3.41495	3.61793	18.7837	75.6583
6	1.30226	2.30464	2.91835	3.41490	3.61606	18.7619	73.5312
8	1.30226	2.30464	2.91835	3.41490	3.61606	18.7618	73.4287
10	1.30226	2.30464	2.91835	3.41490	3.61606	18.7618	73.4286
12	1.30226	2.30464	2.91835	3.41490	3.61606	18.7618	73.4286

Табл. 2. Значения частот  $\omega_i$  связанных колебаний рассматриваемой системы при  $l_1=28$ ,  $m_0=10$  и  $\zeta_1=14$  в зависимости от числа членов  $n_0$  в разложениях (7)

$n_0$	5	6	7	8	9	10	11	12
$\omega_5$	3.61337	3.61282	3.61262	3.61253	3.61248	3.61245	3.61245	3.61243
$\omega_{n_0+2}$	18.7665	18.7691	18.7708	18.7718	18.7726	18.7732	18.7736	18.7739
$\omega_{n_0+3}$	73.4348	73.4383	73.4406	73.4421	73.4431	73.4439	73.4445	73.4449

инерции и коэффициент  $D$  (формулы (16)) можно представить в виде

$$S = 2\pi a^2 \delta_1, \quad J = \pi a^4 \delta_1,$$

$$D = D_1 \frac{1}{\pi a^4 \delta_1}, \quad D_1 = \frac{\rho g R_0}{E_0}.$$

Приведем некоторые результаты расчетов собственных колебаний рассматриваемой механической системы, иллюстрирующие эффективность предложенного метода решения спектральной задачи и влияние колебаний жидкости в резервуаре на частоты и формы колебаний системы в целом.

При этом были использованы следующие безразмерные величины:

$$\rho_0/\rho = 7.8, \quad D_1 = 0.476 \cdot 10^{-7},$$

$$a = 1.25, \quad \delta_1 = 0.001, \quad h = 1.0.$$

Масса резервуара не учитывалась.

В табл. 1 и 2 представлены значения частот  $\omega_i$  связанных колебаний жидкости и упругого стержня при  $l_1=28$ ,  $\zeta_1=14$  в зависимости от числа членов  $m_0$  и  $n_0$  в разложениях (30) и (7) соответственно.

Введем в рассмотрение частоты двух типов –

Табл. 3. Зависимость парциальных частот от безразмерной глубины жидкости в резервуаре

$h$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\omega_1^*$	$\omega_2^*$	$\omega_3^*$
.20	.806	2.050	2.827	3.942	21.791	72.829
.40	1.074	2.277	2.919	3.747	19.537	72.656
.60	1.215	2.305	2.922	3.570	18.156	72.523
.80	1.287	2.309	2.922	3.409	17.233	72.425
1.00	1.323	2.309	2.922	3.263	16.583	72.344
1.20	1.341	2.309	2.922	3.129	16.107	72.249
1.40	1.349	2.309	2.922	3.006	15.751	72.106
1.60	1.353	2.309	2.922	2.892	15.479	71.878
1.80	1.355	2.309	2.922	2.787	15.268	71.531
2.00	1.356	2.309	2.922	2.690	15.104	71.037
2.20	1.356	2.309	2.922	2.599	14.976	70.370
2.40	1.357	2.309	2.922	2.514	14.876	69.511
2.60	1.357	2.309	2.922	2.435	14.797	68.445
2.80	1.357	2.309	2.922	2.361	14.736	67.167
3.00	1.357	2.309	2.922	2.290	14.689	65.678

$\{\sigma_i\}$  и  $\{\omega_i^*\}$ . Первые из них совпадают с частотами колебаний жидкости в неподвижном резервуаре, а вторые представляют собой частоты колебаний упругого стержня с подвешенным к нему резервуаром, поверхность жидкости в котором закрыта жесткой крышкой – “заморожена”. Их можно получить из алгебраической системы (31), положив в ней  $n_0=0$ . В этом случае исходная алгебраическая система порядка  $2m_0+n_0$  переходит в систему порядка  $2m_0$ . Введение наборов  $\{\sigma_i\}$  и  $\{\omega_i^*\}$  соответствует разбиению исходной механической системы на две подсистемы (парциальные системы). Поведение первых трех парциальных частот в зависимости от безразмерной глубины жидкости в резервуаре иллюстрирует табл. 3.

Сопоставление данных из табл. 1 и 3 при  $h=1$  свидетельствует о том, что для принятых исходных данных первые три собственных частоты системы близки к  $\{\sigma_i\}$ , тогда как частоты с номерами  $\omega_{n_0+i}$  близки к  $\{\omega_i^*\}$  ( $i=1, 2, 3$ ).

В дальнейшем будем различать два типа частот системы “стержень – жидкость”. Первый из них – это частоты, обусловленные в основном колебаниями жидкости в резервуаре. В этом случае будем говорить о “преимущественно волновых колебаниях”. Ко второму типу относятся частоты, которые обусловлены в основном упругими и инерционными свойствами стержня с подвешенной к нему в определенном сечении массой жидкости. Колебания свободной поверхности жидкости сказываются на их значениях в меньшей степени, так

что здесь уместно вести речь о “преимущественно упругих колебаниях” системы.

В данном примере при  $n_0 \leq 5$  частоты, относящиеся ко второму типу, начинаются с  $\omega_{n_0+1}$ . При увеличении значения  $n_0$  частоты первого и второго типов перемешиваются. Дальнейшие расчеты также показывают, что для получения младших частот  $\omega_i$  первого типа с точностью до шести значащих цифр необходимо положить  $n_0=i+1$  при  $m_0=10$  членов в разложении (30). Для получения трех частот  $\omega_i$  второго типа с такой же точностью необходимо положить  $n_0=i+15$  и  $m_0=10$ .

Согласно работе [8], соответствующие полученному потенциалу смещений амплитудные значения для  $i$ -ой формы колебаний свободной поверхности жидкости имеют вид

$$\xi_i = \sum_{n=1}^{n_0} c_n^{(i)} \frac{J_1(K_n r)}{J_1(K_n)} \sin \eta,$$

где  $J_1(x)$  – функция Бесселя первого рода и первого порядка;  $K_n$  –  $n$ -ый корень уравнения  $J_1'(x)=0$ . В дальнейшем векторы  $\vec{X}^{(i)}$  алгебраической системы (31) нормировались таким образом, чтобы отклонения жидкости  $\xi_i$  в направлении оси  $Oz$  в плоскости  $Oyz$  на стенке резервуара имели единичную амплитуду.

Вычисление форм собственных колебаний рассматриваемой механической системы показывает, что предложенный алгоритм обеспечивает поточечную сходимость решений и их первых трех прои-

зводных для прогибов стержня как внутри областей  $G^{(1)}$  и  $G^{(2)}$ , так и на их границе. Это позволяет рассчитывать моменты и перерезывающие силы в любом сечении стержня.

В табл. 4 представлены результаты проверки выполнения граничных условий (20) в точке  $z_1 = \zeta_1$  крепления резервуара к стержню, полученные в результате подстановки в них построенных приближенных решений для пятой формы колебаний. Здесь через  $R_Q$  и  $R_M$  обозначены выражения для правых частей соответствующих силовых граничных условий, входящих в (20). Символы  $\mp$  указывают на соответствующие предельные величины, вычисленные при подходе к точке  $z_1 = \zeta_1$  слева и справа. Из таблицы следует, что предложенный в данной работе обобщенный функционал обеспечивает выполнение с высокой точностью кинематических и силовых граничных условий сопряжения в точке  $z_1 = \zeta_1$ . Все это свидетельствует о достаточной эффективности разработанного способа решения рассматриваемой спектральной задачи.

На рис. 2 показана зависимость связанных и парциальных частот от относительной глубины  $h$  заполнения жидкостью резервуара при  $l_1 = 28$  и  $\zeta_1 = 14$ . Здесь сплошные кривые соответствуют двум нижшим частотам  $\omega_1$  и  $\omega_2$  связанных колебаний стержня и жидкости, штриховые – парциальным частотам  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , а штрих-пунктирная – парциальной частоте  $\omega_1^*$  (их численные значения см. в табл. 3).

Как и следовало ожидать, если парциальные частоты близки друг к другу, то  $\omega_1$  и  $\omega_2$  наиболее значимо отличаются от них. Дело в том, что при совпадении частот парциальных систем силовое воздействие колеблющейся жидкости на опору наступает в моменты времени, благоприятные для передачи энергии от жидкости к стержню и наблюдается сильное взаимодействие парциальных систем. Если же парциальные частоты разнесены, то в некотором приближении можно считать, что каждая подсистема колеблется сама по себе. Эти выводы полностью согласуются с общей теорией колебаний механических систем [9].

На рис. 3 представлены формы колебаний жидкости и стержня для первых двух нижших частот колебаний рассматриваемой механической системы при некоторых значениях глубины  $h$  заполнения резервуара жидкостью. Из графиков следует, что, когда система совершает колебания с частотой  $\omega_1$ , жидкость и упругий стержень двигаются в одной фазе. Если же система колеблется с частотой  $\omega_2$ , то жидкость и стержень двигаются со сдвигом фаз на  $180^\circ$ .

Отметим, что предложенный алгоритм также

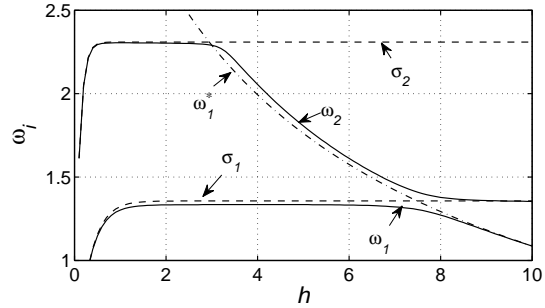


Рис. 2. Зависимость связанных и парциальных частот системы от глубины  $h$  заполнения резервуара жидкостью

Табл. 4. Значения функций  $\eta_{5\mp}(\zeta_1)$ ,  $\eta'_{5\mp}(\zeta_1)$ , а также левых и правых частей граничных условий (20) при  $l_1 = 28$ ,  $\zeta_1 = 14$

$\eta_{5-}(\zeta_1)$	$-0.369381062$
$\eta_{5+}(\zeta_1)$	$-0.369381062$
$\eta'_{5-}(\zeta_1)$	$-0.352173074 \cdot 10^{-1}$
$\eta'_{5+}(\zeta_1)$	$-0.352173074 \cdot 10^{-1}$
$[Q_*^{(2)} - Q_*^{(1)}]_{z_1=\zeta_1}$	$-0.487448281 \cdot 10^{-4}$
$R_Q$	$-0.487448349 \cdot 10^{-4}$
$[M^{(1)} - M^{(2)}]_{z_1=\zeta_1}$	$-0.589616197 \cdot 10^{-4}$
$R_M$	$-0.589616147 \cdot 10^{-4}$

позволяет рассчитывать конструкцию, в которой резервуар с жидкостью жестко прикреплен к верхнему торцу стержня. Сравнение расчетных данных для этого случая с соответствующими результатами исследования [8], проведенное с целью независимого контроля вычислений, показало их полное совпадение.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведена математическая модель динамики упругих стержней, имеющих подвесные резервуары с идеальной жидкостью, на которые действуют сосредоточенные и распределенные внешние нагрузки общего вида.

На этой основе сформулирована спектральная задача, описывающая собственные поперечные колебания рассматриваемой конструкции и разработан метод ее решения. Поскольку вторые и высшие производные от прогибов стержня в точке крепления резервуара к стержню имеют разрывы первого рода, использовано разбиение области определения искомых функций на две подобласти со

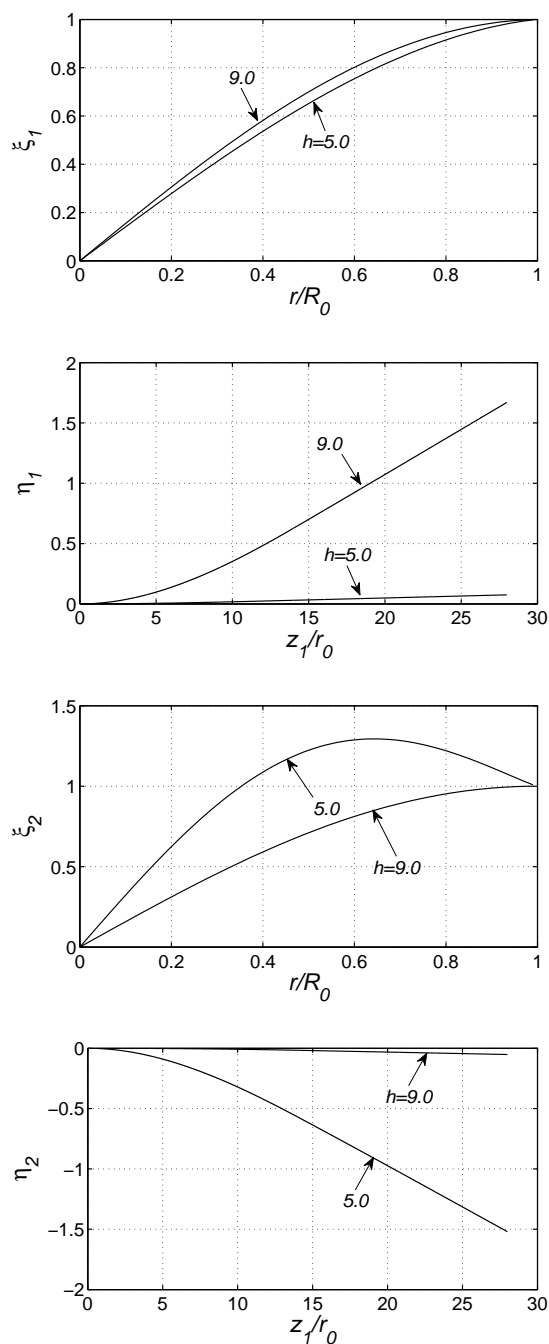


Рис. 3. Формы колебаний стержня и жидкости при различных глубинах  $h$  заполнения резервуара жидкостью

смежной точкой в месте крепления резервуара к стержню.

Для решения поставленной задачи сопряжения сформулирован обобщенный функционал, для которого условия сопряжения решений в смежной точке введенных подобластей являются естественными граничными условиями. После применения метода Ритца для решения сформулированной вариационной задачи исходная постановка сведена к анализу обобщенной алгебраической проблемы на собственные значения.

Проведенные вычисления показали на достаточную эффективность предлагаемого алгоритма решения и возможность существенного влияния волновых движений жидкости в резервуаре на колебания стержня.

1. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. – М.: Машиностроение, 1971. – 568 с.
2. Рабинович Б. И., Шмаков В. П., Кобычкин В. С. К теории колебаний конструкций, несущих упругие резервуары с жидкостью // Исследования по теории сооружений. – М.: Стройиздат, 1970. – С. 68–84.
3. Forsberg K. Axisymmetric and beam-type vibrations of thin cylindrical shells // AIAA J. – 1969, **2**. – P. 221–227.
4. Trotsenko Yu. V. Frequencies and modes of vibration of a cylindrical shell with attached rigid body // J. Sound Vib. – 2006, **292**. – P. 535–551.
5. Gavriluk I., Hermann M., Trotsenko Yu., Timokha A. Eigenoscillations of three- and two-element flexible systems // Int. J. Solids Struct. – 2010, **47**. – P. 1857–1870.
6. Троценко В. А., Троценко Ю. В. Математическая модель поперечных движений резервуара с жидкостью, закрепленного на упругой опоре // Проблемы динаміки та стійкості багатовимірних систем: Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – 2009. – **6**, № 3. – С. 215–231.
7. Троценко В. А. Об одном подходе к решению осесимметричных задач статики мягких нелинейно-упругих оболочек вращения вариационным методом // Моделирование динамических процессов взаимодействия в системах тел с жидкостью. – К.: Ин-т матем. АН УССР. – 1990. – С. 43–51.
8. Троценко В. А., Троценко Ю. В. Поперечные колебания упругого стержня, несущего на свободном конце резервуар с жидкостью // Акуст. вісн. – 2010. – **13**, № 3. – С. 51–67.
9. Мандельштам Л. И. Лекции по теории колебаний. – М.: Наука, 1972. – 470 с.