

УДК 534.3+611.539

ФУНКЦІЇ ГРІНА ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ Й РІВНЯННЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ НЕСКІНЧЕННОГО ПРЯМОГО ЖОРСТКОСТІННОГО КАНАЛУ КРУГОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ З ОСЕРЕДНЕНОЮ ТЕЧІЄЮ

А. О. БОРИСЮК

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Отримано 02.09.2011

Побудовані функції Гріна тривимірною хвильового рівняння й тривимірною рівняння Гельмгольца для нескінченного прямого жорсткостінного каналу кругового поперечного перерізу з осередненою течією. Ці функції записуються у вигляді відповідних рядів за акустичними модами каналу і є періодичними по азимутальній координаті та симетричними відносно осевого перерізу розташування точкового джерела. У функції Гріна хвильового рівняння кожен член ряду є сумою прямої й зворотної хвиль, які поширюються на відповідній моді каналу вниз і вгору за течією від джерела. У побудованих функціях Гріна в явному вигляді відображені ефекти осередненої течії, які стають вагомішими зі зростанням числа Маха течії. Зокрема, це зумовлює появу й подальше збільшення асиметрії функцій відносно поперечного перерізу розташування точкового джерела. У випадку ж відсутності осередненої течії побудовані функції Гріна симетричні відносно поперечного перерізу джерела і співпадають з відомими функціями Гріна для досліджуваного каналу.

Построены функции Грина трехмерного волнового уравнения и трехмерного уравнения Гельмгольца для бесконечного прямого жесткостенного канала кругового поперечного сечения с осредненным течением. Эти функции записываются в виде соответствующих рядов по акустическим модам канала. Они периодичны по азимутальной координате и симметричны относительно осевого сечения расположения точечного источника. В функции Грина волнового уравнения каждый член ряда является суммой прямой и обратной волн, распространяющихся на соответствующей моде канала вниз и вверх по течению от источника. В построенных функциях Грина в явном виде отражены эффекты осредненного течения, которые становятся более существенными с увеличением числа Маха течения. В частности, это приводит к появлению и дальнейшему увеличению асимметрии функций относительно поперечного сечения, в котором расположен источник. В случае же отсутствия осредненного течения построенные функции Грина симметричны относительно поперечного сечения источника и совпадают с известными функциями Грина для исследуемого канала.

The Green's functions of three-dimensional wave and Helmholtz equations for an infinite straight rigid-walled channel of circular cross-section with a mean flow are constructed. These functions are written in terms of the corresponding series of the channel acoustic modes. They are periodic in azimuthal coordinate and symmetric about the axial section of the point source location. In the Green's function of the wave equation, each term of the series is a sum of the direct and reverse waves propagating on the corresponding channel mode downstream and upstream of the source. In the obtained Green's functions, the mean flow effects are directly reflected, that become more significant as the flow Mach number increases. In particular, this leads to occurrence and further growth of the functions' asymmetry about the cross-section of the source location. In the case of absence of mean flow, the obtained Green's functions are symmetric about source cross-section and coincide with known Green's functions for the considered channel.

ВСТУП

Проблеми дослідження акустичних полів у каналах різних геометрій та розмірів актуальні для нафтогазової промисловості, автомобіле- та літакобудування, архітектури, медицини, комунального господарства, тощо [1–7]. Усі вони, незалежно від типу каналів й акустичних джерел у них, у принципі можуть бути розв'язані за допомогою одного й того ж підходу – методу функцій Гріна. Проте його застосування доцільне лише за умов існування принципової можливості побудови відповідної функції Гріна. Ця можливість залежить від багатьох факторів – геометрії досліджуваного каналу й форми його поперечного перерізу, фізичних властивостей стінок і умов закріплення, властивостей оточуючого і внутрішнього середовища,

акустичних умов на кінцях каналу, наявність або відсутність течії в ньому, і т. п.

Як показує аналіз наукової літератури, найбільш досліджені нескінченні прямі жорсткостінні канали з прямокутним чи круговим поперечним перерізом (див., наприклад, [1–3, 8–18] і відповідні посилання у них). Для них побудовано відповідні функції Гріна хвильового рівняння й рівняння Гельмгольца, за допомогою яких одержано вирази для різних характеристик акустичних полів, згенерованих відповідними джерелами у каналах. Проте всі ці результати, як правило, обмежуються випадком відсутності течії в каналі. Якщо ж наявність течії й береться до уваги, то її вплив у відповідних функціях Гріна та/або кінцевих результатах проявляється лише у неявному вигляді. У вигляді явних математичних залежностей дослі-

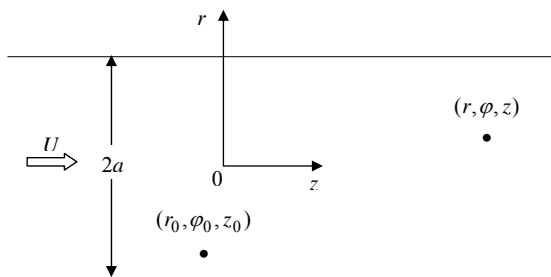


Рисунок. Геометрія задачі

джуваних характеристик акустичних полів від параметрів течії ці ефекти проявляються лише у відповідних масштабних законах і різного роду кількісних оцінках [1–3, 8–12, 14–18].

У даній роботі зроблено спробу частково усунути цей недолік. Тут побудовані функції Гріна хвильового рівняння й рівняння Гельмгольца для нескінченного прямого жорсткостінного каналу кругового поперечного перерізу з осередненою течією. Одержані при цьому результати явним чином залежать від параметрів течії, а у разі її відсутності – співпадають з відомими результатами [1, 8, 11, 12, 14–18].

Стаття складається із вступу, трьох розділів, висновків, списку літератури й двох додатків. У розділі 1 формулюється задача. Далі будуються функції Гріна хвильового рівняння (розділ 2) й рівняння Гельмгольца (розділ 3) для досліджуваного каналу з осередненою течією і проводиться їх аналіз. Після цього формулюються висновки, наводиться список цитованої літератури. У додатках А і Б відповідно даються список прийнятих позначень й детальне виведення загального співвідношення між функціями, які використовуються у розділі 3.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається нескінченний прямий нерухомий жорсткостінний канал кругового поперечного перерізу з радіусом a , у якому з осередненою швидкістю U тече рідина. Зауважимо, що тут не вводяться ні в'язкість рідини, ні її масова густина. Оскільки вважатимемо, що згенерований звук поширюється в ідеальному стисливому середовищі [1–3, 12–20], то перша зі згаданих характеристик взагалі не відіграватиме ніякої ролі. Що ж до густини, то вона увійде до кінцевого результату лише у неявному вигляді – через наперед задану швидкість звуку в незбуреному середовищі.

У каналі задані довільним чином розподілені акустичні джерела різної природи, які генерують в ньому акустичне поле. Останнє описується тривимірним хвильовим рівнянням специфічного типу, яке у науковій літературі часто називають тривимірним конвективним хвильовим рівнянням [14–16, 19, 20]:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{d^2 p_a}{dt^2} - \nabla^2 p_a = \gamma. \quad (1)$$

Тут p_a – акустичний тиск; c_0 – швидкість звуку в незбуреній рідині; t – час; функція γ описує сумарний розподіл акустичних джерел. Необхідно побудувати функцію Гріна рівняння (1) для досліджуваного каналу, а також функцію Гріна його образу Фур'є у частотній області, який за аналогією з рівнянням (1) часто називають тривимірним конвективним рівнянням Гельмгольца [14–16, 19, 20].

Наявність терміну “конвективне” у назві рівняння (1) зумовлена тим, що у нього входить повна похідна $d/dt = \partial/\partial t + \vec{U} \cdot \vec{\nabla}$, яка містить індуковану осередненою течією ненульову конвективну складову $\vec{U} \cdot \vec{\nabla}$. Тут \vec{U} – вектор швидкості осередненої течії; $\vec{\nabla}$ – оператор градієнта; крапкою позначене скалярне множення векторів [14–16, 19–22]. У разі відсутності осередненої течії ($\vec{U} = 0$) повна похідна за часом співпадає з частинною $-d/dt \Rightarrow \partial/\partial t$, а рівняння (1) – з класичним тривимірним хвильовим рівнянням

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} - \nabla^2 p_a = \gamma.$$

2. ФУНКЦІЯ ГРІНА ТРИВИМІРНОГО КОНВЕКТИВНОГО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

Функція Гріна $G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0)$ тривимірного конвективного хвильового рівняння (1) має задовольняти рівняння

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{d^2 G}{dt^2} - \nabla^2 G = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \delta(t - t_0) \quad (2)$$

(тут $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ – просторова тривимірна а $\delta(t - t_0)$ – часова одновимірна дельта-функції Дірака) і описує акустичний тиск у точці поля \vec{r} в момент часу t , згенерований у каналі в момент часу t_0 точковим імпульсним джерелом одиничної амплітуди, розташованим у точці \vec{r}_0 (див. рисунок).

У циліндричній системі координат (r, φ, z) , яка вводиться для розв'язування задачі, рівняння (2)

має такий вигляд:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{d^2 G}{dt^2} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial G}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} \right] = \frac{1}{r} \delta(r - r_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(z - z_0) \delta(t - t_0). \quad (3)$$

Тут друга повна похідна за часом, через яку відображені ефекти осередненої течії, записується наступним чином:

$$\frac{d^2}{dt^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \right)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} + U^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (4)$$

Вектор швидкості осередненої течії \vec{U} та оператор набла $\vec{\nabla}$ виглядають так:

$$\vec{U} = U_r \vec{e}_r + U_\varphi \vec{e}_\varphi + U_z \vec{e}_z = U \vec{e}_z;$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z;$$

де \vec{e}_r , \vec{e}_φ та \vec{e}_z – орти координатних осей r , φ та z відповідно. Координати і час змінюються у таких межах:

$$0 \leq r, r_0 \leq a; \quad 0 \leq \varphi, \varphi_0 \leq 2\pi; \quad |z| < \infty; \\ |z_0| < \infty; \quad |t| < \infty; \quad |t_0| < \infty.$$

Граничні умови для функції G виглядають як рівність нулеві її радіальної похідної на нерухомій жорсткій стінці досліджуваного каналу:

$$\left. \frac{\partial G}{\partial r} \right|_{r=a} = 0, \quad (5)$$

що означає рівність нулеві нормальної до стінки компоненти акустичної швидкості, й умова випромінювання у нескінченність, що означає відсутність відбиття звуку на його безмежно віддалених кінцях.

Окрім цього, функція G має бути періодичною відносно азимутальної координати φ :

$$G|_{\varphi=\varphi_*+2n\pi} = G|_{\varphi=\varphi_*}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (6)$$

симетричною відносно площини $\varphi = \varphi_0$ розташування точкового джерела:

$$G|_{\varphi=\varphi_0+\Delta\varphi} = G|_{\varphi=\varphi_0-\Delta\varphi}, \quad \Delta\varphi > 0 \quad (7)$$

й задовольняти умову причинності [11, 12, 14–16, 23]:

$$G|_{t < t_0} = 0, \quad (8)$$

яка говорить про те, що до початку генерації звуку цим джерелом акустичного поля в каналі не було.

Розв'язок початково-граничної задачі (3)–(8) шукаємо у вигляді ряду за акустичними модами каналу $\{\Psi_{nm}^{(1)}, \Psi_{nm}^{(2)}\}$:

$$G(r, \varphi, z, t; r_0, \varphi_0, z_0, t_0) = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} G_{nm}^{(j)}(z, t; r_0, \varphi_0, z_0, t_0) \times \Psi_{nm}^{(j)}(r, \varphi), \quad (9)$$

де

$$\Psi_{nm}^{(1)}(r, \varphi) = J_n(\alpha_{nm} r) \cos(n\varphi);$$

$$\Psi_{nm}^{(2)}(r, \varphi) = J_n(\alpha_{nm} r) \sin(n\varphi);$$

J_n – циліндричні функції Бесселя першого роду порядку n ; $\alpha_{nm} = \zeta_{nm}/a$ – радіальні хвильові числа; ζ_{nm} – корені рівняння

$$J'_n(\zeta_{nm}) = 0; \quad m = 1, 2, \dots;$$

$\Psi_{0m}^{(2)} \equiv 0$. Вибрана у такому вигляді функція G тожко задовольняє умову (5) на жорсткій стінці.

У представленні (9) невідомими є коефіцієнти $G_{nm}^{(j)}$. Для їх визначення підставимо ряд (9) у розписане з урахуванням виразу (4) рівняння (3), помножимо одержане при цьому співвідношення скалярно на функції $\Psi_{nm}^{(j)}$ і врахуємо ортогональність останніх:

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} \Psi_{nm}^{(j)}(r, \varphi) \Psi_{sq}^{(l)}(r, \varphi) r dr d\varphi = \begin{cases} \|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2, & (s, q, l) = (n, m, j), \\ 0, & (s, q, l) \neq (n, m, j), \end{cases} \quad (10)$$

$$\|\Psi_{nm}^{(1)}\|^2 = \int_0^a \int_0^{2\pi} \Psi_{nm}^{(1)2}(r, \varphi) r dr d\varphi = \begin{cases} \pi a^2 J_0^2(\alpha_{0m} a), & n = 0, \\ \frac{\pi a^2}{2} J_n^2(\alpha_{nm} a) \left[1 - \frac{n^2}{\alpha_{nm}^2 a^2} \right], & n \geq 1; \end{cases}$$

$$\|\Psi_{nm}^{(2)}\|^2 = \int_0^a \int_0^{2\pi} \Psi_{nm}^{(2)2}(r, \varphi) r dr d\varphi = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \|\Psi_{nm}^{(1)}\|^2, & n \geq 1. \end{cases}$$

У результаті одержимо неоднорідне диференціальне рівняння для величин $G_{nm}^{(j)}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 G_{nm}^{(j)}}{\partial t^2} + 2 \frac{M}{c_0} \frac{\partial^2 G_{nm}^{(j)}}{\partial t \partial z} - \\ - (1 - M^2) \frac{\partial^2 G_{nm}^{(j)}}{\partial z^2} + \alpha_{nm}^2 G_{nm}^{(j)} = \\ = \frac{\Psi_{nm}^{(j)}(r_0, \varphi_0)}{\|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2} \delta(z - z_0) \delta(t - t_0), \end{aligned} \quad (11)$$

в якому $M = U/c_0$ – число Маха осередненої течії в каналі, квадрати норм його акустичних мод $\|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2$ даються виразами (10), а межі зміни змінних $r_0, \varphi_0, z, z_0, t$ і t_0 вказані після рівняння (4).

Аналіз рівняння (11) показує, що воно, за винятком доданків, які містять число M , співпадає з класичним одновимірним рівнянням Кляйна – Гордона, розв’язок якого для нескінченної області відомий [11, 12]. Оскільки зазначені доданки з’являються внаслідок існування у рівнянні (3) відмінної від нуля конвективної похідної $U\partial/\partial z$, то їх можна назвати конвективними, а саме рівняння (11) – одновимірним конвективним рівнянням Кляйна – Гордона. Щоб позбутися конвективних доданків, уведемо нові безрозмірні змінні:

$$\begin{aligned} Z = \frac{\lambda z}{a}, \quad Z_0 = \frac{\lambda z_0}{a}, \quad T = \lambda^{-1} \frac{c_0 t}{a} + M \frac{\lambda z}{a}, \\ T_0 = \lambda^{-1} \frac{c_0 t_0}{a} + M \frac{\lambda z_0}{a}, \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - M^2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Зворотний зв’язок між змінними $\{z, z_0, t, t_0\}$ і $\{Z, Z_0, T, T_0\}$ має такий вигляд:

$$\begin{aligned} z = \frac{aZ}{\lambda}, \quad z_0 = \frac{aZ_0}{\lambda}, \\ t = \frac{\lambda a}{c_0} (T - MZ), \quad t_0 = \frac{\lambda a}{c_0} (T_0 - MZ_0). \end{aligned} \quad (13)$$

У змінних (12) конвективні доданки у лівій частині рівняння (11) зникають і воно стає зазначеним рівнянням Кляйна – Гордона [11, 12]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G_{nm}^{(j)}}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 G_{nm}^{(j)}}{\partial Z^2} + \alpha_{nm}^2 a^2 G_{nm}^{(j)} = \\ = a^2 \frac{\Psi_{nm}^{(j)}(r_0, \varphi_0)}{\|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2} \delta\left(\frac{a}{\lambda}(Z - Z_0)\right) \times \\ \times \delta\left(\frac{\lambda a}{c_0}(T - T_0 - M(Z - Z_0))\right) \end{aligned} \quad (14)$$

в області

$$|Z| < \infty, \quad |Z_0| < \infty, \quad |T| < \infty, \quad |T_0| < \infty.$$

Розв’язок рівняння (14) для неї задається суперпозицією прямої й зворотної хвиль, які поширюються відповідно вправо та вліво від імпульсного джерела, розташованого у точці $Z = Z_0$ [11, 12]:

$$\begin{aligned} G_{nm}^{(j)} = \frac{c_0 \Psi_{nm}^{(j)}(r_0, \varphi_0)}{2 \|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2} \left[H(Z_0 - Z) \times \right. \\ \times H(T - T_0 + Z - Z_0) + H(Z - Z_0) \times \\ \left. \times H(T - T_0 - (Z - Z_0)) \right] \times \\ \times J_0(\alpha_{nm} a \sqrt{(T - T_0)^2 - (Z - Z_0)^2}). \end{aligned} \quad (15)$$

Тут через

$$H(x) = \int_{-\infty}^x \delta(\eta) d\eta = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

позначено функцію Хевісайда [11, 12, 14–20]. Окрім того, було взято до уваги умову випромінювання у нескінченність, яку має задовольняти функція G .

Урахування у формулі (15) співвідношень (12) дозволяє одержати остаточні вирази для функціональних коефіцієнтів $G_{nm}^{(j)}$ у представленні (9):

$$\begin{aligned} G_{nm}^{(j)} = \frac{c_0 \Psi_{nm}^{(j)}(r_0, \varphi_0)}{2 \|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2} \left[H\left(\frac{\lambda}{a}(z_0 - z)\right) \times \right. \\ \times H\left(\frac{c_0}{\lambda a}(t - t_0) + (M + 1)\frac{\lambda}{a}(z - z_0)\right) + \\ + H\left(\frac{\lambda}{a}(z - z_0)\right) H\left(\frac{c_0}{\lambda a}(t - t_0) + (M - 1)\times \right. \\ \left. \times \frac{\lambda}{a}(z - z_0)\right) \left. \right] J_0\left(\alpha_{nm} a \sqrt{\xi}\right), \end{aligned} \quad (16)$$

де

$$\begin{aligned} \xi = \frac{c_0^2}{\lambda^2 a^2} (t - t_0)^2 + 2 \frac{c_0 M}{a^2} (t - t_0)(z - z_0) + \\ + (M^2 - 1) \frac{\lambda^2}{a^2} (z - z_0)^2. \end{aligned}$$

Підстановка величин (16) у співвідношення (9) дає вираз для шуканої функції Гріна рівняння (1) для нескінченного прямого жорсткостінного каналу кругового поперечного перерізу з осередненою течією:

$$\begin{aligned}
 G(r, \varphi, z, t; r_0, \varphi_0, z_0, t_0) = & \\
 = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} G_{nm}^{(j)}(z, t; r_0, \varphi_0, z_0, t_0) \times & \\
 \times \Psi_{nm}^{(j)}(r, \varphi) = \frac{c_0}{2} \left[H\left(\frac{\lambda}{a}(z_0 - z)\right) \times \right. & \\
 \times H\left(\frac{c_0}{\lambda a}(t - t_0) + (M + 1)\frac{\lambda}{a}(z - z_0)\right) + & \quad (17) \\
 + H\left(\frac{\lambda}{a}(z - z_0)\right) H\left(\frac{c_0}{\lambda a}(t - t_0) + (M - 1) \times \right. & \\
 \left. \times \frac{\lambda}{a}(z - z_0)\right) \left. \right] \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Psi_{nm}^{(j)}(r_0, \varphi_0)}{\|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2} \times & \\
 \times \Psi_{nm}^{(j)}(r, \varphi) J_0(\alpha_{nm} a \sqrt{\xi}). &
 \end{aligned}$$

Бачимо, що функція Гріна (17) записується у вигляді ряду за акустичними модами досліджуваного каналу $\Psi_{nm}^{(j)}$, кожен член якого являє собою суму прямої й зворотної хвиль, які поширюються на відповідній моді вниз і вгору за течією від одичного точкового імпульсного джерела, розташованого у поперечному перерізі каналу $z = z_0$. При цьому функція G періодична за φ , симетрична відносно площини $\varphi = \varphi_0$ і задовольняє умову причинності. Як уже зазначалося, функція G задовольняє також умову (5) на стінці каналу і умову випромінювання.

Подальший аналіз співвідношення (17) показує, що побудована функція Гріна у явному вигляді – через параметри M і $\lambda = \lambda(M)$ – відображає ефекти осередненої течії. Вони стають вагомішими зі зростанням числа M , зумовлюючи, зокрема, появу і подальше збільшення асиметрії функції G відносно площини розташування джерела $z = z_0$. У випадку ж відсутності осередненої течії ($M = 0, \lambda = 1$) функція (17) стає симетричною відносно площини $z = z_0$ і співпадає з відомою функцією Гріна класичного тривимірного хвильового рівняння для досліджуваного каналу [1, 11, 12, 14–16]:

$$\begin{aligned}
 G|_{M=0} = \frac{c_0}{2} \times & \\
 \times \left[H\left(\frac{1}{a}(z_0 - z)\right) H\left(\frac{c_0}{a}(t - t_0) + \frac{1}{a}(z - z_0)\right) + \right. & \\
 + H\left(\frac{1}{a}(z - z_0)\right) H\left(\frac{c_0}{a}(t - t_0) - \frac{1}{a}(z - z_0)\right) \left. \right] \times & \\
 \times \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Psi_{nm}^{(j)}(r_0, \varphi_0)}{\|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2} \Psi_{nm}^{(j)}(r, \varphi) \times & \\
 \times J_0\left(\alpha_{nm} \sqrt{c_0^2(t - t_0)^2 - (z - z_0)^2}\right). &
 \end{aligned}$$

3. ФУНКЦІЯ ГРІНА ТРИВИМІРНОГО КОНВЕКТИВНОГО РІВНЯННЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Як було відзначено в кінці розділу 1, тривимірне конвективне рівняння Гельмгольца є образом Фур'є рівняння (1) у частотній області. У циліндричній системі координат воно має такий вигляд:

$$\nabla_{(r, \varphi, z)}^2 \check{p}_a + k_0^2 \check{p}_a + i2k_0 M \frac{\partial \check{p}_a}{\partial z} - M^2 \frac{\partial^2 \check{p}_a}{\partial z^2} = \check{\gamma}. \quad (18)$$

Як і для відповідного хвильового рівняння, термін “конвективне” в даному разі вказує на наявність ненульової конвективної похідної за рахунок осередненої течії.

Тут \check{p}_a і $\check{\gamma}$ – частотні образи Фур'є функцій p_a і γ відповідно; $k_0 = \omega/c_0$ – акустичне хвильове число; ω – циклічна частота; $\nabla_{(r, \varphi, z)}^2$ – оператор Лапласа,

$$\nabla_{(r, \varphi, z)}^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Окрім того, при застосуванні до рівняння (1) часового перетворення Фур'є

$$\begin{aligned}
 \check{f}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt, & \\
 f(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega &
 \end{aligned}$$

було враховано вираз (4) для другої повної похідної за часом.

Функція Гріна $\check{G}(\vec{r}, \vec{r}_0; \omega)$ рівняння (18) в області

$$\begin{aligned}
 0 \leq r, r_0 \leq a; \quad 0 \leq \varphi, \varphi_0 \leq 2\pi; & \\
 |z| < \infty; \quad |z_0| < \infty &
 \end{aligned}$$

має задовольняти рівняння

$$\begin{aligned}
 \nabla_{(r, \varphi, z)}^2 \check{G} + k_0^2 \check{G} + i2k_0 M \frac{\partial \check{G}}{\partial z} - M^2 \frac{\partial^2 \check{G}}{\partial z^2} = & \\
 = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r} \delta(r - r_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(z - z_0), & \quad (19)
 \end{aligned}$$

яке одержується або з рівняння (18) після відповідної заміни його правої частини, або ж з рівняння (3) шляхом застосування до останнього такого

часового перетворення Фур'є:

$$\tilde{g}(\vec{r}, \vec{r}_0; \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) e^{i\omega(t-t_0)} \times d(t-t_0), \quad (20)$$

$$g(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(\vec{r}, \vec{r}_0; \omega) e^{-i\omega(t-t_0)} d\omega.$$

Окрім цього, як і для конвективного хвильового рівняння, функція \tilde{G} повинна мати нульову радіальну похідну на нерухомій жорсткій стінці каналу:

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0, \quad (21)$$

задовольняти умову випромінювання у нескінченність, а також бути періодичною за кутовою координатою φ :

$$\tilde{G}|_{\varphi=\varphi_*+2n\pi} = \tilde{G}|_{\varphi=\varphi_*}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (22)$$

і симетричною відносно площини $\varphi = \varphi_0$ розташування точкового джерела, яке входить у праву частину рівняння (19):

$$\tilde{G}|_{\varphi=\varphi_0+\Delta\varphi} = \tilde{G}|_{\varphi=\varphi_0-\Delta\varphi}, \quad \Delta\varphi > 0. \quad (23)$$

Якщо співставити граничну задачу (19), (21)–(23) для функції \tilde{G} із задачею (3)–(8) для функції G , то побачимо, що перша задача є частотним образом Фур'є другої. Тому функцію \tilde{G} у принципі можна одержати з функції G у результаті застосування до виразу (17) прямого часового перетворення Фур'є (20). Проте це може призвести до нехування певними фізичними особливостями процесу генерації й поширення звуку в досліджуваному каналі. Тому доцільнішим видається безпосереднє розв'язування цієї граничної задачі.

Виходячи зі сказаного, шукатимемо розв'язок задачі (19), (21)–(23) у вигляді ряду за акустичними модами каналу $\Psi_{nm}^{(j)}$:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(r, \varphi, z, r_0, \varphi_0, z_0; \omega) = \\ = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{G}_{nm}^{(j)}(z, r_0, \varphi_0, z_0; \omega) \times \\ \times \Psi_{nm}^{(j)}(r, \varphi), \end{aligned} \quad (24)$$

в якому всі позначення такі ж, як і для співвідношення (9). Вибране представлення функції \tilde{G} задовольняє умову (21), а його невідомі коефіцієнти

$\tilde{G}_{nm}^{(j)}$ – одновимірне конвективне рівняння Гельмгольца:

$$\begin{aligned} (1 - M^2) \frac{\partial^2 \tilde{G}_{nm}^{(j)}}{\partial z^2} + k_{nm}^2 \tilde{G}_{nm}^{(j)} + i2k_0 M \times \\ \times \frac{\partial \tilde{G}_{nm}^{(j)}}{\partial z} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\Psi_{nm}^{(j)}(r_0, \varphi_0)}{\|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2} \delta(z - z_0), \quad (25) \\ k_{nm} = \sqrt{k_0^2 - \alpha_{nm}^2}, \end{aligned}$$

яке одержується з рівняння (19) після підстановки туди ряду (24), подальшого множення скалярно на моди $\Psi_{nm}^{(j)}$ і врахування ортогональності останніх (див. співвідношення (10)).

Розв'язок рівняння (25) можна одержати аналогічно до того, як це було зроблено у випадку одновимірного конвективного рівняння Кляйна–Гордона (11): звівши його до класичного одновимірного рівняння Гельмгольца, розв'язок якого для нескінченної області відомий [1, 10–19]. Тоді застосування до цього розв'язку відповідних обернених операцій дасть шуканий розв'язок рівняння (25).

Керуючись сказаним, спочатку застосуємо до одновимірного рівняння Кляйна–Гордона (14) часове перетворення Фур'є, яке є безрозмірним аналогом перетворення (20):

$$\begin{aligned} \hat{q}(Z, Z_0; \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} q(Z, T; Z_0, T_0) \times \\ \times e^{i\Omega(T-T_0)} d(T-T_0), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} q(Z, T; Z_0, T_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{q}(Z, Z_0; \Omega) \times \\ \times e^{-i\Omega(T-T_0)} d\Omega. \end{aligned}$$

Тут безрозмірні просторові $\{Z, Z_0\}$ і безрозмірні часові $\{T, T_0\}$ змінні даються співвідношеннями (12), а безрозмірна частота Ω – формулою (35) з додатку Б.

У результаті одержимо класичне одновимірне рівняння Гельмгольца

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{G}_{nm}^{(j)}}{\partial Z^2} + K_{nm}^2 \hat{G}_{nm}^{(j)} = \\ = -\frac{1}{2\pi} \frac{c_0 a}{\lambda} \frac{\Psi_{nm}^{(j)}(r_0, \varphi_0)}{\|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2} \delta\left(\frac{a}{\lambda}(Z - Z_0)\right) \end{aligned} \quad (27)$$

для області

$$|Z| < \infty, \quad |Z_0| < \infty.$$

Його розв'язок з урахуванням умови випромінювання у нескінченність має такий вигляд [1, 11, 12, 14–16]:

$$\hat{G}_{nm}^{(j)} = \frac{ic_0}{4\pi K_{nm}} \frac{\Psi_{nm}^{(j)}(r_0, \varphi_0)}{\|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2} e^{iK_{nm}|Z-Z_0|}. \quad (28)$$

Зауважимо, що розв'язок (28) можна також записати в еквівалентному вигляді [1, 11, 12, 14–16]:

$$\begin{aligned} \hat{G}_{nm}^{(j)} = & \frac{ic_0}{4\pi K_{nm}} \frac{\Psi_{nm}^{(j)}(r_0, \varphi_0)}{\|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2} \times \\ & \times \left[H(Z_0 - Z) e^{-iK_{nm}(Z-Z_0)} + \right. \\ & \left. + H(Z - Z_0) e^{iK_{nm}(Z-Z_0)} \right]. \end{aligned}$$

Тут через

$$K_{nm} = \sqrt{\Omega^2 - \alpha_{nm}^2 a^2} = \sqrt{\lambda^2 k_0^2 - \alpha_{nm}^2 a} \quad (29)$$

позначено безрозмірні осьові хвильові числа.

Далі скористаємося формулою (37) додатку Б, котра встановлює загальний зв'язок між шуканими функціями $\tilde{G}_{nm}^{(j)}$ тіа щойно знайденими функціями $\hat{G}_{nm}^{(j)}$. Підставляючи в неї спочатку вираз (28) для функцій $\hat{G}_{nm}^{(j)}$, а потім співвідношення (12), (29) і (35) для безрозмірних параметрів $\{Z, Z_0\}$, K_{nm} і Ω відповідно, одержуємо розв'язок рівняння (25):

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{nm}^{(j)} = & \frac{i\lambda}{4\pi \sqrt{\lambda^2 k_0^2 - \alpha_{nm}^2}} \frac{\Psi_{nm}^{(j)}(r_0, \varphi_0)}{\|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2} \times \\ & \times e^{i(\lambda \sqrt{\lambda^2 k_0^2 - \alpha_{nm}^2} |z-z_0| - \lambda^2 M k_0 (z-z_0))}. \end{aligned} \quad (30)$$

Підстановка коефіцієнтів (30) у ряд (24) приводить до виразу для шуканої функції Гріна тривимірного конвективного рівняння Гельмгольца (18) у досліджуваному каналі:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(r, \varphi, z, r_0, \varphi_0, z_0; \omega) = & \\ = & \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{G}_{nm}^{(j)}(z, r_0, \varphi_0, z_0; \omega) \times \\ & \times \Psi_{nm}^{(j)}(r, \varphi) = \frac{i\lambda}{4\pi} e^{-i\lambda^2 M k_0 (z-z_0)} \times \\ & \times \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Psi_{nm}^{(j)}(r_0, \varphi_0)}{\|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2} \Psi_{nm}^{(j)}(r, \varphi) \times \\ & \times \frac{e^{i\lambda \sqrt{\lambda^2 k_0^2 - \alpha_{nm}^2} |z-z_0|}}{\sqrt{\lambda^2 k_0^2 - \alpha_{nm}^2}}, \end{aligned} \quad (31)$$

де області зміни координат $r, r_0, \varphi, \varphi_0, z$ і z_0 наведені перед рівнянням (19).

Аналіз співвідношення (31) показує, що функція \tilde{G} розкладається в ряд за акустичними модами каналу $\Psi_{nm}^{(j)}$. Вона теж періодична за φ й симетрична відносно площини $\varphi = \varphi_0$. Явний вплив осередненої течії тут також задається через M і λ . Він збільшується зі зростанням числа M , викликаючи появу й подальше збільшення асиметрії функції \tilde{G} відносно поперечного перерізу $z = z_0$. У випадку відсутності осередненої течії в каналі ($M=0, \lambda=1$) знов одержуємо симетричний відносно перерізу $z = z_0$ вираз, який співпадає з функцією Гріна класичного тривимірного рівняння Гельмгольца для досліджуваного каналу [1, 11, 12, 14–16]:

$$\begin{aligned} \tilde{G}|_{M=0} = & \frac{i}{4\pi} \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Psi_{nm}^{(j)}(r_0, \varphi_0)}{\|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2} \times \\ & \times \Psi_{nm}^{(j)}(r, \varphi) \frac{e^{ik_{nm}|z-z_0|}}{k_{nm}}. \end{aligned}$$

ВИСНОВКИ

1. Побудовані функції Гріна тривимірного хвильового рівняння (див. вираз (17)) і тривимірного рівняння Гельмгольца (див. вираз (31)) для нескінченного прямого жорсткостінного каналу кругового поперечного перерізу з осередненою течією.
2. Ці функції записані у вигляді відповідних рядів за акустичними модами каналу. Вони періодичні за азимутальною координатою й симетричні відносно площини розташування точкового джерела $\varphi = \varphi_0$.
3. У функції Гріна (17) кожен член ряду являє собою суму прямої й зворотної хвиль, які поширюються на відповідній акустичній моді каналу вниз і вгору за течією від джерела.
4. У побудованих функціях Гріна в явному вигляді відображені ефекти осередненої течії, значення яких зростає зі зростанням числа Маха течії. Зокрема, вона викликає появу й подальше збільшення асиметрії функцій відносно поперечного перерізу розташування точкового джерела $z = z_0$.
5. У випадку відсутності осередненої течії побудовані функції Гріна симетричні відносно перерізу $z = z_0$ і співпадають з відомими функціями Гріна для досліджуваного каналу.

6. У процесі побудови функцій Гріна запропоновані перетворення, котрі дозволяють зводити одновимірні конвективні рівняння Кляйна – Гордона (11) й Гельмгольца (25) до їхніх класичних одновимірних аналогів і на основі відомих розв'язків останніх одержувати розв'язки перших двох рівнянь.
1. Борисюк А. О. Генерація звуку обмеженою областю збуреної течії в жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу. Частина 1. Загальна теорія // Акуст. вісн.– 2003.– 6, № 3.– С. 3–9.
 2. Борисюк А. О. Генерація звуку обмеженою областю збуреної течії в жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу. Частина 2. Частинні випадки // Акуст. вісн.– 2004.– 7, № 4.– С. 10–20.
 3. Борисюк А. О. Спрощена форма розв'язку задачі про генерацію звуку обмеженою областю збуреної течії в жорсткостінному каналі // Акуст. вісн.– 2008.– 11, № 4.– С. 3–8.
 4. Berger S. A., Jou L.-D. Flows in stenotic vessels // Ann. Rev. Fluid Mech.– 2000.– 32.– P. 347–382.
 5. Вовк І. В., Гринченко В. Т., Малюга В. С. Особенности движения среды в каналах со стенозами // Прикл. гидромех.– 2009.– 11, № 4.– С. 17–30.
 6. Young D. F. Fluid mechanics of arterial stenosis // J. Biomech. Eng.– 1979.– 101.– P. 157–175.
 7. Lees R. S., Dewey C. F., jr. Phonoangiography: a new noninvasive diagnostic method for studying arterial disease // Proc. Nat. Acad. Sci.– 1970.– 67.– P. 935–942.
 8. Davies H. G., Ffowcs Williams J. E. Aerodynamic sound generation in a pipe // J. Fluid Mech.– 1968.– 32, № 4.– P. 765–778.
 9. Doak P. E. Excitation, transmission and radiation of sound from source distributions in hard-walled ducts of finite length (1): The effects of duct cross-section geometry and source distribution space-time pattern // J. Sound Vib.– 1973.– 31, № 1.– P. 1–72.
 10. Blake W. K. Mechanics of flow-induced sound and vibration.– New York: Acad. Press, 1986 (in 2 vols).
 11. Morse P. M., Feshbach H. Methods of theoretical physics: vol. 1.– New York: McGraw-Hill, 1953.– 997 p.
 12. Morse P. M., Ingard K. U. Theoretical acoustics.– New York: McGraw-Hill, 1968.– 927 p.
 13. Junger M. C., Feit D. Sound, structures and their interaction.– Cambridge, MA: MIT Press, 1972.– 477 p.
 14. Howe M. S. Acoustics of fluid-structure interactions.– Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998.– 560 p.
 15. Howe M. S. Hydrodynamics and sound.– Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007.– 463 p.
 16. Howe M. S. Theory of vortex sound.– Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003.– 216 p.
 17. Crighton D. G., Dowling A. P., Ffowcs Williams J. E., Heckl M., Leppington F. G. Modern methods in analytical acoustics. Lecture Notes.– London: Springer-Verlag, 1992.– 738 p.
 18. Исакович М. А. Общая акустика.– М.: Наука, 1973.– 495 с.
 19. Гринченко В. Т., Вовк І. В., Мадипура В. Т. Основи акустики.– К.: Наук. думка, 2007.– 640 с.
 20. Голдстейн М. Е. Аэроакустика.– М.: Машиностроение, 1981.– 294 с.
 21. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.– М.: Наука, 1987.– 840 с.
 22. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, т.1,2.– М.: Физматгиз, 1963.– 1597 с.
 23. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики.– М.: Наука, 1972.– 735 с.

ДОДАТОК А. УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

a	– радіус поперечного перерізу каналу;
U	– осереднена осьова швидкість течії в каналі;
c_0	– швидкість звуку в незбуреній рідині;
M	– число Маха осередненої течії;
λ	– безрозмірний параметр, який залежить від числа M ;
(\vec{r}, t)	– просторово-часова точка поля, $(\vec{r}, t) = (r, \varphi, z, t)$;
(\vec{r}_0, t_0)	– просторово-часова точка джерела, $(\vec{r}_0, t_0) = (r_0, \varphi_0, z_0, t_0)$;
Z, Z_0	– безрозмірні осьові координати;
T, T_0	– безрозмірний час;
$\delta(\dots)$	– дельта-функція Дірака;
p_a	– акустичний тиск;
γ	– функція, яка описує сумарний розподіл акустичних джерел у каналі;
$\Psi_{nm}^{(j)}$	– акустичні моди каналу;
ω	– кругова частота;
Ω	– безрозмірна частота;
k_0	– акустичне хвильове число;
α_{nm}	– радіальні хвильові числа;
k_{nm}	– осьові хвильові числа;
K_{nm}	– безрозмірні осьові хвильові числа;
G	– функція Гріна конвективного хвильового рівняння;
\tilde{G}	– функція Гріна конвективного рівняння Гельмгольца.

ДОДАТОК Б. ЗАГАЛЬНИЙ ЗВ'ЯЗОК МІЖ ФУНКЦІЯМИ $\tilde{G}_{nm}^{(j)}$ І $\hat{G}_{nm}^{(j)}$

Встановимо загальний зв'язок між функціями $\tilde{G}_{nm}^{(j)}$ і $\hat{G}_{nm}^{(j)}$, які є розв'язками рівнянь (25) і (27) відповідно. Для цього скористаємося прямим безрозмірним перетворенням Фур'є (26). Згідно з ним, функція $\hat{G}_{nm}^{(j)}$ – частотний образ Фур'є функції $G_{nm}^{(j)}$, котра задовольняє рівняння (14):

$$\begin{aligned} \hat{G}_{nm}^{(j)}(Z, r_0, \varphi_0, Z_0; \Omega) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{nm}^{(j)}(Z, T; r_0, \varphi_0, Z_0, T_0) \times \\ &\quad \times e^{i\Omega(T-T_0)} d(T - T_0). \end{aligned} \quad (32)$$

У формулі (32) перейдемо під інтегралом від безрозмірних змінних $\{Z, T, Z_0, T_0\}$ до розмірних $\{z, t, z_0, t_0\}$, використавши співвідношення (12). При цьому врахуємо, що

$$\begin{aligned} G_{nm}^{(j)}(Z, T; r_0, \varphi_0, Z_0, T_0) &= \\ &= G_{nm}^{(j)}(Z(z), T(z, t); r_0, \varphi_0, Z_0(z_0), T_0(z_0, t_0)) = \\ &= G_{nm}^{(j)}(z, t; r_0, \varphi_0, z_0, t_0). \end{aligned}$$

У результаті одержимо

$$\begin{aligned} \hat{G}_{nm}^{(j)}(Z, r_0, \varphi_0, Z_0; \Omega) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{nm}^{(j)}(z, t; r_0, \varphi_0, z_0, t_0) \times \\ &\quad \times e^{i\Omega(c_0(t-t_0)/\lambda a + M\lambda(z-z_0)/a)} \times \\ &\quad \times d\left(\frac{c_0}{\lambda a}(t-t_0) + \frac{M\lambda}{a}(z-z_0)\right). \end{aligned} \quad (33)$$

Оскільки у перетворенні (32) координати Z і Z_0 фіксовані, то, згідно з (12), фіксованими будуть також z і z_0 , а відтак і їхня різниця $(z-z_0)$. Це дозволяє переписати співвідношення (33) наступним чином:

$$\begin{aligned} \hat{G}_{nm}^{(j)}(Z, r_0, \varphi_0, Z_0; \Omega) &= \\ &= \frac{c_0}{\lambda a} e^{i\Omega M\lambda(z-z_0)/a} \times \\ &\quad \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{nm}^{(j)}(z, t; r_0, \varphi_0, z_0, t_0) \times \\ &\quad \times e^{i\Omega c_0(t-t_0)/\lambda a} d(t - t_0). \end{aligned} \quad (34)$$

Увівши позначення

$$\Omega \frac{c_0}{\lambda a} = \omega \quad \leftrightarrow \quad \Omega = \lambda \frac{\omega a}{c_0} = \lambda k_0 a, \quad (35)$$

побачимо, що, згідно з прямим розмірним перетворенням Фур'є (20), інтеграл у формулі (34) є не що інше, як частотний образ Фур'є $\tilde{G}_{nm}^{(j)}$ підінтегральної функції $G_{nm}^{(j)}$:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{nm}^{(j)}(z, r_0, \varphi_0, z_0; \omega) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{nm}^{(j)}(z, t; r_0, \varphi_0, z_0, t_0) \times \\ &\quad \times e^{i\omega(t-t_0)} d(t - t_0). \end{aligned} \quad (36)$$

Тоді врахування у формулі (34) співвідношень (35), (36) разом з (12) і (13) дає шуканий загальний зв'язок між функціями $\hat{G}_{nm}^{(j)}$ і $\tilde{G}_{nm}^{(j)}$:

$$\begin{aligned} \hat{G}_{nm}^{(j)}(Z, r_0, \varphi_0, Z_0; \Omega) &= \\ &= \frac{c_0}{\lambda a} e^{i\lambda^2 M k_0(z-z_0)} \times \\ &\quad \times \tilde{G}_{nm}^{(j)}(z, r_0, \varphi_0, z_0; \omega) = \\ &= \frac{c_0}{\lambda a} e^{i\Omega M(Z-Z_0)} \times \\ &\quad \times \tilde{G}_{nm}^{(j)}\left(\frac{a}{\lambda} Z, r_0, \varphi_0, \frac{a}{\lambda} Z_0; \Omega \frac{c_0}{\lambda a}\right), \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{nm}^{(j)}(z, r_0, \varphi_0, z_0; \omega) &= \\ &= \frac{\lambda a}{c_0} e^{-i\lambda^2 M k_0(z-z_0)} \times \\ &\quad \times \hat{G}_{nm}^{(j)}(Z, r_0, \varphi_0, Z_0; \Omega). \end{aligned}$$